Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter **www.mathe-laden.de** bestellen (falls Sie das möchten).
Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht aus dem Internet herunter geladen werden können.
Dazu gehören: **Inhaltsverzeichnis**, **Stichwortverzeichnis**, und viele **Aufgaben zum Selberrechnen**.

Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.
Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

matheseite
Die gute Seite an Mathe.

V.09 Anwendungen

Allgemeines Geplapper und Gesabber zu Bewegungsaufgaben

Sogenannte „Bewegungsaufgaben“ oder „Flugzeugaufgaben“ sieht man relativ häufig. Es handelt sich dabei immer um zwei Flugzeuge [oder U-Boote oder Schiffe oder Marienkäfer oder sonstwas], die sich entlang von zwei Geraden bewegen.
Der Parameter aus den Geraden ist dabei immer die Zeit, die vergangen ist.
[Erhält man also z.B. t=5, heißt das, dass das Flugzeug 5 min oder 5 sek … unterwegs war]

Eine Besonderheit besteht darin, dass man immer darauf achten muss, ob es um die *Flugbahnen* oder um die *Flugzeuge* geht.
Bei Flugbahnen haben beide Geraden **unterschiedliche Parameter**.
Geht es um die Flugzeuge, brauchen beide Geraden **den selben Parameter**.

V.09.01 erste Bewegungsaufgabe (∯) (**Aufgabe 1**)

Ein Flugzeug fliegt innerhalb einer Stunde von A(-1|11|10) nach B(-8|15|14).
Ein zweites Flugzeug fliegt gleichzeitig in C(-27|13|3) los, und erreicht den Punkt D(-19|11|19) nach zwei Stunden.
a) Stellen Sie eine Gleichung für die Fluggeraden der beiden Flugzeuge auf.
b) Wo befindet sich das erste Flugzeug nach zwei Stunden?
c) Wo befindet sich das zweite Flugzeug nach 30 Minuten?
d) Kreuzen sich die beiden Flugbahnen?
e) Welchen Abstand haben die beiden Flugzeuge nach einer Stunde?
f) Wie nah kommen sich die Flugzeuge im Extremfall? Wann ist das der Fall?

Lösung:
a) Im Prinzip stellen wir einfach eine Gerade zwischen zwei Punkten auf.

Flugzeug 1: $f_1: \vec{x} = (A) + r \cdot (\overrightarrow{AB}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Das war's auch schon für f_1.

Flugzeug 2: $f_2: \vec{x} = (C) + s \cdot (\overrightarrow{CD}) = \begin{pmatrix} -27 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix}$

Das war's leider noch nicht für f_2.

Leider muss man den Richtungsvektor noch durch 2 teilen, da die Strecke von C nach D innerhalb von *zwei* Stunden durchflogen wird und man immer pro einzelne Stunde rechnet.

$\Rightarrow \quad f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -27 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) Der Parameter der Geraden ist immer die Zeit, die das Flugzeug unterwegs ist. In dieser Aufgabe wird die Zeit in Stunden gemessen. Wenn man also wissen will, wo sich das erste Flugzeug nach zwei Stunden befindet, setzt man in die Gleichung vom ersten Flugzeug einfach für den Parameter die Zahl 2 ein.

Position von Flugzeug 1 nach 2 Stunden: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\11\\10\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\19\\18\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $F_1(-15|19|18)$

c) Das geht natürlich ähnlich wie Aufgabe b), allerdings geht es um Flugzeug 2 und nur eine halbe Stunde [also bitte nicht „30" in f_2 einsetzen, wir rechnen in Stunden!]
Man setzt also 0,5 [für eine halbe Stunde] in die Gerade f_2 ein.

Position von Flugzeug 2 nach ½ Stunde: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-27\\13\\3\end{pmatrix}+0{,}5\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-25\\12{,}5\\7\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $F_2(-25|12{,}5|7)$

d) Die Flugzeugbahnen kreuzen sich, wenn sich die beiden Geraden schneiden. Da es um die Flugzeug*bahnen* geht, brauchen wir zwei verschiedene Parameter, in der Gerade f_1 bleibt der Parameter also weiterhin „r", bei f_2 weiterhin „s".

$$f_1 = f_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -1 - 7r &= -27 + 4s \\ 11 + 4r &= 13 - 1s \\ 10 + 4r &= 3 + 8s \end{aligned}$$

Man erhält ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten. Wenn man die letzten zwei Gleichungen voneinander abzieht, fällt „r" weg.

II – III: $1 = 10 - 9s \Rightarrow -9=-9s \Rightarrow s=1$

s in II: $11 + 4r = 13 - 1\cdot 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow r=0{,}25$

Zur Probe setzt man r und s in die erste Gleichung ein.
[Die haben wir bisher nicht verwendet.]

r und s in I: $-1 - 7\cdot 0{,}25 = -27 + 4\cdot 1 \Leftrightarrow -2{,}75 = -23$

Man erhält einen Widerspruch. Die beiden Geraden schneiden sich nicht. (Sie sind windschief.)

$\Rightarrow$ Die beiden Flugbahnen kreuzen sich also nicht.

e) Um zu schauen, welchen Abstand die beiden Flugzeuge nach einer Stunde haben, schauen wir erst, wo sich die beiden Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt befinden, und rechnen dann den Abstand dieser beiden Punkte aus.

Flugzeug 1 nach einer Stunde: $f_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\11\\10\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\15\\14\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $F_1(-8|15|14)$

Flugzeug 2 nach einer Stunde: $f_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}-27\\13\\3\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-23\\12\\11\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $F_2(-23|12|11)$

Der Abstand der Flugzeuge ist der Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{F_1F_2}$.

$$\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}-23 - (-8)\\12 - 15\\11 - 14\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-15\\-3\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-15)^2+(-3)^2+(-3)^2} \approx 15{,}59$$

Nach einer Stunde haben die beiden Flugzeuge einen Abstand von 15,59 (LE).

f) Es geht um die Flugzeuge, nicht um die Flugbahnen, also verwenden wir in beiden Geradengleichungen *nur einen einzigen Parameter*. Für diesen Parameter können wir leider keine Zahl einsetzen, da wir, anders als in Teilaufgabe e), keinen Zeitpunkt kennen.
Desweiteren ist die Frage „Wie nah kommen sich die Flugzeuge im Extremfall?" im Prinzip eine Frage nach dem kleinsten Abstand der beiden Flugzeuge.

