A.13 Ableitungen

- Es gibt die Ableitungen von einfachen Funktionen, die immer die Form haben:
  Zahl·x^{Zahl} + Zahl·x^{Zahl}+... [z.Bsp. $x^4+4x^3-7x^2+5x-2$]
- Es gibt die Ableitungen der verschiedenen Funktionstypen [e-Funktionen, sin- und cos-Funktion, Brüche, ...], die wir in Kap A.41 – Kap A.45 genauer behandeln.
- Kompliziertere Funktionen, die man mit der Produkt-, Quotienten- oder Kettenregel ableiten muss.

A.13.01 Ableitungen von einfachen Funktionen

Potenzen leitet man so ab: die Hochzahl vom x-Term kommt mit „mal"-verbunden vor den Term, die neue Hochzahl wird um 1 kleiner.
Aus x^4 wird also $4\cdot x^3$, aus $4x^3$ wird $4\cdot 3\cdot x^2=12x^2$
Bei Termen der Form „Zahl·x" fällt das „x" weg. Aus „5x" wird also „5".
Zahlen, die kein „x" haben, fallen weg.

$$f(x) = a\cdot x^n$$
$$f'(x) = a\cdot n\cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = \sin(x)$$
$$f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x)$$
$$f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = a\cdot e^{k\cdot x}$$
$$f'(x) = a\cdot k\cdot e^{k\cdot x}$$

Aufgabe 1
Leiten Sie die Funktion
$f(x)=x^4+4x^3-7x^2+5x-2$ zwei mal ab.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die f'(x) und f''(x) von:
$f(x) = x^5+4x^4-2x^3-5x^2+3x+3{,}2$

Aufgabe 3
Bestimmen Sie die Ableitung von: $f(x) = 2\cdot\sin(x)$

Aufgabe 4
Leiten Sie ab: $f(x) = -3\cdot\cos(x)+4x-5$

Aufgabe 5
Bestimmen Sie die Ableitung von: $f(x) = 5\cdot e^{2x}-1$

Lösung von Aufgabe 1:
$f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 5x - 2$ ableiten ...
$f'(x) = 4\cdot x^3+4\cdot 3x^2 -7\cdot 2x + 5 = 4x^3+12x^2-14x+5$
[Will man f'(x) ein weiteres Mal ableiten, dann ist das die zweite Ableitung.]
$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 14x + 5$
$f''(x) = 4\cdot 3x^2 + 12\cdot 2x - 14 = 12x^2+24x-14$

Lösung von Aufgabe 2:

$f(x) \;= x^5+4x^4-2x^3-5x^2+3x+3{,}2$

$f'(x) \;= 5x^4+4\cdot4x^3 -2\cdot3x^2 -5\cdot2x + 3 \;\; = 5x^4 +16x^3 - 6x^2 - 10x +3$

$f''(x) = 20x^3+48x^2-12x-10$

Lösung von Aufgabe 3:

$f(x) \;= 2\cdot\sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2\cdot\cos(x)$

Lösung von Aufgabe 4:

$f(x) \;= -3\cdot\cos(x)+4x-5$

$f'(x) \;= -3\cdot(-\sin(x))+4 = 3\cdot\sin(x)+4$

Lösung von Aufgabe 5:

$f(x) \;= 5\cdot e^{2x}-1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5\cdot2e^{2x} = 10\cdot e^{2x}$

A.13.02 Einfache Wurzeln und Brüche

Wurzeln und Brüche kann man häufig umschreiben. Bei Brüchen der Form $\frac{\text{Zahl}}{x^{\text{Zahl}}}$ bringt man den Nenner von unten hoch, in den Zähler, in dem man das Vorzeichen der Hochzahl ändert.
Wurzeln schreibt man zu Potenzen um. [Die Hochzahl wird ein Bruch. Siehe Beispiele].

Aufgabe 6

Schreiben Sie folgende Funktionen in die Form $a\cdot x^n$ um

$f(x)=\frac{5}{x^3} \qquad g(x)=\frac{2}{3x^6} \qquad h(x)=\frac{4}{5x} \qquad i(x)=\frac{12}{5x^{-3}}$.

