Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter **www.mathe-laden.de** bestellen (falls Sie das möchten).
Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht aus dem Internet herunter geladen werden können.
Dazu gehören:
Inhaltsverzeichnis, **Stichwortverzeichnis**, und viele **Aufgaben zum Selberrechnen**.

Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.
Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

Sie können diese Datei gerne beliebig für den eigenen Gebrauch verwenden.
Nicht gestattet sind Änderungen sowie kommerzielle Nutzung.

A.13 Ableitungen

- Es gibt die Ableitungen von einfachen Funktionen, die immer die Form haben: $\text{Zahl}\cdot x^{\text{Zahl}} + \text{Zahl}\cdot x^{\text{Zahl}}+\ldots$ [z.Bsp. $x^4+4x^3-7x^2+5x-2$]
- Es gibt die Ableitungen der verschiedenen Funktionstypen [e-Funktionen, sin- und cos-Funktion, Brüche, ...], die wir in Kap A.41 – Kap A.45 genauer behandeln.
- Kompliziertere Funktionen, die man mit der Produkt-, Quotienten- oder Kettenregel ableiten muss.

A.13.01 Ableitungen von einfachen Funktionen (∰)

Potenzen leitet man so ab: die Hochzahl vom x-Term kommt mit „mal"-verbunden vor den Term, die neue Hochzahl wird um 1 kleiner.
Aus x^4 wird also $4\cdot x^3$, aus $4x^3$ wird $4\cdot 3\cdot x^2=12x^2$
Bei Termen der Form „Zahl·x" fällt das „x" weg.
Aus „5x" wird also „5".
Zahlen, die kein „x" haben, fallen weg.

$f(x) = a\cdot x^n$

$f'(x) = a\cdot n\cdot x^{n-1}$

$f(x) = \sin(x)$

$f'(x) = \cos(x)$

$f(x) = \cos(x)$

$f'(x) = -\sin(x)$

$f(x) = a\cdot e^{k\cdot x}$

$f'(x) = a\cdot k\cdot e^{k\cdot x}$

Aufgabe 1
Leiten Sie die Funktion
$f(x)=x^4+4x^3-7x^2+5x-2$ zwei mal ab.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die f'(x) und f''(x) von:
$f(x) = x^5+4x^4-2x^3-5x^2+3x+3{,}2$

Aufgabe 3
Bestimmen Sie die Ableitung von: $f(x) = 2\cdot\sin(x)$

Aufgabe 4
Leiten Sie ab: $f(x) = -3\cdot\cos(x)+4x-5$

Aufgabe 5
Bestimmen Sie die Ableitung von: $f(x) = 5\cdot e^{2x}-1$

Lösung von Aufgabe 1:

$f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 5x - 2$ ableiten ...

$f'(x) = 4\cdot x^3 + 4\cdot 3x^2 - 7\cdot 2x + 5$ vereinfachen ...

$= 4x^3 + 12x^2 - 14x + 5$

[Will man f´(x) ein weiteres Mal ableiten, dann ist das die zweite Ableitung.]

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 14x + 5$

$f''(x) = 4\cdot 3x^2 + 12\cdot 2x - 14$

$= 12x^2 + 24x - 14$

Lösung von Aufgabe 2

$f(x) = x^5+4x^4-2x^3-5x^2+3x+3{,}2$

$f'(x) = 5x^4+4\cdot 4x^3 - 2\cdot 3x^2 - 5\cdot 2x + 3$

$= 5x^4 + 16x^3 - 6x^2 - 10x + 3$

$f''(x) = 20x^3+48x^2-12x-10$

Lösung von Aufgabe 3

$f(x) = 2\cdot\sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2\cdot\cos(x)$

Lösung von Aufgabe 4

$f(x) = -3\cdot\cos(x)+4x-5$

$f'(x) = -3\cdot(-\sin(x))+4 = 3\cdot\sin(x)+4$

Lösung von Aufgabe 5

$f(x) = 5\cdot e^{2x}-1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5\cdot 2e^{2x} = 10\cdot e^{2x}$

A.13.02 Einfache Wurzeln und Brüche (∰)

Wurzeln und Brüche kann man häufig umschreiben. Bei Brüchen der Form $\frac{\text{Zahl}}{x^{\text{Zahl}}}$ bringt man den Nenner von unten hoch, in den Zähler, in dem man das Vorzeichen der Hochzahl ändert.
Wurzeln schreibt man zu Potenzen um. [Die Hochzahl wird ein Bruch. Siehe Beispiele].