Wir schreiben also die Geradengleichung in Punktform um und erhalten die Position der beiden Flugzeuge [leider in Abhängigkeit von Parameter „t"].

$f_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ ⇒ Flugzeug 1 hat die Position $F_1(-1-7t|11+4t|10+4t)$

$f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -27 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ ⇒ Flugzeug 2 hat die Position $F_2(-27+4t|13-1t|3+8t)$

Der Abstand der Flugzeuge ist wieder der Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{F_1F_2}$.

$$\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} -27+4t & - & (-1-7t) \\ 13-1t & - & (11+4t) \\ 3+8t & - & (10+4t) \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -27+4t & + & 1+7t \\ 13-1t & - & 11-4t \\ 3+8t & - & 10-4t \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -26+11t \\ 2-5t \\ -7+4t \end{pmatrix}\right|$$
$$= \sqrt{(-26+11t)^2+(2-5t)^2+(-7+4t)^2}$$
$$= \sqrt{676-572t+121t^2+4-20t+25t^2+49-56t+16t^2}$$
$$= \sqrt{162t^2-648t+729}$$

Wir wollen jetzt allerdings den *kleinsten* Abstand der beiden Flugzeuge haben.
Also leiten wir diese tolle Formel ab und die Ableitung Null.

$d(t) = \sqrt{162t^2-648t+729}$ = [umschreiben] = $(162t^2-648t+729)^{0,5}$

$d'(t) = 0,5\cdot(162t^2-648t+729)^{-0,5}\cdot(324t-648)$ = [umschreiben]

$= \dfrac{0,5\cdot(324t-648)}{\sqrt{162t^2-648t+729}} = \dfrac{162t-324}{\sqrt{162t^2-648t+729}}$

$d'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{162t-324}{\sqrt{162t^2-648t+729}} = 0 \qquad |\cdot\text{Nenner}$

$\Rightarrow \quad 162t-324 = 0 \qquad |+324 \; |:162$

$t = 2$

⇒ Nach 2 Stunden wird der minimale Abstand erreicht
Die Flugzeuge kommen sich nach 2 Stunden am nächsten !

Den Abstand, den die Flugzeuge nach 2 Stunden voneinander haben, errechnet man, indem man t=2 in die Abstandsformel einsetzt.

$d(2) = \sqrt{162\cdot2^2-648\cdot2+729} = \ldots = 9 \qquad \Rightarrow$

Der minimale Abstand beträgt 9 (LE)

V.09.02 zweite Bewegungsaufgabe (∰) (**Aufgabe 2**)

An einem schönen Donnerstag um 8:00 sichtet eine Radarstation, welche sich im Koordinatenursprung befindet, im Punkt U ein Ufo, welches sich mit 14km/min in Richtung $\vec{u}$ fortbewegt. Praktisch zeitgleich wird ein Abfangjäger, welcher sich an Position A befindet, mit einer Geschwindigkeit 15km/min in Richtung $\vec{a}$ umgelenkt, um das Ufo zu erkunden.

Es sei: U(9|7|7) A(9|4|2) $\vec{u}=\begin{pmatrix}6\\3\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ (Koordinaten in km)

a) Stellen Sie eine Gleichung für die Flugbahnen der beiden Flugobjekte auf.

b) Wann und wo würde das Ufo auf dem Erdboden landen?

c) Weisen Sie nach, dass sich die beiden Flugbahnen in einem gemeinsamen Punkt S kreuzen.
In welchen zeitlichen Abstand treffen die beiden Flugobjekte im Punkt S ein?

d) Um wieviel Uhr trat das Ufo in die Atmosphäre ein, welche in einer Höhe von ca. 16km beginnt?
Wie weit ist es zu diesem Zeitpunkt vom Abfangjäger entfernt?

e) Wenn Ufo und Abfangjäger einen Abstand von weniger als 1,4 km haben, können sich beide Piloten sehen. Wieviel Sekunden lang ist das der Fall?

f) Zu welchem Zeitpunkt sind sich Abfangjäger und Ufo am nächsten?
Wie groß ist dieser Abstand?

Lösung:

a) Von beiden Flugobjekten kennen wir sowohl einen Stützvektor als auch einen Richtungsvektor, man könnte also die beiden Geraden aufstellen.

Ufo: $\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\7\\7\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\3\\-2\end{pmatrix}$ Abfangjäger: $\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\4\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

Allerdings stimmen die Richtungsvektoren dieser Geraden noch nicht, denn wir müssen noch die Geschwindigkeiten von Ufo und Flugzeug berücksichtigen.

Das Ufo hat einen Richtungsvektor von $\vec{u}=\begin{pmatrix}6\\3\\-2\end{pmatrix}$

↓ Ufo ↓

Der Betrag hiervon ist: $|\vec{u}| = \sqrt{6^2+3^2+(-2)^2} = 7$
Dieses entspräche einer Geschwindigkeit von 7 km/min.
Das Ufo soll jedoch eine Geschwindigkeit von 14km/min haben.
Daher muss der Richtungsvektor verdoppelt werden.

Damit ergibt sich für die Flugbahn des Ufos die Gerade: $u:\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\7\\7\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\3\\-2\end{pmatrix}$

Der Abfangjäger hat einen Richtungsvektor von $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

↓ Abfangjäger ↓

Der Betrag hiervon ist: $|\vec{a}| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$
Dieses entspräche einer Geschwindigkeit von 3 km/min.
Das Ufo soll jedoch eine Geschwindigkeit von 15km/min haben.
Daher muss der Richtungsvektor verfünffacht werden.

Damit ergibt sich für die Flugbahn des Jägers die Gerade: $a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) Der Erdboden hat eine Höhe von h=0.
Die Höhe wird immer von x_3 beschrieben.
Daher nehmen wir die x_3-Koordinate der Ufo-Geradengleichung und setzen diese Null. $x_3=0 \;\Rightarrow\; 7-4r=0 \;\Rightarrow\; r=1{,}75$
[Da der Parameter immer eine Zeit ist, bedeutet das Ergebnis hier eine Zeit von 1,75 min.]
Das Ufo landet nach 1,75min auf dem Erdboden. (Also nach 1min und 45sec.)

