Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter **www.mathe-laden.de** bestellen (falls Sie das möchten).
Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht aus dem Internet herunter geladen werden können.
Dazu gehören:
Inhaltsverzeichnis, **Stichwortverzeichnis**, und viele **Aufgaben zum Selberrechnen**.

Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.
Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

Sie können diese Datei gerne beliebig für den eigenen Gebrauch verwenden.
Nicht gestattet sind Änderungen sowie kommerzielle Nutzung.

A.22 Schnittwinkel zwischen Funktionen

A.22.01 Berühren und senkrecht schneiden (∯)

Wenn sich zwei Funktionen berühren, müssen sie im Berührpunkt den gleichen y-Wert haben.

Es muss also gelten: **f(x) = g(x).**

Desweiteren muss die Steigung der beiden Funktionen gleich sein, damit gilt: $m_1 = m_2$
Weil eine Steigung einer Funktion immer die Ableitung ist, haben wir als zweite Gleichung:

f'(x) = g'(x).

Wenn sich zwei Funktionen senkrecht schneiden, müssen sie im Schnittpunkt den gleichen y-Wert haben.

Es muss also gelten: **f(x) = g(x).**

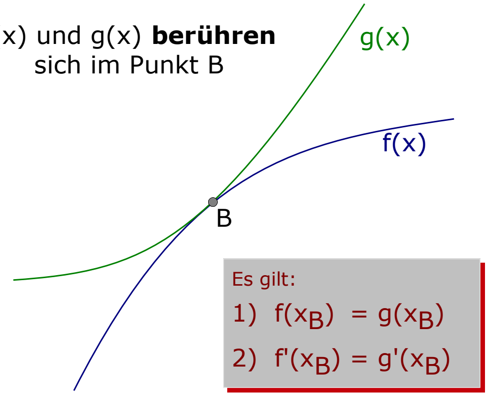
Wenn zwei Funktionen senkrecht aufeinander stehen, gilt immer:

$m_1 = \frac{-1}{m_2}$ [oder $m_1 \cdot m_2 = -1$]

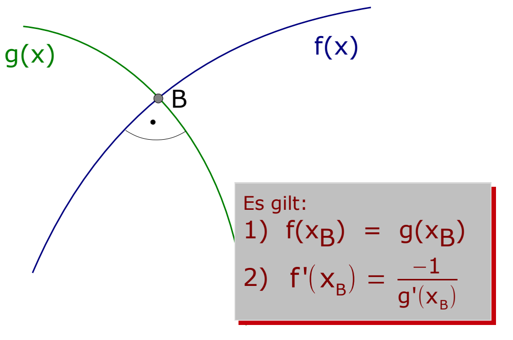
Diese Bedingung ist somit unsere zweite Gleichung:

$$\mathbf{f'(x) = \frac{-1}{g'(x)}}.$$

f(x) und g(x) **berühren** sich im Punkt B



f(x) und g(x) stehen im Punkt B **senkrecht** aufeinander



Aufgabe 1

Zeigen Sie: $f(x) = x^2 - 2x + 3$ schneidet $g(x) = -0{,}5\cdot x + 4$ orthogonal!

Aufgabe 2

Bestimmen Sie t so, dass die Funktion $f_t(x)=x^2+2tx+2{,}25$ die erste Winkelhalbierende in einem Punkt berührt.

Lösung von Aufgabe 1:
Erstmal Schnittpunkte bestimmen:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 - 2x + 3 &= -0{,}5x + 4 \qquad |+0{,}5x-4 \\ x^2 - 1{,}5x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = 0{,}75 \pm \sqrt{0{,}75^2 - (-1)} = 0{,}75 \pm 1{,}25$$

$\Rightarrow x_1 = -0{,}5 \quad \Rightarrow S_1(\,-0{,}5 \mid f(-0{,}5)\,) \quad \Rightarrow S_1(-0{,}5 \mid 4{,}25\,)$

$\Rightarrow x_2 = +2 \quad \Rightarrow S_2(\,+2 \mid f(+2)\,) \quad \Rightarrow S_2(\,2 \mid 3\,)$

Falls die beiden Funktionen senkrecht aufeinander stehen, gilt: $f'(x) = \frac{-1}{g'(x)}$.