Aufgabe 6

Schreiben Sie folgende Funktionen in die Form $a\cdot x^n$ um

$f(x)=\frac{5}{x^3} \qquad g(x)=\frac{2}{3x^6} \qquad h(x)=\frac{4}{5x} \qquad i(x)=\frac{12}{5x^{-3}}$.

Aufgabe 7

Schreiben Sie folgende Funktionen in die Form $a\cdot x^n$ um

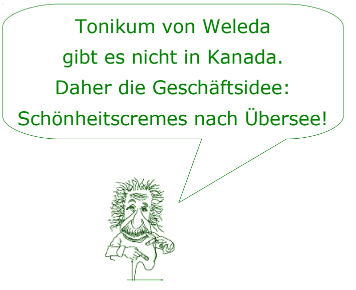
$f(x)=\sqrt{x}$ $\quad g(x)=4\sqrt{x}$ $\quad h(x)=\sqrt[3]{x}$ $\quad i(x)=\sqrt[5]{x^2}$.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x)=3\sqrt{x}+4x$

Aufgabe 9

Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x)=\frac{3}{x^3}+\frac{6}{5x^2}$



Aufgabe 10

$$g(x) = 3x^4+2x^{2,5}-\sqrt{x}+\frac{5}{x^3}+4x^{-8}+7$$

Bestimmen Sie die Ableitung von g(x).

Lösung von Aufgabe 6

$f(x)=5\cdot x^{-3}$ $\quad g(x)=\frac{2}{3}\cdot x^{-6}$ $\quad h(x)=\frac{4}{5}\cdot x^{-1}$ $\quad i(x)=\frac{12}{5}\cdot x^3$

Lösung von Aufgabe 7

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ $\quad g(x)=4x^{\frac{1}{2}}$ $\quad h(x)=x^{\frac{1}{3}}$ $\quad i(x)=x^{\frac{2}{5}}$

Lösung von Aufgabe 8:

f(x) umschreiben: $f(x) = 3x^{0,5}+4x$

f(x) ableiten: $f'(x) = 3\cdot 0,5x^{0,5-1}+4 = 1,5x^{-0,5}+4$

Falls man möchte, kann man f'(x) wieder umschreiben:

$f'(x)=1,5\cdot x^{-0,5}+4 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^{0,5}}+4 = \frac{3}{2\sqrt{x}}+4$

Lösung von Aufgabe 9:

f(x) umschreiben: $f(x) = 3\cdot x^{-3}+\frac{6}{5}x^{-2}$

f(x) ableiten: $f'(x) = 3\cdot(-3)\cdot x^{-4}+\frac{6}{5}\cdot(-2)\cdot x^{-3} = -9\cdot x^{-4}-\frac{12}{5}\cdot x^{-3}$

Falls man möchte, kann man f'(x) wieder umschreiben: $f'(x)=-\frac{9}{x^4}-\frac{12}{5x^3}$

Lösung von Aufgabe 10:

Zuerst schreibt man g(x) um zu:

$g(x) = 3x^4 + 2x^{2,5} - x^{0,5} + 5x^{-3} + 4x^{-8} + 7$

Jetzt kann man g(x) ableiten.