Wo landet das Ufo?
Wir setzen dafür r=1,75 wieder in die Gerade u ein [da wo r herkommt]:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + 1{,}75 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 \\ 10{,}5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 17{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Das Ufo landet nach 1,75min auf dem Erdboden im Punkt L(30|17,5|0).

c) Es geht um die Flugbahnen. Daher brauchen wir zwei verschiedene Parameter.
„Gemeinsamer Punkt" bedeutet eine Untersuchung auf Schnittpunkte.
Also setzen wir die beiden Geraden gleich.

$$\begin{array}{ccc} u & = & a \\ \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Man erhält ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten.
Wenn man die ersten beiden Gleichungen voneinander abzieht,
fällt sofort das „s" weg.

I – II: $2 + 6r = 5 \;\Rightarrow\; 6r = 3 \;\Rightarrow\; r=0{,}5$
r in I: $9+12\cdot 0{,}5=9+10\cdot s \;\Rightarrow \ldots \Rightarrow\; s=0{,}6$

Zur Probe setzt man r und s in die dritte Gleichung ein.
r und s in I: $7-4\cdot 0{,}5 = 2+5\cdot 0{,}6 \;\Leftrightarrow\; 5=5$
Man erhält eine wahre Aussage. Die beiden Geraden schneiden sich also.

Um den Schnittpunkt zu erhalten [welcher streng genommen eigentlich *nicht* gefragt ist], setzen wir r in die Gerade u ein [s in a ginge auch]:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad S(15|10|5)$$

Jetzt ist noch gefragt, in welchem zeitlichen Abstand die beiden Flugobjekte in S eintreffen. Dafür rufen wir uns in Erinnerung, dass die Parameter immer für eine Zeit stehen.
r=0,5 bedeutet also, dass das Ufo 0,5 (min) benötigt, um am Punkt S zu sein.
s=0,6 bedeutet dementsprechend, dass der Abfangjäger nach 0,6 (min) im Punkt S ist.
Die beiden treffen also im Abstand von 0,6–0,5=0,1 Minuten im Punkt S ein.
[0,1 Minuten sind übrigens 0,1·60=6 Sekunden]

d) Die erste Frage geht ähnlich wie Teilaufgabe b). Wir müssen wissen, wann sich das Ufo in einer Höhe von 16km befindet. Das bedeutet, dass die Höhe, also die x_3-Koordinate, den Wert 16 annehmen muss. Also nehmen wir wieder die unterste Zeile der Ufo-Gerade, welches ja die x_3-Koordinate ist und setzen diese gleich 16. Dadurch erhält man einen Wert für r. (Da der Parameter immer ein Zeitpunkt ist, haben wir auch schon sofort den Zeitpunkt.)

$$u \rightarrow \quad x_3 = 16$$

$$7-4r = 16 \quad \Rightarrow \quad -4r=9 \quad \Rightarrow \quad r=-2{,}25$$

Das Ufo trat <u>2,25 Minuten vor Beginn der Beobachtung</u> in die Atmosphäre ein.
Um zu schauen, wie weit Abfangjäger und Ufo voneinander sind, bestimmen wir zuerst die Punkte, an welchen sich beide zu diesem Zeitpunkt befinden.
Der Abfangjäger befindet sich im Punkt A, denn 2,25 Minuten *vor* Beobachtungsbeginn ist er noch nicht losgeflogen.

Das Ufo befindet sich im Punkt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} - 2{,}25 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} -18 \\ -6{,}5 \\ 14 \end{pmatrix}$

Nun bestimmt man den Abstand beider Punkte:

$$d = \left| \begin{pmatrix} -18 & - & 9 \\ -6{,}5 & - & 7 \\ 14 & - & 7 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -27 \\ -13{,}5 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-27)^2 + (-13{,}5)^2 + 7^2} \approx 31$$

Ufo und Abfangjäger waren <u>ca. 31 km voneinander entfernt.</u>

e) Es geht diesmal um die Flugobjekte selber, nicht um die Flugbahnen.
Wir brauchen also die gleichen Parameter für beide Geraden. Diese haben also die Form:

$$u : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Es geht um die Abstände der beiden Fluggeräte.
Also schreiben wir beide Geraden in Punktform um [mit dem Parameter „t“ drin]
und bestimmen dann Abstand Punkt-Punkt.

Ufo: $u : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = 9 + 12t \\ x_2 = 7 + 6t \\ x_3 = 7 - 4t \end{matrix} \Leftrightarrow U(9+12t|7+6t|7-4t)$

Abfangjäger: $a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = 9 + 10t \\ x_2 = 4 + 10t \\ x_3 = 2 + 5t \end{matrix} \Leftrightarrow A(9+10t|4+10t|2+5t)$

Der Abstand von U zu A berechnet sich über den Betrag des Vektors $\overrightarrow{UA}$

$$\overrightarrow{UA} = \begin{pmatrix} 9+10t & - & (9+12t) \\ 4+10t & - & (7+6t) \\ 2+5t & - & (7-4t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+10t & - & 9-12t \\ 4+10t & - & 7-6t \\ 2+5t & - & 7+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ -3+4t \\ -5+9t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ der Abstand } = \left|\overrightarrow{UA}\right| = \sqrt{(-2t)^2 + (-3+4t)^2 + (-5+9t)^2} \quad ^{(1)}$$

Was machen wir nun mit diesem Abstand?
Der Abstand soll nun kleiner als 1,4 km sein. Es muss also $\left|\overrightarrow{UA}\right| < 1{,}4$ gelten.

1 (Den Term unter der Wurzel könnte man, falls man Lust hat, noch zu $\sqrt{21t^2-34t+34}$ vereinfachen)

Berechnung:

$\sqrt{(-2t)^2+(-3+4t)^2+(-5+9t)^2} < 1{,}4$ Term unter der Wurzel vereinfachen

$\sqrt{4t^2+9-12t+16t^2+25-90t+81t^2} < 1{,}4$

$\sqrt{101t^2-114t+34} < 1{,}4$ $|\ (\ )^2$

$101t^2-114t+34 < 1{,}96$ $|-1{,}96$

$101t^2-114t+32{,}04 < 0$

Statt der Ungleichung mit dem „<" Zeichen, betrachten wir die zugehörige Gleichung mit dem „="

$101t^2-114t+32{,}04 = 0$

a-b-c-Formel oder p-q-Formel anwenden ...