Aufgabe 7

Schreiben Sie folgende Funktionen in die Form $a\cdot x^n$ um

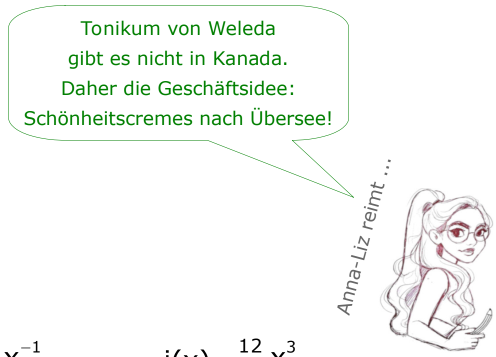
$f(x)=\sqrt{x} \qquad g(x)=4\sqrt{x} \qquad h(x)=\sqrt[3]{x} \qquad i(x)=\sqrt[5]{x^2}$.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x)=3\sqrt{x} + 4x$

Aufgabe 9

Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x)=\frac{3}{x^3} + \frac{6}{5x^2}$



Aufgabe 10

$$g(x) = 3x^4 + 2x^{2,5} - \sqrt{x} + \frac{5}{x^3} + 4x^{-8} + 7$$

Bestimmen Sie die Ableitung von g(x).

Lösung von Aufgabe 6:

$f(x)=5\cdot x^{-3}$ $\quad g(x)=\frac{2}{3}\cdot x^{-6}$ $\quad h(x)=\frac{4}{5}\cdot x^{-1}$ $\quad i(x)=\frac{12}{5}\cdot x^{3}$

Lösung von Aufgabe 7:

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ $\quad g(x) = 4x^{\frac{1}{2}}$ $\quad h(x) = x^{\frac{1}{3}}$ $\quad i(x) = x^{\frac{2}{5}}$

Lösung von Aufgabe 8:

f(x) umschreiben: $f(x) = 3x^{0,5} + 4x$

f(x) ableiten: $f'(x) = 3\cdot 0,5x^{0,5-1}+4 = 1,5x^{-0,5} + 4$

Falls man möchte, kann man f'(x) wieder umschreiben:

$f'(x)=1,5\cdot x^{-0,5}+4 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^{0,5}}+4 = \frac{3}{2\sqrt{x}}+4$

Lösung von Aufgabe 9:

f(x) umschreiben: $f(x) = 3\cdot x^{-3} + \frac{6}{5}x^{-2}$

f(x) ableiten: $f'(x) = 3\cdot(-3)\cdot x^{-4} + \frac{6}{5}\cdot(-2)\cdot x^{-3} = -9\cdot x^{-4} - \frac{12}{5}\cdot x^{-3}$

Falls man möchte, kann man f'(x) wieder umschreiben: $f'(x)= -\frac{9}{x^4} - \frac{12}{5x^3}$

Lösung von Aufgabe 10:

Zuerst schreibt man g(x) um zu:

$g(x) = 3x^4 + 2x^{2,5} - x^{0,5} + 5x^{-3} + 4x^{-8} + 7$

Jetzt kann man g(x) ableiten.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3\cdot 4x^3+2\cdot 2,5x^{1,5}-0,5x^{-0,5}+5\cdot(-3)\cdot x^{-4}+4\cdot(-8)\cdot x^{-9} \\ &= 12x^3 + 5x^{1,5} - 0,5x^{-0,5} - 15x^{-4} - 32x^{-9} \end{aligned}$$

$$g''(x) = 36x^2 + 7,5x^{0,5} +0,25x^{-1,5} + 60x^{-5} + 288x^{-10}$$

Man könnte die Ableitungen wieder umschreiben zu:

$g'(x) = 12x^3 + 5\sqrt{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{15}{x^4} - \frac{32}{x^9}$ bzw

$g''(x) = 36x^2 + 7,5\sqrt{x} - \frac{1}{4\sqrt{x^3}} - \frac{60}{x^5} - \frac{288}{x^{10}}$

A.13.03 Ableitungen von Verkettungen (Kettenregel)

Die Kettenregel wendet man an, wenn man verschachtelte Funktionen hat.
[„Verschachtelte Funktionen" bedeutet normalerweise: Funktionen mit Klammern drin.]

