Schematische Darstellung der Funktionsanalyse !

Ableitungen: im Normalfall drei Stück

Symmetrie: Symmetrie zum Ursprung
oder zur y-Achse ?!?

Asymptoten: senkrechte??
waagerechte bzw. schiefe?

Nullstellen: $f(x) = 0$
$\Rightarrow$ man erhält x_1 , x_2 , ...
$\Rightarrow$ $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$, ..

Ableitungen *(drei Stück)*
Symmetrie
Asymptoten *($x\rightarrow \pm\infty$)*
Nullstellen *($f(x)=0$)*
Extrempunkte *($f'(x)=0$)*
Wendepunkte *($f''(x)=0$)*
Zeichnung

Extrempunkte: $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 , x_2 , \dots$

in $f''(x)$
↓
H(..|..) falls $f''(x) < 0$ oder
T(..|..) falls $f''(x) > 0$ oder
falls $f''(x)=0$ (1)

in $f(x)$
für
y-Wert

$f'(x)=0$ setzen
Die erhaltenen x-Werte, setzt man zum einen in $f''(x)$ ein. [Falls das Ergebnis positiv ist, gibt's einen Tiefpunkt, falls es negativ ist, hat man einen Hochpunkt.]
Zum anderen setzt man die x-Werte nochmal in $f(x)$ ein, um die y-Werte zu erhalten.

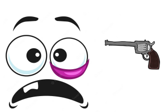
Wendepunkte: $f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 , x_2 , \dots$

in $f'''(x)$
↓
W(..|..) falls $f'''(x) \neq 0$
falls $f'''(x)=0$ (2)

in $f(x)$
für
y-Wert

$f''(x)=0$ setzen
Die x-Werte, die man erhält, setzt man zum in $f'''(x)$ ein. [Falls nicht Null rauskommt, ist es sicher ein Wendepunkt.]
Die x-Werte setzt man nochmal ein. Und zwar in $f(x)$, um die y-Werte zu erhalten.

Zeichnung: Ein paar Striche und Punkte zeichnen, bei Langeweile kann man sie auch bunt anmalen.



Kein Plan von nichts ?!?
Lesen Sie das ganze Kapitel A.11 durch !

1 Falls bei der Überprüfung der Extrem- oder Wendepunkte Null rauskommt, handelt es sich zu 99% um einen Sattelpunkt [heißt auch Terassenpunkt]. Wenn man es genau wissen will, muss man f' auf Vorzeichenwechsel untersuchen. →Siehe Kap.A.19, Funktionsanalyse, „Beispiel 1"
2 Dieser Fall tritt in der Schule eigentlich nie ein. Theoretisch muss man jetzt f'' auf VZW untersuchen.

Abkürzungen & Begriffe

Abzisse ist ein normaler x-Wert [siehe Ordinate]

Änderungsrate ist im Prinzip eine Steigung.

Die momentane Änderungsrate [auch „lokale Änderungsrate"] ist eigentlich eine Tangentensteigung. Man erhält sie, indem man den gegebenen x-Wert in die Ableitung f' einsetzt.

Die durchschnittliche Änderungsrate [auch „mittlere Änderungsrate"] ist eigentlich eine Steigung zwischen zwei Punkten [d.h. Sekantensteigung]. Man erhält sie durch die Formel: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ bzw. $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Üblicherweise hat man zwei x-Werte gegeben (oft als Intervall [a;b] gegeben), von denen man beide y-Werte berechnen muss und dann alles in die Formel einsetzt.

arcsin, arccos, arctan sind die korrekten Bezeichnungen für $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$.
[Die üblichen Bezeichnungen $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ sind mathematisch gesehen eigentlich nicht korrekt.]
Bsp: Aus $\sin(x) = 0{,}6$ folgt: $x = \arcsin(0{,}6)$
[Wird im Taschenrechner als $x=\sin^{-1}(0{,}6)$ getippt.]

Argumente tauchen bei sin( ), cos( ), tan( ) sowie ln( ) auf. Es handelt sich hierbei um das Innere der Klammer. [Das Argument von $\cos(2x-3)$ ist $2x-3$]

Aufleiten ist der umgangssprachliche Begriff für *„integrieren"* oder *„Stammfunktion bilden"*. Den Begriff „aufleiten" gibt es in Mathe eigentlich nicht. [Ich werde ihn aber trotzdem manchmal verwenden.]