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow t_1 \approx 0{,}53$ und $t_2 = 0{,}6$.

Setzt man in die Gleichung „$101t^2-114t+32{,}04$" für „t" Zahlen ein, die größer als 0,6 oder kleiner als 0,53 sind, erhält man positive Ergebnisse. Das wollen wir nicht.

Setzt man in die Gleichung „$101t^2-114t+32{,}04$" für „t" Zahlen ein, die zwischen 0,53 und 0,6 liegen, erhält man negative Ergebnisse. Das ist gesucht.

Der Bereich zwischen diesen Lösungen ist gesucht.

Die Antwort wäre also:

„Der Abstand der beiden Flugobjekte ist in der Zeit zwischen $t_1=0{,}53$ Minuten und $t_2=0{,}6$ Minuten kleiner als 1,4 km!"

f) Es geht wieder um den Abstand vom Ufo zum Abfangjäger, welchen wir in der letzten Teilaufgabe bereits berechnet haben.

$$|\overrightarrow{UA}| = \sqrt{101t^2-114t+34}$$

Dieser Abstand soll am kleinsten werden [die Flugobjekte sollen sich am nächsten sein!], also muss die Ableitung Null werden.

$$|\overrightarrow{UA}| = \sqrt{101t^2-114t+34} = (101t^2-114t+34)^{0,5}$$

Die Ableitung davon ist:

$$0{,}5\cdot(101t^2-114t+34)^{-0,5}\cdot(202t-114) = \frac{0{,}5\cdot(202t-114)}{(101t^2-114t+34)^{0,5}} = \frac{101t-57}{\sqrt{101t^2-114t+34}}$$

Die Ableitung Null setzen:

$\frac{101t-57}{\sqrt{101t^2-114t+34}} = 0$ $|\cdot\sqrt{101t^2-114t+34}$

$101t - 57 = 0$ $|+57$ $|:101$

$t = 0{,}564$

$\Rightarrow$ Die Flugzeuge sind sich nach 0,56 Minuten am nächsten.

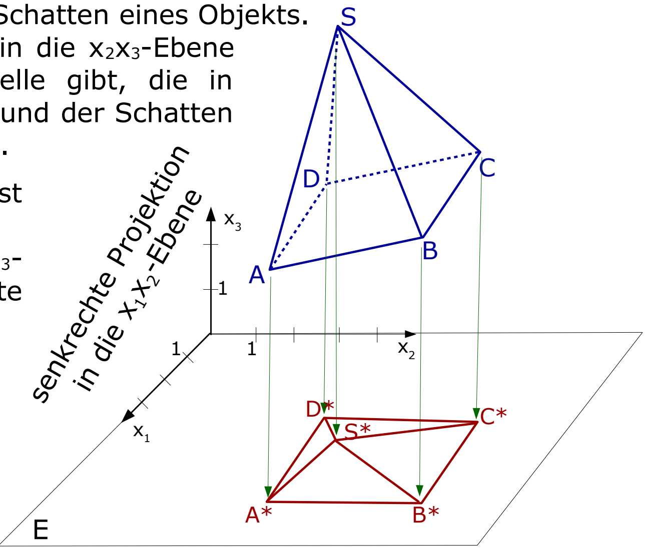
Den Abstand erhält man durch Einsetzen in die Abstandsformel

$$|\overrightarrow{UA}| = \sqrt{0{,}56^2-114\cdot0{,}56+34} \approx 1{,}35$$

Der y-Wert ist unser gesuchter Abstand $\Rightarrow$ Abstand = 1,35 (km)

V.09.03 senkrechte Projektion (∯)

Eine Projektion ist im Prinzip der Schatten eines Objekts. Eine Projektion von irgendetwas in die x_2x_3-Ebene bedeutet, dass es eine Lichtquelle gibt, die in Richtung der x_1-Achse Licht wirft und der Schatten des Objekts in die x_2x_3-Ebene fällt.



Die praktische Durchführung ist jedoch sehr einfach:

Bei einer Projektion in die x_2x_3-Ebene wird die x_1-Koordinate des Objekts Null.
Die x_2- und x_3-Koordinaten ändern sich nicht.

Bei einer Projektion in die x_1x_3-Ebene wird die x_2-Koordinate des Objekts Null.
Die x_1- und x_3-Koordinaten ändern sich nicht.

Bei einer Projektion in die x_1x_2-Ebene wird die x_3-Koordinate des Objekts Null.
Die x_1- und x_2-Koordinaten ändern sich nicht.

Aufgabe 3

Die Gerade $u : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ und der Punkt S(15|10|5) werden senkrecht in die x_1x_3-Ebene projiziert. Bestimmen Sie die Bildgerade und den Bildpunkt.

Aufgabe 4

Eine Telefonleitung verläuft entlang der Gerade $t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ein Hubschrauber im Punkt H(-8|12|6) bewundert sie abgöttisch.
Bestimmen Sie den Schatten der beiden Objekte, wenn die Sonne genau über den beiden im Zenit steht.

Lösung von Aufgabe 3:
Für den Fall, dass Sie nicht wissen, was ein Bild ist [„Bildgerade" oder „Bildpunkt"]:
Ein Urbild ist ein Ding mit dem man etwas macht. Mit dem macht man irgendetwas und das Ergebnis, das man rauskriegt ist dann das Bild.
Wenn Sie z.B. eine Gerade spiegeln: dann ist die ursprüngliche Gerade die Urbildgerade und die Spiegelgerade ist die Bildgerade.

Z.B. ist ein x-Wert damit ein Urbild, ein y-Wert ist das zugehörige Bild.