Die Formel für die Kettenregel finde ich etwas unschön. Die Kettenregel sagt im Prinzip aus, dass man die innere Ableitung beachten muss [falls eine vorhanden ist].

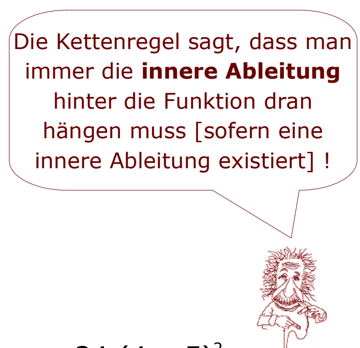
$$f(x)=u(v(x))$$
$$\Downarrow$$
$$f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)$$

Aufgabe 11
Was ist die Ableitung von $f(x) = (2x+5)^{13}$?

Aufgabe 12
Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:
$f(x)=2\cdot(4x+5)^3$ $g(x)=3\cdot(1+0,5x)^8$ $h(x)=6\cdot(5-2x^2)^4$ $i(x)=0,5\cdot(8-x)^{-3}$.

Aufgabe 13
Bestimmen Sie die Ableitung von: $j(x) = \sqrt{x^2-4}$.

Lösung von Aufgabe 11:
Um f(x) abzuleiten, denkt man zuerst nur an $(...)^{13}$.
$(...)^{13}$ abgeleitet ergibt $13\cdot(...)^{12}$.
Erst anschließend betrachtet man das Innere der Klammer „(2x+5)", leitet dieses zu „2" ab und hängt diese „2" hinten an die Ableitung dran.
$f(x)=(2x+5)^{13}$ gibt abgeleitet: $f'(x) = 13\cdot(2x+5)^{12}\cdot 2$



Lösung von Aufgabe 12:

$f(x) = 2\cdot(4x+5)^3 \quad\Rightarrow\quad f'(x) = 2\cdot 3\cdot(4x+5)^2\cdot 4 \quad = 24\cdot(4x+5)^2$

$g(x) = 3\cdot(1+0,5x)^8 \quad\Rightarrow\quad g'(x) = 3\cdot 8\cdot(1+0,5x)^7\cdot 0,5 \quad = 12\cdot(1+0,5x)^7$

$h(x) = 6\cdot(5-2x^2)^4 \quad\Rightarrow\quad h'(x) = 6\cdot 4\cdot(5-2x^2)^3\cdot(-4x) \quad = -96x\cdot(5-2x^2)^3$

$i(x) = 0,5\cdot(8-x)^{-3} \quad\Rightarrow\quad i'(x) = 0,5\cdot(-3)\cdot(8-x)^{-4}\cdot(-1) \quad = +1,5\cdot(8-x)^{-4}$

Lösung von Aufgabe 13:
Um ableiten zu können, muss man die Wurzel als Klammer hoch 0,5 umschreiben: $\sqrt{x^2-4} = (x^2-4)^{0,5}$

$\Rightarrow$ $j(x) = (x^2-4)^{0,5}$
$\Rightarrow$ $j'(x) = 0,5\cdot(x^2-4)^{0,5-1}\cdot(2x) = x\cdot(x^2-4)^{-0,5}$
Man könnte j'(x) jetzt noch umschreiben zu:
$$j'(x) = x\cdot(x^2-4)^{-0,5} = \frac{x}{(x^2-4)^{0,5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

A.13.04 Ableitungen von Produkten (Produktregel)

Die Produktregel (sie heißt auch „Leibnizregel") verwendet man selbstverständlich dann, wenn man ein Produkt ableiten muss.
z.Bsp. ist das zwingend notwendig bei:
$f(x) = x \cdot \sin(x)$ oder $g(x) = (x-2) \cdot e^{4-x}$.
Bevor wir uns jedoch an Themen von Kap.A.41 und A.42 wagen (Sinus- und e-Funktionen), üben wir Leichteres.

$$f(x) = u \cdot v$$
$$\Downarrow$$
$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Aufgabe 14
Leiten Sie f(x) mit Hilfe der Produktregel einmal ab: $f(x) = x^2 \cdot (x^3+2x+3)$.

Aufgabe 15
Leiten Sie $f(x) = (x^2-4x) \cdot \sqrt{x}$ ab!