CAS [**C**omputergestütztes **A**lgebra**S**ystem] ist ein Taschenrechner, der eigentlich alles kann.
[CAS hat auf jeden Fall nichts mit dem Firmennamen „Casio" zu tun]. Ein CAS kann Ableitungen und Stammfunktionen angeben [ein normaler GTR kann diese nur zeichnen], vor allem kann er Gleichungen lösen, ab- und aufleiten selbst wenn Parameter in den Gleichungen enthalten sind. Natürlich vereinfacht ein CAS jede normale Abi-Aufgabe erheblich. Deswegen sind Aufgaben bzw. Prüfungsaufgaben für den CAS speziell, d.h. etwas schwerer.

Extrempunkte sind Hoch- oder Tiefpunkte. [Wendepunkte zählen NICHT zu Extrempunkten!] Die Mehrzahl von *Extremum* heißt *Extrema*.

Ordinaten sind normale y-Werte [siehe Abzisse]

Orthogonal bedeutet senkrecht. Zwei Geraden oder Funktionen sind zueinander orthogonal, wenn sie im Winkel von 90° zueinander stehen. Zu „orthogonal" gehören also immer *zwei* Geraden oder Funktionen. *Eine* Gerade [oder Funktion] allein kann nicht orthogonal sein.
Egal wie die Aufgabe lautet: wenn zwei Geraden [oder zwei Funktionen] orthogonal zueinander stehen, gilt immer: $\mathbf{m_1 \cdot m_2 = -1}$ wobei m_1 bzw. m_2 die Steigungen der beiden Geraden sind. Falls es sich nicht um Geraden, sondern Funktionen handelt, sind m_1 bzw. m_2 natürlich die Ableitungen der Funktionen [in die Ableitung wird dann noch der x-Wert der Schnittpunkte eingesetzt]. Also $m_1=f'(x)$, $m_2=g'(x)$
Falls die Aufgabe lautet, dass zwei Funktionen orthogonal zueinander stehen, gelten *zwei* Bedingungen, die man in der Aufgabe vermutlich beide braucht:
1) $f(x)=g(x)$ und 2) $f'(x)\cdot g'(x)=-1$

Koeffizienten sind Vorzahlen. Z.B. ist in der Gleichung $3x-5y=4$ der Koeffizient von „x" die Zahl „3". Der Koeffizient von „y" ist die Zahl „-5".

Kurvendiskussion ist das Gleiche wie „Funktionsanalyse".

Parallel bedeutet „gleiche Steigung". Wenn zwei Geraden [oder zwei Funktionen] parallel sind, haben sie immer die gleiche Steigung.
Es gilt also: $m_1=m_2$ bzw. $f'(x)=g'(x)$.

Parameter [siehe Variable]

Passanten sind Geraden, die an einer Kurve, Kreis, ... vorbei laufen. [Nicht wichtig!]

Sekanten sind Geraden, die eine Kurve, einen Kreis, oder sonstwas schneiden.

Senkrecht hat in Mathe zwei Bedeutungen. Und zwar hängt es davon ab, ob es sich um eine einzige Gerade handelt, die *senkrecht* steht, oder zwei Geraden [oder zwei Funktionen] die zueinander senkrecht stehen.
- Eine senkrechte Gerade hat immer die Form x=Zahl [z.Bsp. x=-4 oder x=1] und ist damit parallel zur y-Achse.
- Wenn zwei Geraden [oder Funktionen] aufeinander senkrecht stehen, heißt das orthogonal.

Tangenten sind Geraden, die eine Kurve [oder Kreis, ...] berühren. Sie haben im Berührpunkt die gleiche Steigung wie die Kurve [$m_{tan}=f'(x_{Berühr})$].

Variablen und Parameter sind die Buchstaben, die in der Analysis auftauchen.
Variable sind die wichtigsten Buchstaben. Üblicherweise erfüllt das „x" diese Rolle. Der Variablenname steht immer in Klammer beim Namen der Funktion. [z.B. f(**x**) oder v(**t**), ...]. Eine Variable zeichnet man im Schaubild immer auf der waagerechten Achse ein [meist „x-Achse"], eine Variable leitet man auf und ab, eine Gleichung löst man meistens nach den Variablen auf. Alle anderen Buchstaben werden „nur" wie normale Zahlen behandelt.