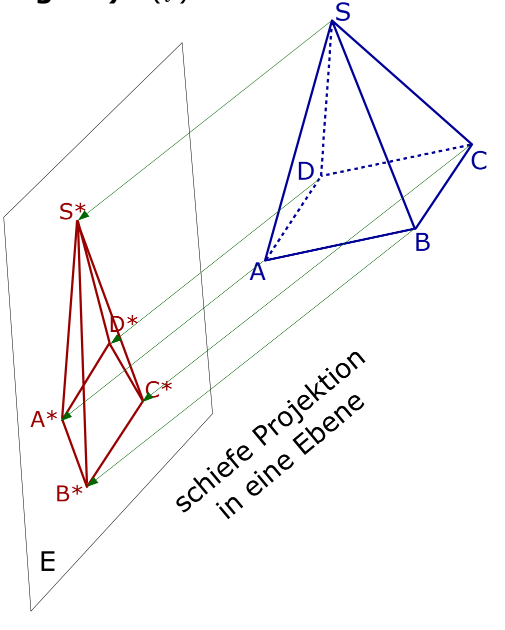
Jetzt zur Projektion:
Bei einer Projektion in die x_1x_3-Ebene wird die x_2-Koordinate Null.

Die Gerade $u: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ wird zu $u^*: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$,
der Punkt S(15|10|5) wird zu S*(15|0|5).

Lösung von Aufgabe 4:
Wenn die Sonne genau oben im Zenit steht, fällt das Licht von oben in x_3-Richtung und der Schatten des Ganzen fällt in die Bodenebene.
Es handelt sich damit um eine senkrechte Projektion in die x_1x_2-Ebene.
Die x_3-Koordinate wird Null. Jipiieeh!!
Der Schatten der Telefonleitung ist: $t^*: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Der Schatten des Hubschraubers sind H(-8|12|0). Boah. Toll. Suuperduper!

V.09.04 schiefe Projektion (Schattenaufgabe) (∯)

Bei einer schiefen Projektion fallen parallele Lichtstrahlen auf ein Objekt. Die Lichtstrahlen laufen weiter bis zu einer Ebene in welcher sie auftreffen. In dieser Ebene entsteht der Schatten.
Die Richtung der Projektion ist natürlich gleichzeitig der Richtungsvektor der Lichtstrahl-Geraden.
Vom Objekt auf das das „Licht" fällt, nimmt man jeden gegebenen Punkt.
Dieser Punkt ist der Stützvektor der Lichtstrahlgeraden. Zusammen mit dem Richtungsvektor kann man nun die Lichtstrahlgerade aufstellen [für jeden Punkt eine eigene Gerade!] und mit der Ebene schneiden.
Einfach aber leider oft langwierig.



Aufgabe 5

Die Pyramide ABCDS mit A(2|3|0), B(6|4|0), C(5|8|0), D(1|7|0) und S(3|6|8) wird durch eine schiefe Projektion in die x_1x_2-Ebene projiziert. Der Richtungsvektor der Projektion ist $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Koordinaten der Projektion.

Aufgabe 6

Das Dreieck PQR wird von Licht beschienen. Der Schatten des Dreiecks fällt in die Ebene $E: 2x_1+5x_2-3x_3=8$. Die Koordinaten von P, Q, R, P* sind gegeben mit P(6|4|2), Q(9|4|4), R(7|3|1) und P*(0|1|-1).
Bestimmen Sie die Koordinaten von Q* und R*.

Lösung von Aufgabe 5:
Die Punkte A, B, C und D muss man natürlich nicht in die x_1x_2-Ebene projizieren, denn die liegen schon in dieser Ebene.
Man muss also nur den Punkt S in die x_1x_2-Ebene projizieren. Die Richtung der Projektion ist der Vektor $\vec{u}$.
Also stellen wir eine Gerade auf, die den Punkt S als Stützvektor hat und den Vektor $\vec{u}$ als Richtungsvektor. Diese Gerade beschreibt übrigens den Lichtstrahl, der durch S geht und den Schatten davon in die x_1x_2-Ebene wirft.

Lichtstrahlgerade: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\6\\8\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$

Diese Gerade schneiden wir mit der x_1x_2-Ebene $[x_3=0]$.
Die x_3-Koordinate der Gerade ist $x_3=8+t\cdot 4 \Rightarrow 8+4t=0 \Rightarrow t=-2$

t=-2 in g einsetzen: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\6\\8\end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$ Projektionspunkt: $S^*(1|2|0)$

Lösung von Aufgabe 6:
Die Richtung der Projektion ist nicht gegeben. Man kann die aber einfach ausrechnen, da sowohl der Punkt P als auch seine Projektion P* gegeben sind.

Die Projektionsrichtung ist: $\vec{u} = \overrightarrow{PP^*} = \begin{pmatrix}0 - 6\\1 - 4\\-1 - 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-3\\-3\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

Projektion von Q:

Die „Lichtstrahlgerade“ g_1 hat Q als Stützvektor und $\vec{u}$ als Richtungsvektor.

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}9\\4\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. Die Gerade muss man mit der Ebene E schneiden [in diese Ebene E wird reinprojiziert, da fällt also der Schatten von Q hin].

g_1 in E: $2\cdot(9+2t)+5(4+t)-3(4+t)=8 \Rightarrow 18+4t+20+5t-12-3t=8 \Rightarrow\ldots\Rightarrow t=-3$

t=-3 in g_1 einsetzen: $\vec{x} = \begin{pmatrix}9\\4\\4\end{pmatrix} + (-3)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ $Q^*(3|1|1)$

Projektion von R:

Die „Lichtstrahlgerade“ g_2 hat R als Stützvektor und $\vec{u}$ als Richtungsvektor.

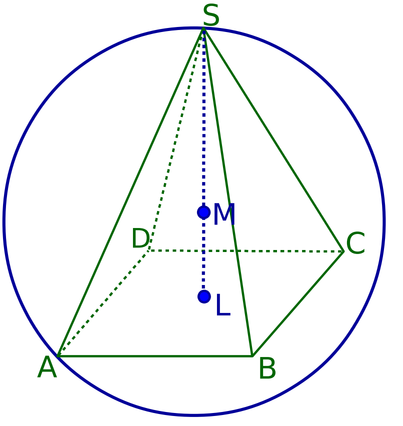
$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\3\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$. Die Gerade muss man ebenfalls mit der Ebene E schneiden.

g_2 in E: $2\cdot(7+2t)+5(3+t)-3(1+t)=8 \Rightarrow 14+4t+15+5t-3-3t=8 \Rightarrow\ldots\Rightarrow t=-3$

t=-3 in g_2 einsetzen: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\3\\1\end{pmatrix} + (-3)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow$ $R^*(1|0|-2)$

V.09.05 Umkugel (∯)

Eine Umkugel geht durch alle fünf Eckpunkte der Pyramide. Wie bei der Inkugel muss auch hier der Kugelmittelpunkt aus Symmetriegründen auf der „Mittelachse" liegen.
Wir werden also auch hier die Geradengleichung dieser Mittelachse [in der Zeichnung SL] aufstellen, dem Kugelmittelpunkt die Koordinaten der Geraden geben und dann einfach den Abstand vom Kugelmittelpunkt [in Abhängigkeit von „t"] zu zwei Eckpunkten berechnen. Wenn wir diese gleichsetzen, erhält man den gesuchten Mittelpunkt.
[Die Rechnung wird etwas kürzer als bei der Inkugel sein.]