Aufgabe 16
Bilden Sie die Ableitung von: $f(x) = (2x^3+3x-1) \cdot (2-x^5)$.

Kombination von Produktregel *mit* Kettenregel

Aufgabe 17
Gegeben ist: $f(x)=2x^3 \cdot (2-x)^5$. Bestimmen Sie f'(x).

Aufgabe 18
Gegeben ist: $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{2x+5}$. Bestimmen Sie f'(x).

Aufgabe 19
Gegeben ist: $f(x) = (3x+1)^4 \cdot (-x+2)^3$ Bestimmen Sie f'(x).

Kombination von Produktregel *mit* sin und cos

Aufgabe 20
Gegeben ist: $f(x) = 2x \cdot \sin(x)$. Bestimmen Sie f'(x).

Aufgabe 21
Gegeben ist: $f(x) = (x^2-3) \cdot \cos(x)$. Bestimmen Sie f'(x).

Aufgabe 22
Gegeben ist: $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x)$ Bestimmen Sie f'(x).

Kombination *mit* e-Funktionen

Aufgabe 23
Gegeben ist: $f(x) = 2x \cdot e^x$. Bestimmen Sie f'(x).

Aufgabe 24
Gegeben ist: $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$. Bestimmen Sie f'(x).

Aufgabe 25
Gegeben ist: $f(x) = (x^2+3) \cdot e^{2x}$. Bestimmen Sie f'(x).

Lösung von Aufgabe 14:

$$f'(x) = \underbrace{2x}_{u'}\cdot\underbrace{(x^3+2x+3)}_{v} + \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{(3x^2+2)}_{v'}$$

[Zum Vereinfachen könnte man jetzt noch die Klammern auflösen.]

$u = x^2$
$u' = 2x$
$v = x^3+2x+3$
$v' = 3x^2+2$

Lösung von Aufgabe 15:

$$f'(x) = (2x-4)\cdot\sqrt{x} + (x^2-4x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \ldots$$

[Könnte man jetzt ebenfalls noch vereinfachen...]

$u = x^2-4x$
$u' = 2x-4$
$v = \sqrt{x} = x^{0,5}$
$v' = 0,5x^{-0,5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Lösung von Aufgabe 16:

$f'(x) = u'\cdot v+u\cdot v' =$
$= (6x^2+3)\cdot(2-x^5)+(2x^3+3x-1)\cdot(-5x^4) =$
[vereinfachen]
$= 12x^2-6x^7+6-3x^5 - 10x^7-15x^5+5x^4 =$
$= -16x^7-18x^5+5x^4+12x^2+6$

[Bräuchte man noch f''(x), ginge das jetzt auch ohne Produktregel.]

$f''(x) = -112x^6-90x^4+20x^3+24x$

$u = 2x^3+3x-1$
$u' = 6x^2+3$
$v = 2-x^5$
$v' = -5x^4$

Lösung von Aufgabe 17:

$f'(x) = u'\cdot v+u\cdot v' =$
$= 6x^2\cdot(2-x)^5+2x^3\cdot(-5\cdot(2-x)^4) =$ [$(\ )^4$ ausklammern]
$= (2-x)^4\cdot[6x^2\cdot(2-x)+2x^3\cdot(-5)] =$
$= (2-x)^4\cdot[12x^2-6x^3-10x^3] =$
$= (2-x)^4\cdot(12x^2-16x^3)$

$u = 2x^3$
$u' = 6x^2$
$v = (2-x)^5$
$v' = 5\cdot(2-x)^4\cdot(-1)$
$= -5\cdot(2-x)^4$

Lösung von Aufgabe 18:

$f'(x) = u'\cdot v+u\cdot v' =$
$= 2x\cdot\sqrt{2x+5}+x^2\cdot(2x+5)^{-0,5} = \ldots =$
[das könnte man noch vereinfachen ...]