$g'(x) = 3\cdot 4x^3+2\cdot 2,5x^{1,5}-0,5x^{-0,5}+5\cdot(-3)\cdot x^{-4}+4\cdot(-8)\cdot x^{-9}$

$$= 12x^3 + 5x^{1,5} - 0,5x^{-0,5} - 15x^{-4} - 32x^{-9}$$

$$g''(x) = 36x^2 + 7,5x^{0,5} + 0,25x^{-1,5} + 60x^{-5} + 288x^{-10}$$

Man könnte die Ableitungen wieder umschreiben zu:

$$g'(x) = 12x^3 + 5\sqrt{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{15}{x^4} - \frac{32}{x^9} \quad \text{bzw}$$

$$g''(x) = 36x^2 + 7,5\sqrt{x} - \frac{1}{4\sqrt{x^3}} - \frac{60}{x^5} - \frac{288}{x^{10}}$$

A.13.03 Ableitungen von Verkettungen (Kettenregel) (∰)

Die Kettenregel wendet man an, wenn man verschachtelte Funktionen hat. [„Verschachtelte Funktionen" bedeutet normalerweise: Funktionen mit Klammern drin.]

Die Formel für die Kettenregel finde ich etwas unschön. Die Kettenregel sagt im Prinzip aus, dass man die innere Ableitung beachten muss [falls eine vorhanden ist].

$$f(x) = u(v(x))$$
$$\Downarrow$$
$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Aufgabe 11

Was ist die Ableitung von $f(x) = (2x+5)^{13}$?

Aufgabe 12

Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

$f(x)=2\cdot(4x+5)^3$ $g(x)=3\cdot(1+0,5x)^8$ $h(x)=6\cdot(5-2x^2)^4$ $i(x)=0,5\cdot(8-x)^{-3}$.

Aufgabe 13

Bestimmen Sie die Ableitung von: $j(x) = \sqrt{x^2-4}$.

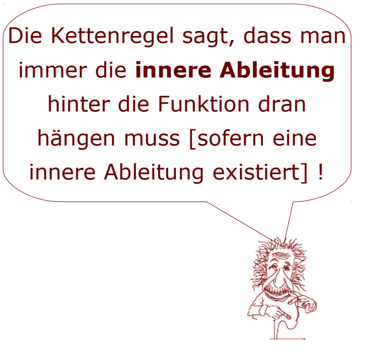
Lösung von Aufgabe 11:

Um f(x) abzuleiten, denkt man zuerst nur an $(...)^{13}$.

$(...)^{13}$ abgeleitet ergibt $13\cdot(...)^{12}$.

Erst anschließend betrachtet man das Innere der Klammer „(2x+5)", leitet dieses zu „2" ab und hängt diese „2" hinten an die Ableitung dran.

$f(x)=(2x+5)^{13}$ gibt abgeleitet: $f'(x) = 13\cdot(2x+5)^{12}\cdot 2$



Lösung von Aufgabe 12:

$f(x) = 2\cdot(4x+5)^3 \quad\Rightarrow\quad f'(x) = 2\cdot3\cdot(4x+5)^2\cdot4 \quad = 24\cdot(4x+5)^2$

$g(x) = 3\cdot(1+0{,}5x)^8 \quad\Rightarrow\quad g'(x) = 3\cdot8\cdot(1+0{,}5x)^7\cdot0{,}5 \quad = 12\cdot(1+0{,}5x)^7$

$h(x) = 6\cdot(5-2x^2)^4 \quad\Rightarrow\quad h'(x) = 6\cdot4\cdot(5-2x^2)^3\cdot(-4x) \quad = -96x\cdot(5-2x^2)^3$

$i(x) = 0{,}5\cdot(8-x)^{-3} \quad\Rightarrow\quad i'(x) = 0{,}5\cdot(-3)\cdot(8-x)^{-4}\cdot(-1) \quad = +1{,}5\cdot(8-x)^{-4}$

Lösung von Aufgabe 13:

Um ableiten zu können, muss man die Wurzel als Klammer hoch 0,5 umschreiben: $\sqrt{x^2-4} = (x^2-4)^{0,5}$

$\Rightarrow j(x) = (x^2-4)^{0,5}$

$\Rightarrow j'(x) = 0{,}5\cdot(x^2-4)^{0,5-1}\cdot(2x) = x\cdot(x^2-4)^{-0,5}$

Man könnte j'(x) jetzt noch umschreiben zu:

$j'(x) = x\cdot(x^2-4)^{-0,5} = \frac{x}{(x^2-4)^{0,5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

A.13.04 Ableitungen von Produkten (Produktregel) (##)