Aufgabe 7 [einfaches Beispiel, Grundfläche liegt in der x_1x_2-Ebene] [siehe →Aufgabe 9]
Es seien die Eckpunkte folgender Pyramide gegeben:
A(8|2|0) B(8|8|0) C(2|8|0) D(2|2|0) und S(5|5|12).
Bestimme Mittelpunkt und Radius der Umkugel der Pyramide !

Aufgabe 8 [siehe →Aufgabe 10]
Es seien die Eckpunkte folgender Pyramide gegeben:
A(6|6|-14) B(12|14|10) C(20|-10|16) D(14|-18|-8) und S(37|4|-7).
Welcher Punkt hat von allen Eckpunkten der Pyramide den gleichen Abstand?
Bestimme diesen Abstand !

Lösung von Aufgabe 7:
Wir stellen die Geradengleichung der Mittelachse auf:
Dazu brauchen wir die Punkte S und den Mittelpunkt der Grundfläche L.

$$L = \frac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{c}) = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}8\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\8\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{L(5|5|0)}$$

$$g_{SL}: \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}5-5\\5-5\\12-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\12\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{M(5|5|12t)}$$

Der Abstand vom Kugelmittelpunkt zu zwei Eckpunkten [(1)] muss gleich sein [immer der Radius]. Wir berechnen daher die Abstände von M zu A und von M zu S.

$$d(M,A) = |\overrightarrow{AM}| = \left|\begin{pmatrix}5-8\\5-2\\12t-0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\3\\12t\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2+3^2+(12t)^2} = \sqrt{144t^2+18}$$

$$d(M,S) = |\overrightarrow{SM}| = \left|\begin{pmatrix}5-5\\5-5\\12t-12\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\12t-12\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+0^2+(12t-12)^2} = \sqrt{144t^2-288t+144}$$

---

1 Immer S und einen Punkt der Grundfläche nehmen!! Nie zwei Punkte aus der Grundfläche, also nie d(M,A)=d(M,B) ...

Die beiden Abstände gleich setzen:

$$d(M,A) \;=\; d(M,S)$$

$$\sqrt{144t^2+18} = \sqrt{144t^2-288t+144} \qquad |(\ )^2 \quad |-144t^2$$

$$18 = -288t+144 \quad \Rightarrow \quad t\approx 0{,}44 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M(5|5|5{,}28)}$$

$$r = d(M,A) = \sqrt{144\cdot 0{,}44^2+18} \approx 6{,}77 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r \approx 6{,}77}$$

Lösung von Aufgabe 8:

Wir stellen die Geradengleichung der Mittelachse auf [von der Spitze der Pyramide zum Mittelpunkt der Grundfläche]:

Dazu brauchen wir die Punkte S und den Mittelpunkt L der Grundfläche ABCD.

$$L = \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{a}+\vec{c}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}6\\6\\-14\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}20\\-10\\16\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}13\\-2\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L(13|-2|1)}$$

$$g_{SL}: \vec{x}=\begin{pmatrix}13\\-2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}13 & - & 37\\-2 & - & 4\\1 & - & (-7)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\-2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-24\\-6\\8\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M(13-24t|-2-6t|1+8t)}$$

Der Abstand vom Kugelmittelpunkt zu zwei Eckpunkten muss gleich sein [immer der Radius]. Wir berechnen daher die Abstände von M zu A und von M zu S.

$$d(M,A) = \left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\begin{pmatrix}13-24t & - & 6\\-2-6t & - & 6\\1+8t & - & -14\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}7-24t\\-8-6t\\15+8t\end{pmatrix}\right|$$

$$= \sqrt{(7-24t)^2+(-8-6t)^2+(15+8t)^2} = \ldots = \sqrt{676t^2+338}$$

$$d(M,S) = \left|\overrightarrow{SM}\right| = \left|\begin{pmatrix}13-24t & - & 37\\-2-6t & - & 4\\1+8t & - & -7\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-24-24t\\-6-6t\\8+8t\end{pmatrix}\right|$$

$$= \sqrt{(-24-24t)^2+(-6-6t)^2+(8+8t)^2} = \sqrt{676t^2+1352t+676}$$

Die beiden Abstände gleich setzen:

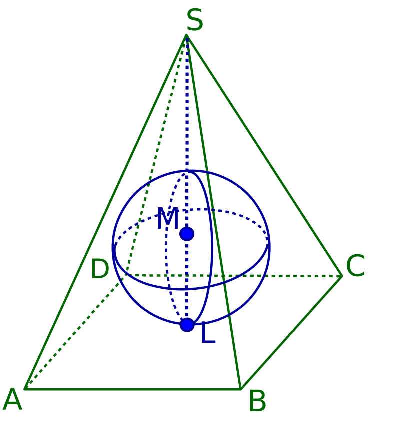
$$d(M,A) \;=\; d(M,S)$$

$$\sqrt{676t^2+338} = \sqrt{676t^2+1352t+676} \qquad |(\ )^2 \quad |-676t^2$$

$$338 = 1352t+676 \quad \Rightarrow \quad t=-0{,}25 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M(19|-0{,}5|-1)}$$

$$r = d(M,A) = \sqrt{676\cdot(-0{,}25)^2+338} = 19{,}5 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r = 19{,}5}$$

V.09.06 Inkugel (∯)



Es geht um folgende Frage:
Welcher Punkt hat von allen fünf Seiten der Pyramide den gleichen Abstand ?

Im Prinzip ist der Mittelpunkt der Inkugel gesucht, allerdings müssen Sie natürlich weder wissen, dass es die Inkugel ist, noch muss Ihnen auffallen, dass irgendwie eine Kugel im Spiel ist.