$u = x^2$
$u' = 2x$
$v = \sqrt{2x+5} = (2x+5)^{0,5}$
$v'=0,5\cdot(2x+5)^{-0,5}\cdot 2$
$= (2x+5)^{-0,5}$

Lösung von Aufgabe 19:

$f'(x) = u'\cdot v+u\cdot v' =$
$= 12(3x+1)^3\cdot(-x+2)^3+(3x+1)^4\cdot(-3\cdot(-x+2)^2)$
[Falls gewünscht: $(\ )^3\cdot()^2$ ausklammern]
$= (3x+1)^3\cdot(-x+2)^2\cdot[12(-x+2)+(3x+1)\cdot(-3)]$
$= (3x+1)^3\cdot(-x+2)^2\cdot[-12+24-9x-3]$
$= (3x+1)^3\cdot(-x+2)^2\cdot(-21+21)$

$u = (3x+1)^4$
$u' = 4\cdot(3x+1)^3\cdot 3$
$= 12\cdot(3x+1)^3$
$v = (-x+2)^3$
$v' = 3\cdot(-x+2)^2\cdot(-1)$
$= -3\cdot(-x+2)^2$

Lösung von Aufgabe 20:

$f'(x) = u'\cdot v+u\cdot v' =$
$= 2\cdot\sin(x)+2x\cdot\cos(x)$

$u=2x \Rightarrow u'=2$
$v=\sin(x) \Rightarrow v'=\cos(x)$

Lösung von Aufgabe 21:

$$f'(x) = u'\cdot v+u\cdot v' = $$
$$= 2x\cdot\cos(x)+(x^2-3)\cdot(-\sin(x))$$
$$= 2x\cdot\cos(x)-(x^2-3)\cdot\sin(x)$$

$u=x^2-3 \Rightarrow u'=2x$
$v=\cos(x) \Rightarrow v'=-\sin(x)$

Lösung von Aufgabe 22:

$$f'(x) = u'\cdot v+u\cdot v' = $$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin(x)+\sqrt{x}\cdot\cos(x)$$

$u = \sqrt{x} = x^{0,5}$
$u' = 0,5\cdot x^{-0,5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$v = \sin(x)$
$v' = \cos(x)$

Lösung von Aufgabe 23:

$$f'(x) = u'\cdot v+u\cdot v' = $$
$$= 2\cdot e^x+2x\cdot e^x = e^x\cdot(2+2x)$$

$u=2x \Rightarrow u'=2$
$v=e^x \Rightarrow v'=e^x$

Lösung von Aufgabe 24:

$$f'(x) = u'\cdot v+u\cdot v' = $$
$$= 2x\cdot e^{-x}+x^2\cdot(-e^{-x}) = $$
$$= e^{-x}\cdot(2x+x^2\cdot(-1)) = e^{-x}\cdot(2x-x^2)$$

$u=x^2 \Rightarrow u'=2x$
$v=e^{-x} \Rightarrow v'=-e^{-x}$

Lösung von Aufgabe 25:

$$f'(x) = u'\cdot v+u\cdot v' = $$
$$= 2x\cdot e^{2x}+(x^2+3)\cdot 2e^{2x} = $$
$$= e^{2x}\cdot(2x+(x^2+3)) = e^{2x}\cdot(x^2+2x+3)$$

$u=x^2+3 \Rightarrow u'=2x$
$v=e^{2x} \Rightarrow v'=2e^{2x}$

A.13.05 Ableitungen von Brüchen (Quotientenregel)

Bruch-Funktionen heißen eigentlich gebrochenrationale Funktionen und sind in Kap.A.43 ausführlicher beschrieben [DownLoadCenter von www.mathe-seite.de].
Wir gehen daher hier nur kurz auf die Quotientenregel ein. Nennen wir also den Zähler [=das Obere] „u", und den Nenner [=das Untere] „v".
Den Bruch leitet man dann wie rechts beschrieben ab.

$$f(x)= \frac{u}{v}$$
$$\Downarrow$$
$$f'(x)= \frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

Aufgabe 26

Bilden Sie die Ableitung von $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{x^2+1}$.

Aufgabe 27

Bilden Sie die Ableitung von $f(x) = \frac{8x-20}{x+2}$.