Bsp: $f(x) = x^2+2tx-t^2$ x ist die Variable, t der Parameter
$g(t) = x^2+2tx-t^2$ t ist die Variable, x der Parameter
$h(x) = 2a\cdot\cos(b)+2x-4$ x ist die Variable, a und b sind Parameter

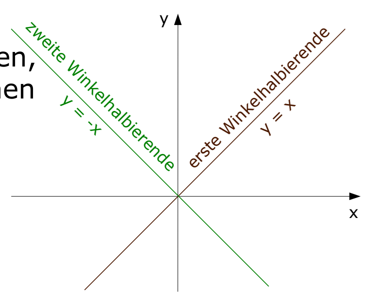
Beim Ableiten leitet man nur die Variablen ab, die Parameter werden wie Zahlen behandelt (sie fallen also weg, wenn sie mit „+" oder mit „–" verbunden sind und bleiben stehen, wenn sie mit „mal" oder „geteilt" verbunden sind).

$f'(x) = 2x+2t$
$g'(t) = 2x-2t$
$h'(x) = 2$

Vorzeichenwechsel gibt es in Mathe in zwei Bereichen.

- Bei der Berechnung von Extrem- bzw. Wendepunkten. Falls bei der Überprüfung im Ergebnis von f''(x) bzw. f'''(x) Null rauskommt, sollte man VZW anwenden. [→Kap.A.19.01 Bsp.1]
- Bei gebrochen-rationalen Funktionen gibt es bei senkrechten Asymptoten die Unterteilung in senkrechte Asymptoten *mit* bzw. *ohne* VZW. So richtig braucht man das aber nur selten.

Winkelhalbierende sind die einzigen beiden Geraden, die in Mathe so wichtig sind, dass sie einen eigenen Namen haben:
die *erste Winkelhalbierende* hat die Gleichung: $y=x$,
die *zweite Winkelhalbierende* hat die Gleichung: $y=-x$.



A.11 Anschauliche Bedeutungen

A.11.01 Die Funktion f(x)

- Die Hauptfunktion f(x) gibt immer die **y-Werte** einer Funktion an.
- Um einen y-Wert zu berechnen, muss man also den x-Wert in die Funktion f(x) einsetzen.
- Man verwendet die Funktion f(x) auch um Nullstellen zu berechnen.
- Bei anwendungsorientierten Aufgaben ist f(x) oftmals der **Bestand.**

f(x) = y-Wert
f'(x) = Steigung
f''(x) = Krümmung
F(x) = Flächeninhalt

A.11.02 Die erste Ableitung f'(x)

- Die erste Ableitung f'(x) gibt immer die **Steigung** einer Funktion und damit auch die Steigung der Tangente an.
- Will man also die Steigung m der Funktion [oder der Tangente] in einem bestimmten Punkt berechnen, muss man den x-Wert des Punktes, um welchen es geht, in die Ableitung f'(x) einsetzen.
- Setzt man die erste Ableitung Null [f'(x)=0], erhält man die x-Werte der Hoch- und Tiefpunkte einer Funktion [streng genommen kann´s auch einen Sattelpunkt geben].
- Ist f'(x) positiv, ist die Funktion an der Stelle **monoton steigend**, ist f'(x) negativ, ist die Funktion an der Stelle **monoton fallend**.
- Bei anwendungsorientierten Aufgaben ist f'(x) meist die **Änderung** des Bestands, oder auch *Änderungssrate* bzw. *Wachstumsrate* bzw. *Geschwindigkeit*.
  Bei einer *Zunahme* [=positive Änderung] hat die Ableitung positive Werte, bei einer *Abnahme* [=negative Änderung] hat die Ableitung negative Werte.

A.11.03 Die zweite Ableitung f''(x)

- Die zweite Ableitung f''(x) gibt die Krümmung einer Funktion an.
  → Ist f''(x) negativ, so handelt es sich um eine **Rechtskurve**.
  → Ist f''(x) positiv, so handelt es sich um eine **Linkskurve**.
- Setzt man die zweite Ableitung Null [f''(x)=0], erhält man die Wendestellen einer Funktion.
- Bei anwendungsorientierten Aufgaben hat f''(x) normalerweise keine besondere Bedeutung.