Da der Punkt zu aller vier Seitenflächen gleich weit entfernt ist, muss er [aus Symmetriegründen] auf der Mittelachse liegen, welche von der Spitze S zum Quadratmittelpunkt L geht.

→ Wir berechnen also die Geradengleichung der Mittelachse SL, haben dadurch die Koordinaten des Kugelmittelpunktes [in Abhängigkeit von „t"],

→ dann berechnen wir die Koordinatengleichung der Grundfläche ABCD und die Koordinatengleichung einer Seitenfläche.

→ Danach können wir mit HNF den Abstand vom Kugelmittelpunkt zur Grundfläche und den Abstand vom Kugelmittelpunkt zur Seitenfläche ausrechnen [in Abhängigkeit von „t"] und diese beiden dann gleichsetzen um „t" zu erhalten.

Aufgabe 9 [einfaches Beispiel, Grundfläche liegt in der x_1x_2-Ebene] [siehe →Aufgabe 7]

Es seien die Eckpunkte folgender Pyramide gegeben:
A(8|2|0) B(8|8|0) C(2|8|0) D(2|2|0) und S(5|5|12).
Bestimme denjenigen Punkt im Inneren der Pyramide, der von allen Pyramidenflächen gleich weit entfernt ist.
Wie groß ist dieser Abstand ?

Aufgabe 10 [siehe →Aufgabe 8]

Es seien die Eckpunkte folgender Pyramide gegeben:
A(6|6|-14) B(12|14|10) C(20|-10|16) D(14|-18|-8) und S(37|4|-7).
Bestimme Mittelpunkt und Radius der Inkugel dieser Pyramide.

Lösung von Aufgabe 9:
Wie bei der Umkugel auch, muss der Kugelmittelpunkt auf der Verbindungsgeraden von S zu L liegen. Wir werden uns daher die ganze Rechnung sparen und die Koordinaten einfach aus Aufgabe 7 übernehmen:

M(5|5|12t)

Die Koordinatengleichung von zwei Pyramidenflächen aufstellen:
E_{ABCD} : das ist die x_1x_2-Ebene, sie hat die Gleichung: $x_3=0$
Da wir den Lotfußpunkt bereits haben [siehe Aufgabe 7], können wir nachher statt $d(M,E_{ABCD})$ auch $d(M,L)$ bestimmen, ist ja der gleiche Abstand.

E_{ABS} : Wir bestimmen erst die Parameterform der Ebene und wandeln diese dann in Koordinatenform um.

$$E_{ABS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} B-A \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} S-A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Jetzt die Koordinatenform von E_{ABC} bestimmen:

[Die Methode, die man hierfür anwendet ist völlig egal. Ich verwende das Kreuzprodukt aus Kap. V.05.03]

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{matrix} 0 & -3 \\ 6 & 3 \\ 0 & 12 \\ 0 & -3 \\ 6 & 3 \\ 0 & 12 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot 12 - 0\cdot 3 \\ 0\cdot(-3) - 0\cdot 12 \\ 0\cdot 3 - 6\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ E_{ABS} : $4x_1+0\cdot x_2+1\cdot x_3=d$

[Stützvektor der Parameterform einsetzen]

$4\cdot 8+0+1\cdot 0=d \;\Rightarrow\; d=32 \qquad\Rightarrow\qquad E_{ABS}: 4x_1+x_3=32$

Die HNF von E_{ABS} bestimmen: $\dfrac{4x_1+x_3-32}{\sqrt{4^2+1^2}} = \dfrac{4x_1+x_3-32}{\sqrt{17}} = 0$

Wir bestimmen nun den Abstand von M zur Grundfläche ABCD und den Abstand von M zur Seitenfläche ABS und setzen beide Abstände gleich.

$$d(M,E_{ABCD}) = |\overrightarrow{LM}| = \left|\begin{pmatrix} 5 & - & 5 \\ 5 & - & 5 \\ 12t & - & 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12t \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+0^2+(12t)^2} = \sqrt{144t^2} = 12t$$

$d(M,E_{ABS})$: $M(5|5|12t)$ in E_{ABS}: $d(M,E_{ABS}) = \dfrac{|4\cdot 5+12t-32|}{\sqrt{17}} = \dfrac{|12t-12|}{\sqrt{17}}$

$$\begin{aligned} d(M,E_{ABCD}) &= d(M,E_{ABS}) \\ 12t &= \frac{|12t-12|}{\sqrt{17}} && |\;(\;)^2 \\ 144t^2 &= \frac{(12t-12)^2}{17} && |\cdot 17 \\ 2448t^2 &= 144t^2-288t+144 && |-144t^2+288t-144 \\ 2304t^2&+288t-144=0 && \text{ab hier p-q-Formel oder a-b-c-Formel} \end{aligned}$$

Man könnte den Betrag auch auflösen, indem man die „12" auf der linken Seite durch „±12" ersetzt. Quadrieren ist aber geschickter, weil dann auch die Wurzel aus dem Nenner wegfällt.

$\Rightarrow$ ... $\Rightarrow$ $t_1=0{,}195 \quad t_2=-0{,}32$

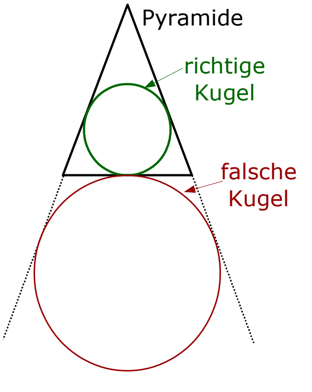
t_1 und t_2 in M einsetzen und dadurch zwei Mittelpunkte erhalten.

$t_1=0{,}195$ in M $\Rightarrow\ldots\Rightarrow$ $M_1(5|5|2{,}34)$ $\Rightarrow$ $r_1=d(M_1,L)=\ldots=2{,}34$

$t_2=0{,}195$ in M $\Rightarrow\ldots\Rightarrow$ $M_2(5|5|-3{,}85)$ $\Rightarrow$ $r_2=d(M_2,L)=\ldots= 3{,}85$

Warum erhält man eigentlich zwei Mittelpunkte ?