In S_1 auf Orthogonalität überprüfen.

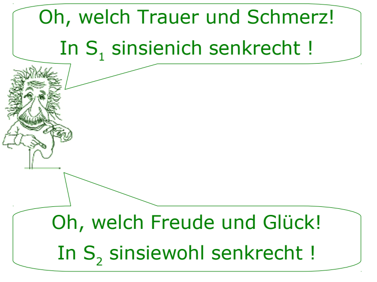
$f'(-0{,}5) = \frac{-1}{g'(-0{,}5)} \quad \Leftrightarrow \quad -3 = \frac{-1}{-0{,}5} \quad \Leftrightarrow \quad -3 = 2$

Widerspruch. Keine Orthogonalität.

In S_2 auf Orthogonalität überprüfen.

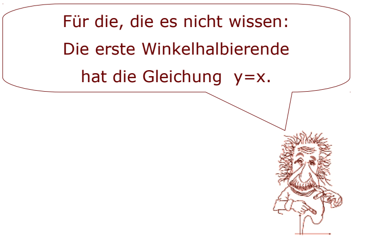
$f'(2) = \frac{-1}{g'(2)} \quad \Leftrightarrow \quad +2 = \frac{-1}{-0{,}5} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 2$

Wahre Aussage. Orthogonalität.



Bei Fragen, ob zwei Funktionen sich berühren / orthogonal schneiden, begegnet man hauptsächlich Parameter-Funktionen. Man hat also zwei Unbekannte [„x" und „t"] und braucht zum Lösen zwei Gleichungen.

Lösung von Aufgabe 2:
Wir haben nun zwei Unbekannte: den Berührpunkt (bzw. dessen x-Wert x_B) sowie den Parameter „t".
Um zwei Unbekannte zu berechnen, braucht man immer auch zwei Gleichungen.
Diese beiden haben wir ja zum Glück.



I) $f_t(x) = y$ II) $f'_t(x) = y'$

I) $x^2+2tx+2{,}25 = x$ II) $2x+2t = 1$

[Gleichung II ist sowohl nach x als auch nach t recht einfach aufzulösen]

$2x + 2t = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x = 1 - 2t \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}5-t$

$x=0{,}5-t$ in Gleichung I einsetzen...

$\Rightarrow (0{,}5-t)^2 + 2t\cdot(0{,}5-t) + 2{,}25 = (0{,}5-t)$

$0{,}25-t+t^2 + t-2t^2 + 2{,}25 = 0{,}5-t \qquad |-0{,}5+t$

$-t^2 + t + 2 = 0 \qquad |\cdot(-1)$

$t^2 - t - 2 = 0$

$t_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2+2} = 0{,}5 \pm 1{,}5$ [p-q-Formel oder a-b-c-Formel]

Die gesuchten Werte für t sind: $t_1 = 2$ und $t_2 = -1$.

A.22.02 Schnittwinkel zwischen zwei Funktionen ($\oint$)

Die wichtigste Formel, die eine Beziehung zwischen Winkeln und Funktionen liefert, lautet:

$m = \tan(\alpha)$.

Dabei ist „m“ natürlich die Steigung der Funktion in einem gewissen Punkt und α ist der Winkel, der von der Funktion (in diesem Punkt) und der Horizontalen eingeschlossen wird.

$$\boxed{m = \tan(\alpha)}$$

Aufgabe 3 [einfaches Beispiel]

Welchen Steigungswinkel hat die Funktion
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 3$ im Wendepunkt ?