Lösung von Aufgabe 26:

$$f'(x) = \frac{(3x^2-4x)\cdot(x^2+1)-(x^3-2x^2)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{(3x^4+3x^2-4x^3-4x)-(2x^4-4x^3)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2-4x}{(x^2+1)^2}$$

$u = x^3-2x^2$
$u' = 3x^2 - 4x$
$v = x^2+1$
$v' = 2x$

Lösung von Aufgabe 27:

$$f'(x) = \frac{8\cdot(x+2)-(8x-20)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{8x+16-8x+20}{(x+2)^2} = \frac{36}{(x+2)^2}$$

$u = 8x-20$
$u' = 8$
$v = x+2$
$v' = 1$

A.13.06 Kombination der Ableitungsregeln

Aufgabe 28
Leiten wir $f(x) = 3x^2\cdot(2x+1)^4$ ab.

Aufgabe 29
Wir wollen unbedingt drei Ableitungen der Funktion: $f(x)=\frac{2x^2+4x}{2x-5}$.

Aufgabe 30 [Hierfür müssen Sie sin und cos ableiten können! →Kap.A.42.04]
Bestimmen Sie die erste Ableitung von: $f(x) = 2x\cdot\cos(6x)$.

Aufgabe 31 [Hierfür müssen Sie sin und cos ableiten können! →Kap.A.42.04]
Bestimmen Sie die erste Ableitung von: $f(x) = \sqrt{-x+1}\cdot\sin(4x)$.

Aufgabe 32 [Hierfür müssen Sie e-Funktionen ableiten können! →Kap.A.41.03]
Bestimmen Sie die erste Ableitung von: $f(x) = (x^2-5)\cdot e^{3x+2}$.

Aufgabe 33 [Hierfür müssen Sie einfach nur göttlich-genial sein!]
Bestimmen Sie die erste Ableitung von: $f(x) = -3\cos(2x)\cdot e^{-x+1}+6x^2$.

Lösung von Aufgabe 28:
[Wenn man f(x) betrachtet, sieht man zwei Terme, die mit „mal" verbunden sind: nämlich „$3x^2$" und „$(2x+1)^4$".
Daher braucht man die Produktregel. Ein Teil des Produkts ist $v=(2x+1)^4$. Um dieses abzuleiten, braucht man die Kettenregel.]

$u = 3x^2$
$u' = 6x$
$v = (2x+1)^4$
$v' = 4\cdot(2x+1)^3\cdot 2$
$= 8\cdot(2x+1)^3$
[v': über Kettenregel]

$$f'(x) = 6x\cdot(2x+1)^4 + 3x^2\cdot 8(2x+1)^3$$

[hier kann man noch vereinfachen, wenn man $(2x+1)^3$ ausklammert]

$$= (2x+1)^3 \cdot [\ 6x\cdot(2x+1) + 3x^2\cdot 8\ ] =$$
$$= (2x+1)^3 \cdot [\ 12x^2+6x + 24x^2\ ] =$$
$$= (2x+1)^3 \cdot (\ 36x^2+6x\ )$$

Lösung von Aufgabe 29:

$f(x)=\frac{2x^2+4x}{2x-5}$

[Wir brauchen natürlich die Quotientenregel. Für f''(x) und f'''(x) werden wir nachher zusätzlich auch noch die Kettenregel brauchen.]

$$f'(x) = \frac{(4x+4)\cdot(2x-5)-(2x^2+4x)\cdot(2)}{(2x-5)^2} = \ldots = \frac{4x^2-20x-20}{(2x-5)^2}$$

$u = 2x^2+4x$
$u' = 4x+4$
$v = 2x-5$
$v' = 2$

nächste Ableitung:

$$f''(x) = \frac{(8x-20)\cdot(2x-5)^2-(4x^2-20x-20)\cdot 4(2x-5)}{(2x-5)^4} =$$

[die Klammer „(2x–5)" *einmal* ausklammern, dann kürzen]

$$= \frac{\cancel{(2x-5)}\cdot[(8x-20)\cdot(2x-5)-(4x^2-20x-20)\cdot 4]}{(2x-5)^{\cancel{4}}} =$$

$$= \frac{(8x-20)\cdot(2x-5)-(4x^2-20x-20)\cdot 4}{(2x-5)^3} = \ldots = \frac{180}{(2x-5)^3}$$