A.11.04 Die Stammfunktion F(x)

- Die Stammfunktion [umgangssprachlich nennt man die Bildung der Stammfunktion auch „aufleiten"] benötigt man um **Flächeninhalte** bzw. **Integrale** zu berechnen.

A.11.05 Die Definitionsmenge

- Die Definitionsmenge besteht aus allen **x-Werten**, die man in eine Funktion **einsetzen darf**.
- Bei normalen Funktionen ist die Definitionsmenge immer die Menge der reellen Zahlen ($D=\mathbb{R}$), die Def.menge besteht also normalerweise aus *allen* Zahlen.
- Falls eine Funktion irgendwo im **Nenner** [das ist unter´m Bruchstrich ☺] ein „x" enthält, macht die Definitionsmenge Probleme. In diesem Fall muss man den Nenner Null setzen und die erhaltenen x-Werte aus **D** ausschließen.

  Bsp: $f(x) = \frac{x^2-2x}{2x-6}$ $\qquad 2x-6=0 \;\Rightarrow\; x=3 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
- Falls eine Funktion irgendwo eine **Wurzel** enthält, macht die Definitionsmenge ebenfalls Probleme. In diesem Fall muss der Term unter der Wurzel größer oder gleich Null sein.

  Bsp: $f(x) = \sqrt{2x-6}$ $\qquad 2x-6 \geqslant 0 \;\Rightarrow\; x \geqslant 3 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{D} = \{x \mid x \geqslant 3\}$ [1]

A.11.06 Die Wertemenge

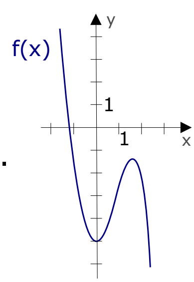
- Die Wertemenge besteht aus allen **y-Werten**, die eine Funktion **annehmen kann**.
- Der beste Weg, die Wertemenge zu erhalten, ist eine Zeichnung von f(x) zu machen und dann anhand von Hoch- und Tiefpunkten sowie Asymptoten [wohin geht die Funktion, woher kommt sie] zu schauen, was für y-Werte angenommen werden können.

Definitionsmenge:
Alle x-Werte, die man einsetzen darf.

Wertemenge:
Alle y-Werte, die man bei f(x) erhalten kann.

Beispiel 1:

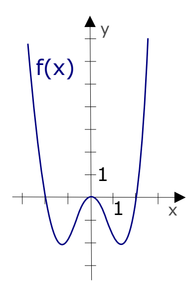
$f(x)=-2x^3+4x^2-5$



f(x) läuft von ganz oben (+∞) nach ganz runter (-∞).
Es tauchen also alle y-Werte auf. $\Rightarrow$ $\mathbf{W}=\mathbb{R}$.

Beispiel 2:

$g(x) = 0{,}5x^4-2x^2$



g(x) läuft hoch bis +∞. Nach unten jedoch nur bis y=-2, was man an den y-Werten der Tiefpunkte sieht.

$\Rightarrow \mathbf{W} = \{\, y \mid y \geqslant -2 \,\}$ [2]

1 Andere Schreibweise wäre: $\mathbf{D} = [\,3\,;\,+\infty\,[$
2 Andere Schreibweise wäre: $\mathbf{W} = [\,-2\,;\,+\infty\,[$

A.11.07 Monotonie

- Eine Funktion ist monoton steigend (monoton wachsend), wenn die Steigung bzw. die erste Ableitung immer positiv oder Null ist.
- Eine Funktion ist streng monoton steigend (streng monoton wachsend), wenn die Steigung bzw. die erste Ableitung immer positiv ist.
- Eine Funktion ist monoton fallend (monoton abnehmend), wenn die Steigung bzw. die erste Ableitung immer negativ oder Null ist.
- Eine Funktion ist streng monoton fallend (streng monoton abnehmend), wenn die Steigung bzw. die erste Ableitung immer negativ ist.

monoton steigend:
$f'(x) \geqslant 0$

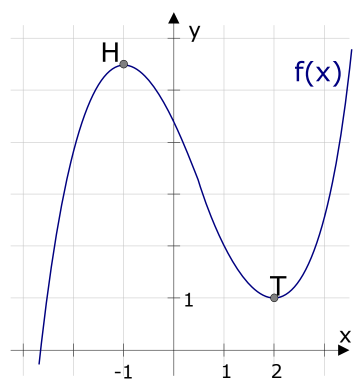
streng monoton steigend:
$f'(x) > 0$

monoton fallend:
$f'(x) \leqslant 0$

streng monoton fallend:
$f'(x) < 0$

Bemerkung:

Falls man an der Ableitung f'(x) nur schwer erkennen kann, ob diese für die gewünschten x-Werte positiv oder negativ ist [und f(x) damit steigend oder fallend], berechnet man einfach Hoch- und Tiefpunkte der Funktion. In einem Bereich rechts vom HP und links vom TP ist eine Funktion logischerweise streng monoton fallend. In einem Bereich rechts vom TP und links vom HP ist eine Funktion logischerweise streng monoton steigend.



Zur Skizze rechts:

Für $x<-1$ ist f(x) streng monoton steigend.
Für $x\leqslant-1$ ist f(x) monoton steigend.
Für $-1<x<2$ ist f(x) streng monoton fallend.
Für $-1\leqslant x\leqslant 2$ ist f(x) monoton fallend.
Für $x>2$ ist f(x) streng monoton steigend.
Für $x\geqslant 2$ ist f(x) monoton steigend.

Beispiel 3:
Zeigen Sie, dass $f(x) = 2(1-3x^3)^5$ monoton fallend ist.

Lösung:
Wir betrachten die Ableitung f'(x).
$f'(x) = 2\cdot 5\cdot(1-3x^3)^4\cdot(-9x^2) \;\Rightarrow\; f'(x) = -90x^2\cdot(1-3x^3)^4\cdot$
f'(x) ist negativ, da „$-90x^2$" negativ ist [Quadrate sind positiv] und die Klammer positiv ist [die gerade Hochzahl macht die Klammer positiv]. Da Plus mal Minus ein negatives Ergebnis liefert, muss f'(x) also negativ sein! $\Rightarrow$ f(x) ist also monoton fallend!

A.11.08 Krümmungsverhalten

Wird nach dem Krümmungsverhalten gefragt, möchte man wissen, ob die Funktion linksgekrümmt oder rechtsgekrümmt ist.

- Eine Funktion ist **linksgekrümmt,** wenn die zweite Ableitung positiv ist.
- Eine Funktion ist **rechtsgekrümmt**, wenn die zweite Ableitung negativ ist.

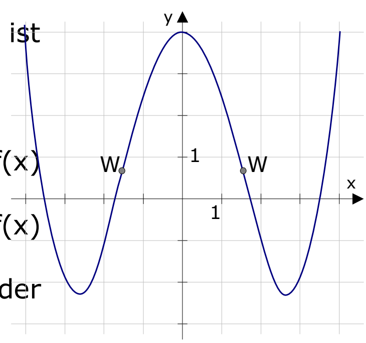
Linkskrümmung:
$f''(x)>0$

Rechtskrümmung:
$f''(x)<0$

- Um Links- oder Rechtskrümmung bei einer Funktion zu unterscheiden, beginnt man am linken Rand der Skizze, stellt sich vor, dass die Kurve eine Straße ist, auf die man von oben schaut.
  Wenn man nun auf der Straße so gemütlich entlangfährt und das Lenkrad nach links dreht hat man eben eine Linkskurve, anderenfalls eben eine Rechtskurve.

- Die Grenze zwischen einer Rechts- bzw. Linkskurve ist immer ein Wendepunkt.

Zur Skizze rechts:
Für $x<-1{,}5$ [links vom linken Wendepunkt] ist f(x) linksgekrümmt.
Für $-1{,}5<x<1{,}5$ [zwischen den Wendepunkten] ist f(x) rechtsgekrümmt.
Für $x>1{,}5$ [rechts vom rechten Wendepunkt] ist f(x) wieder linksgekrümmt.



Beispiel 4:
In welchem Bereich ist $f(x) = x^3-6x^2+3x-1$ linksgekrümmt?

Lösung:
Wir brauchen die zweite Ableitung: $f'(x)=3x^2-12x+3 \quad \Rightarrow f''(x)=6x-12$
f(x) ist linksgekrümmt, wenn $f''(x)>0$

$\Rightarrow 6x-12 > 0 \quad |+12 \quad |:6$

$x > 2$

Antwort: Für $x>2$ ist f(x) rechtsgekrümmt!