Aufgabe 4 [siehe auch →Aufgabe 5]

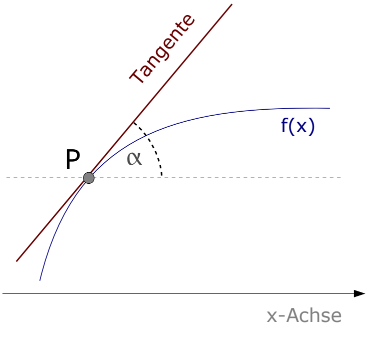
Bestimmen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel der beiden Funktionen f(x) und g(x).

$f(x) = x^2 - 6x + 8$
$g(x) = x^3+2x^2+2x+8$

Lösung von Aufgabe 3:
Wendepunkt bestimmen:
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$
$f''(x) = 6x - 12 \quad \Rightarrow \quad x_W = 2 \quad \Rightarrow \quad W(2 \mid 3)$

Steigung im Wendepunkt berechnen:
$m = f'(2) = -4$

Steigungswinkel:
$\tan(\alpha) = m \quad \Rightarrow \tan(\alpha) = -4 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -75{,}9°$



Ein negativer Winkel bedeutet nur, dass er unterhalb der Waagerechten liegt (weil es wohl eine fallende Funktion ist).
Bedenken Sie bitte: der Taschenrechner muss auf „DEGREE“ gestellt sein.

Lösung von Aufgabe 4:
Schnittpunkt:

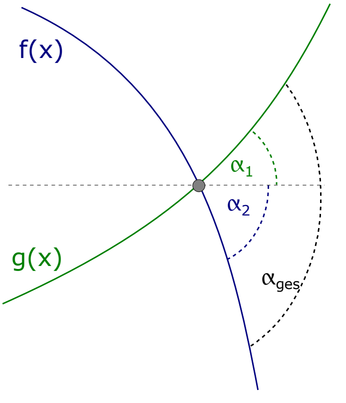
$f(x) = g(x)$
$x^2-6x+8 = x^3+2x^2+2x+8 \quad | -x^2+6x-8$
$x^3 + x^2 + 8x = 0$
$x\cdot(x^2+x+8) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad x^2 + x + 8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S(0 \mid 8)$
$x_{2,3} = -0{,}5 \pm \sqrt{(-0{,}5)^2-8} = \ldots$ k.Lös.

Schnittwinkel:
Ein Schnittwinkel spielt sich logischerweise auch beim Schnittpunkt ab, es geht also um x=0.

Nun können wir allerdings den Schnittwinkel von zwei Funktionen nicht auf's Mal berechnen, da unsere Formel $\tan(\alpha)=m$ ja immer nur eine Steigung und damit auch nur eine Funktion berücksichtigt. Daher rechnen wir zwei Winkel aus [der Winkel von jeder Funktion zur Waagerechten] und verrechnen dann diese beiden Winkel miteinander.

Wir rechnen also den Steigungswinkel von f(x) aus:
Ableitung von f(x): $f'(x) = 2x-6$
$m_1 = f'(0) = -6$
$\Rightarrow \tan(\alpha) = -6 \quad \Rightarrow \alpha_f = \arctan(-6) = \tan^{-1}(-6) = -80{,}53°$

Danach berechnen wir den Steigungswinkel von g(x):
Ableitung von g(x): $g'(x) = 3x^2+4x+2$
$m_2 = g'(0) = +2$
$\Rightarrow \tan(\alpha) = 2 \quad \Rightarrow \alpha_g = \arctan(2) = \tan^{-1}(2) = 63{,}43°$



Da der eine Winkel oberhalb der Waagerechten liegt, der andere Winkel unterhalb der Waagerechten, muss man beide *addieren*, um den Gesamt-Schnittwinkel zu erhalten.

$\alpha_{ges} = \alpha_f + \alpha_g = 63{,}43° + 80{,}53° = 143{,}96°$

A.22.03 Schnittwinkel über Schnittwinkelformel (∯)

Es gibt auch eine Formel, in welcher man den Schnittwinkel zwischen zwei Funktionen direkt berechnen kann, ohne erst beide Teilwinkel zu berechnen, dann überlegen, welchen Winkel man von welchem abzieht, etc.
Die Formel ist zwar etwas hässlich, dafür ist die Anwendung jedoch recht einfach. Es fließen einfach nur die Steigungen der beiden Funktionen [oder Geraden] in die Formeln ein, welche normalerweise über die Ableitungen berechnet werden.