Die Produktregel (sie heißt auch „Leibnizregel") verwendet man selbstverständlich dann, wenn man ein Produkt ableiten muss.
z.Bsp. ist das zwingend notwendig bei:
$f(x) = x\cdot\sin(x)$ oder $g(x) = (x-2)\cdot e^{4-x}$.
Bevor wir uns jedoch an Themen von Kap.A.41 und A.42 wagen (Sinus- und e-Funktionen), üben wir Leichteres.

$$\boldsymbol{f(x) = u\cdot v}$$
$$\Downarrow$$
$$\boldsymbol{f'(x) = u'\cdot v + u\cdot v'}$$

Aufgabe 14

Leiten Sie f(x) mit Hilfe der Produktregel einmal ab: $f(x) = x^2\cdot(x^3+2x+3)$.

Aufgabe 15

Leiten Sie $f(x) = (x^2-4x)\cdot\sqrt{x}$ ab!

Aufgabe 16

Bilden Sie die Ableitung von: $f(x) = (2x^3+3x-1)\cdot(2-x^5)$.

Lösung von Aufgabe 14:

$f'(x) = \underbrace{2x}_{u'}\cdot\underbrace{(x^3+2x+3)}_{v} + \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{(3x^2+2)}_{v'}$

[Zum Vereinfachen könnte man jetzt noch die Klammern auflösen.]

$u = x^2$
$u' = 2x$
$v = x^3+2x+3$
$v' = 3x^2+2$

Lösung von Aufgabe 15:

$f'(x) = (2x-4)\cdot\sqrt{x} + (x^2-4x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \ldots$

[Könnte man jetzt ebenfalls noch vereinfachen...]

$u = x^2-4x$
$u' = 2x-4$
$v = \sqrt{x} = x^{0,5}$
$v' = 0,5x^{-0,5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Lösung von Aufgabe 16:

$f'(x) = u'\cdot v+u\cdot v' =$
$= (6x^2+3)\cdot(2-x^5)+(2x^3+3x-1)\cdot(-5x^4) =$
[vereinfachen]
$= 12x^2-6x^7+6-3x^5 - 10x^7-15x^5+5x^4 =$
$= -16x^7-18x^5+5x^4+12x^2+6$

[Bräuchte man noch f''(x), ginge das jetzt auch ohne Produktregel.]

$f''(x) = -112x^6-90x^4+20x^3+24x$

$u = 2x^3+3x-1$
$u' = 6x^2+3$
$v = 2-x^5$
$v' = -5x^4$

A.13.05 Ableitungen von Brüchen (Quotientenregel) [Kotz-Enten-Regel] (∰)

Bruch-Funktionen heißen eigentlich gebrochenrationale Funktionen und sind in Kap.A.43 ausführlicher beschrieben [DownLoadCenter von www.mathe-seite.de].
Wir gehen daher hier nur kurz auf die Quotientenregel ein. Nennen wir also den Zähler [=das Obere] „u", und den Nenner [=das Untere] „v".
Den Bruch leitet man dann wie rechts beschrieben ab.

$$f(x) = \frac{u}{v}$$
$$\Downarrow$$
$$f'(x) = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

Aufgabe 17

Bilden Sie die Ableitung von $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{x^2+1}$.

Aufgabe 18

Bilden Sie die Ableitung von $f(x) = \frac{8x-20}{x+2}$.

Lösung von Aufgabe 17:

$$f'(x) = \frac{(3x^2-4x)\cdot(x^2+1)-(x^3-2x^2)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{(3x^4+3x^2-4x^3-4x)-(2x^4-4x^3)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{x^4+3x^2-4x}{(x^2+1)^2}$$

$u = x^3-2x^2$
$u' = 3x^2 - 4x$
$v = x^2+1$
$v' = 2x$

Lösung von Aufgabe 18:

$$f'(x) = \frac{8\cdot(x+2)-(8x-20)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{8x+16-8x+20}{(x+2)^2} = \frac{36}{(x+2)^2}$$

$u = 8x-20$
$u' = 8$
$v = x+2$
$v' = 1$

A.13.06 Kombination der Ableitungsregeln (∯)

Aufgabe 19

Leiten wir $f(x) = 3x^2\cdot(2x+1)^4$ ab.