$u = 4x^2-20x+20$
$u' = 8x-20$
$v = (2x-5)^2$
$v' = 2\cdot(2x-5)^1\cdot 2$
$= 4\cdot(2x-5)$
[v': über Kettenregel]

nächste Ableitung:

$$f'''(x) = \frac{0\cdot(2x-5)^3-180\cdot 6(2x-5)^2}{(2x-5)^6} =$$

$$= \frac{-1080\,\cancel{(2x-5)^2}}{(2x-5)^{\cancel{6}}} = \frac{-1080}{(2x-5)^4}$$

$u = 180$
$u' = 0$
$v = (2x-5)^3$
$v' = 3\cdot(2x-5)^2\cdot 2$
$= 6\cdot(2x-5)^2$
[v': über Kettenregel]

Lösung von Aufgabe 30:

$f(x) = 2x\cdot\cos(6x)$

$f'(x) = u'\cdot v+u\cdot v' = 2\cdot\cos(2x)+2x\cdot(-\sin(6x)\cdot 6) =$
$= 2\cos(2x) - 12x\cdot\sin(6x)$

$u = 2x$
$u' = 2$
$v = \cos(6x)$
$v' = -\sin(6x)\cdot 6$

Lösung von Aufgabe 31:

$f(x) = \sqrt{-x+1}\cdot\sin(4x)$

[Auch hier braucht man Produktregel. Sowohl u als auch v müssen wiederum mit der Kettenregel abgeleitet werden. Die Wurzel muss man erst zu $(\ )^{0,5}$ umschreiben.]

$f'(x) = -0{,}5\cdot(-x+1)^{-0,5}\cdot\sin(4x)+\sqrt{-x+1}\cdot 4\cos(4x)$

[ab jetzt könnte man noch vereinfachen, wenn man wollte]

$(-x+1)^{-0,5} = \frac{1}{(-x+1)^{0,5}} = \frac{1}{\sqrt{-x+1}}$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-0{,}5}{\sqrt{-x+1}}\cdot\sin(4x)+4\sqrt{-x+1}\cdot\cos(4x)$

$u=\sqrt{-x+1}=(-x+1)^{0,5}$
$u'=0{,}5\cdot(-x+1)^{-0,5}\cdot(-1)$
$= -0{,}5\cdot(-x+1)^{-0,5}$

$v = \sin(4x)$
$v' = 4\cdot\cos(4x)$

Lösung von Aufgabe 32:

$f(x) = (x^2-5)\cdot e^{3x+2}$ Produktregel ist am Start!

$u = x^2-5$
$u' = 2x$
$v = e^{3x+2}$
$v' = 3\cdot e^{3x+2}$

$f'(x) = u'\cdot v+u\cdot v' = 2x\cdot e^{3x+2} + (x^2-5)\cdot 3e^{3x+2}$

[bei e-Termen sollte man immer ausklammern]

$= e^{3x+2} \cdot [2x\cdot 1 + (x^2-5)\cdot 3\cdot 1]$

[die innere, runde Klammer auflösen]

$= e^{3x+2} \cdot [2x + 3x^2-15]$

$= e^{3x+2}\cdot(3x^2+2x-15)$

Beim Ausklammern steht *in* der Klammer der ursprüngliche Term und statt jedem e-Term denkt man sich eine „1“!

Lösung von Aufgabe 33:

$f(x) = -3\cos(2x)\cdot e^{-x+1}+6x^2$.

Der hintere Term „6x²“ ist mit dem vorderen Teil durch eine Strichrechnung verbunden. Die beiden Teile haben also nichts miteinander zu tun. Der hintere Teil wird einfach zu „12x“ abgeleitet und wir kümmern uns hauptsächlich nur um den vorderen Teil, für den man die Produktregel braucht.

$u = -3\cos(2x)$
$u' = -3\cdot(-\sin(2x))\cdot 2$
$= 6\cdot\sin(2x)$
$v = e^{-x+1}$
$v' = e^{-x+1}(-1)$
$= -e^{-x+1}$

$f'(x) = u'\cdot v+u\cdot v'$
$= 6\sin(2x)\cdot e^{-x+1}+(-3\cos(2x))\cdot(-e^{-x+1})$
$= 6\sin(2x)\cdot e^{-x+1}+3\cos(2x)\cdot e^{-x+1}$