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}}$$

Aufgabe 5 [siehe auch →Aufgabe 4]
Bestimmen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel der beiden Funktionen f(x) und g(x).

$f(x) = x^2 - 6x + 8$
$g(x) = x^3+2x^2+2x+8$

Aufgabe 6

Bestimmen Sie den Winkel unter welchem sich die Funktionen
$f(x)=0,5x^2+x+3$ und $g(x)=0,5x+4$ im zweiten Quadranten schneiden.

Lösung von Aufgabe 5:
Schnittpunkt:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2-6x+8 = x^3+2x^2+2x+8 \qquad | -x^2+6x-8$$
$$x^3 + x^2 + 8x = 0$$
$$x\cdot(x^2+x+8) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad x^2 +x +8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S(\ 0 \mid 8\ )$$
$$x_{2,3} = -0,5\pm\sqrt{(-0,5)^2-8} = \ldots \text{ k.Lös.}$$

Schnittwinkel:
Ein Schnittwinkel spielt sich logischerweise auch beim Schnittpunkt ab, es geht also um $x=0$.
Für die Schnittwinkelformel benötigen wir die beiden Steigungen und dafür brauchen wir beide Ableitungen:

$f(x) = x^2-6x+8$ $\qquad$ $g(x) = x^3+2x^2+2x+8$
$\Rightarrow f'(x) = 2x-6$ $\qquad$ $\Rightarrow g'(x) = 3x^2+4x+2$
$\Rightarrow m_1 = f'(0) = -6$ $\qquad$ $\Rightarrow m_2 = g'(0) = 2$

Nun in die Formel einsetzen:

$$\tan(\alpha) = \frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2} = \frac{2-(-6)}{1+(-6)\cdot 2} = -\frac{8}{11} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(-\frac{8}{11}\right) \approx -36,03°$$

[Negative Winkel gibt man normalerweise nicht an. Hier würde man also sagen $\alpha=36,03°$. Oder man zieht die 36,03° von 180° ab und sagt $\alpha=143,97°$.]

Lösung von Aufgabe 6:
Zuerst brauchen wir die Schnittpunkte, also f(x) und g(x) gleichsetzen.

$$0,5x^2+x+3 = 0,5x+4 \qquad | -0,5x-4$$
$$0,5x^2+0,5x-1 = 0 \qquad | \cdot 2$$
$$x^2+x-2 = 0 \qquad \text{p-q-Formel oder a-b-c-Formel}$$
$$\Rightarrow x_1=1 \quad x_2=-2$$

Der x-Wert $x_1=1$ kommt nicht in Frage, denn im 2.Quadranten sind alle x-Werte negativ. Wir interessieren uns also nur für **$x=-2$**.
[Theoretisch sollten wir noch den y-Wert berechnen und uns davon überzeugen, dass der y-Wert positiv ist, so wie es sich für den 2.Quadranten gehört. Aber … wir verzichten einfach darauf.]
In die Schnittwinkelformel fließen die Steigungen der beiden Funktionen ein.
Für die Steigungen brauchen wir die Ableitungen.

$$f'(x) = x+1 \quad \Rightarrow \quad m_1=f'(-2)=-2+1=-1$$
$$g'(x) = 0,5 \quad \Rightarrow \quad m_2=g'(-2)=0,5$$
$$\tan(\alpha) = \frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2} = \frac{0,5-(-1)}{1+(-1)\cdot 0,5} = \frac{1,5}{0,5} = 3 \quad \Rightarrow \alpha = \arctan^{-1}(3) \approx 71,57°$$

Der Schnittwinkel der beiden Funktionen beträgt: **$\alpha=71,57°$.**