Aufgabe 20

Wir wollen unbedingt drei Ableitungen der Funktion: $f(x)=\frac{2x^2+4x}{2x-5}$.

Aufgabe 21

Bestimmen Sie die erste Ableitung von: $f(x) = 2x\cdot\cos(6x)$.

Lösung von Aufgabe 19:

[Wenn man f(x) betrachtet, sieht man zwei Terme, die mit „mal" verbunden sind: nämlich „$3x^2$" und „$(2x+1)^4$".
Daher braucht man die Produktregel. Ein Teil des Produkts ist $v=(2x+1)^4$. Um dieses abzuleiten, braucht man die Kettenregel.]

$u = 3x^2$
$u' = 6x$
$v = (2x+1)^4$
$v' = 4\cdot(2x+1)^3\cdot 2$
$= 8\cdot(2x+1)^3$
[v': über Kettenregel]

$$f'(x) = 6x\cdot(2x+1)^4 + 3x^2\cdot 8(2x+1)^3$$

[hier kann man noch vereinfachen, wenn man $(2x+1)^3$ ausklammert]

$$= (2x+1)^3 \cdot [\ 6x\cdot(2x+1) + 3x^2\cdot 8\ ] =$$
$$= (2x+1)^3 \cdot [\ 12x^2+6x + 24x^2\ ] =$$
$$= (2x+1)^3 \cdot (\ 36x^2+6x\ )$$

Lösung von Aufgabe 20:

$f(x)=\frac{2x^2+4x}{2x-5}$

[Wir brauchen natürlich die Quotientenregel. Für f''(x) und f'''(x) werden wir nachher zusätzlich auch noch die Kettenregel brauchen.]

$$f'(x) = \frac{(4x+4)\cdot(2x-5)-(2x^2+4x)\cdot(2)}{(2x-5)^2} = \ldots = \frac{4x^2-20x-20}{(2x-5)^2}$$

$u = 2x^2+4x$
$u' = 4x+4$
$v = 2x-5$
$v' = 2$

nächste Ableitung:

$$f''(x) = \frac{(8x-20)\cdot(2x-5)^2-(4x^2-20x-20)\cdot 4(2x-5)}{(2x-5)^4} =$$

[die Klammer „(2x–5)“ *einmal* ausklammern, dann kürzen]

$$= \frac{\cancel{(2x-5)}\cdot[(8x-20)\cdot(2x-5)-(4x^2-20x-20)\cdot 4]}{(2x-5)^{\cancel{4}}} =$$

$$= \frac{(8x-20)\cdot(2x-5)-(4x^2-20x-20)\cdot 4}{(2x-5)^3} = \ldots = \frac{180}{(2x-5)^3}$$

$u = 4x^2-20x+20$
$u' = 8x-20$
$v = (2x-5)^2$
$v' = 2\cdot(2x-5)^1\cdot 2$
$= 4\cdot(2x-5)$
[v': über Kettenregel]

nächste Ableitung:

$$f'''(x) = \frac{0\cdot(2x-5)^3-180\cdot 6(2x-5)^2}{(2x-5)^6} =$$

$$= \frac{-1080\cancel{(2x-5)^2}}{(2x-5)^{\cancel{6}}} = \frac{-1080}{(2x-5)^4}$$

$u = 180$
$u' = 0$
$v = (2x-5)^3$
$v' = 3\cdot(2x-5)^2\cdot 2$
$= 6\cdot(2x-5)^2$
[v': über Kettenregel]

Lösung von Aufgabe 21:

$f(x) = 2x\cdot\cos(6x)$

$f'(x) = u'\cdot v+u\cdot v' = 2\cdot\cos(2x)+2x\cdot(-\sin(6x)\cdot 6) =$
$= 2\cos(2x) - 12x\cdot\sin(6x)$

$u = 2x$
$u' = 2$
$v = \cos(6x)$
$v' = -\sin(6x)\cdot 6$