Wir haben den Mittelpunkt berechnet, indem wir „gefragt" haben, welche Punkte auf der Mittelachse liegen und von allen Pyramidenflächen den gleichen Abstand haben. Nun ist es der Rechnung herzlichst egal, ob dieser Mittelpunkt innerhalb oder außerhalb der Pyramide liegt. Da es nun eine Kugel außerhalb und eine innerhalb der Pyramide gibt, die alle Pyramidenflächen berührt [evtl auch die „verlängerte" Pyramidenflächen], kriegen wir zwei Lösungen.

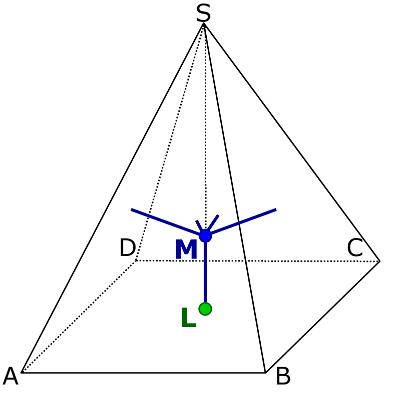


Die Kugel außerhalb der Pyramide ist immer größer als die innerhalb der Pyramide. Darum ist immer der

kleinere Radius mit dazugehörigem Mittelpunkt richtig.
Hier gilt: $r_1<r_2$, also sind r_1 und M_1 richtig. ⇒ **M(5|5|2,34) r=2,34**

Lösung von Aufgabe 10:
Wiederum muss der gesuchte Kugelmittelpunkt auf der Verbindungsgeraden von S zu L liegen. Wir werden uns daher die ganze Rechnung sparen und die Koordinaten einfach aus der Lösung von Aufgabe 8 übernehmen: ⇒ **M (13–24t|-2–6t|1+8t)**

Der Abstand vom gesuchten Mittelpunkt M zu einer Seitenfläche muss genau so groß sein, wie von M zu der Grundfläche.
Wir brauchen daher die Koordinatengleichungen der Grundfläche ABCD und einer Seitenfläche, z.B. der Seitenfläche ABS.



Die 5 dickeren Linien, die vom Punkt M ausgehen, stellen den Abstand zu den Flächen dar.

Koordinatengleichung der Grundfläche ABCD:

$$E_{ABCD}:\vec{x}=\begin{pmatrix}A\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}B-A\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}C-A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\\-14\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\8\\24\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}14\\-16\\30\end{pmatrix}$$

Koordinatenform von E_{ABC} bestimmen:
[Ohne besonderen Grund wähle ich diesmal die Methode der Umwandlung über das Skalarprodukt. Über's Kreuzprodukt geht natürlich auch.]

$$\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}6\\8\\24\end{pmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad 6n_1+8n_2+24n_3=0$$

$$\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}14\\-16\\30\end{pmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad 14n_1-16n_2+30n_3=0$$

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 6n_1+8n_2+24n_3=0 & |\cdot 2 \quad + \\ \text{II} & 14n_1-16n_2+30n_3=0 & \\ \hline & 26n_1 \quad\quad +78n_3=0 & \end{array}$$

wähle $n_3=1$ ⇒ $n_1=-3$

$n_1=-3$ und $n_3=1$ in I ⇒ $n_2=-0{,}75$

⇒ $E_{ABCD}: -3\cdot x_1-0{,}75\cdot x_2+1\cdot x_3=d$ Stützvektor der Parameterform einsetzen,

$-3\cdot 6-0{,}75\cdot 6+1\cdot(-14)=d$ ⇒ $d=-36{,}5$

⇒ $E_{ABCD}: -3\cdot x_1-0{,}75\cdot x_2+1x_3=-36{,}5$ $|\cdot(-4)$

⇒ $E_{ABCD}: 12x_1+3x_2-4x_3=146$

Für die spätere Abstandberechnung werden wir noch die HNF brauchen:

$$\text{HNF}: \frac{12x_1+3x_2-4x_3-146}{\sqrt{12^2+3^2+(-4)^2}}=\frac{12x_1+3x_2-4x_3-146}{13}=0$$

Koordinatengleichung der Seitenfläche ABS:

$$E_{ABS}:\vec{x}=\begin{pmatrix}A\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}B-A\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}S-A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\\-14\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\8\\24\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}31\\-2\\7\end{pmatrix}$$

Koordinatenform von E_{ABS} bestimmen:
[Auch diesmal verwende ich ohne einen besonderen Grund die Methode über das Skalarprodukt.]

$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 24 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6n_1+8n_2+24n_3=0$ $\qquad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 31 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 31n_1-2n_2+7n_3=0$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 6n_1+8n_2+24n_3 = 0 & + \\ \text{II} & 31n_1-2n_2+7n_3 = 0 & |\cdot 4 \\ \hline & 130n_1 \quad +52n_3 = 0 & \end{array}$$

wähle $n_3=130 \Rightarrow n_1=-52$

$n_1=-52$ und $n_3=130$ in I $\Rightarrow n_2=-351$

$\Rightarrow E_{ABS} : -52\cdot x_1-351\cdot x_2+130\cdot x_3=d$ Stützvektor der Parameterform einsetzen,

$-52\cdot 6-351\cdot 6+130\cdot(-14)=d \Rightarrow d=-4238$

$\Rightarrow E_{ABS} : -52x_1-351x_2+130x_3=-4238 \quad |:(-13)$

$\Rightarrow E_{ABS} : 4x_1+27x_2-10x_3=326$

Für die spätere Abstandberechnung werden wir noch die HNF brauchen:

$$\text{HNF} : \frac{4x_1+27x_2-10x_3-326}{\sqrt{4^2+27^2+(-10)^2}} = \frac{4x_1+27x_2-10x_3-326}{\sqrt{845}} = 0$$

Nun berechnen wir den Abstand von M zu den beiden Pyramidenflächen.
Beide Abstände werden dann gleichgesetzt.

$$d(M,E_{ABCD}) = \frac{|12\cdot(13-24t)+3\cdot(-2-6t)-4\cdot(1+8t)-146|}{13} = \frac{|-338t|}{13}$$

$$d(M,E_{ABS}) = \frac{|4\cdot(13-24t)+27\cdot(-2-6t)-10\cdot(1+8t)-326|}{\sqrt{845}} = \frac{|338-338t|}{\sqrt{845}}$$

$$d(M,E_{ABCD}) = d(M,E_{ABS})$$

$$\frac{|-338t|}{13} = \frac{|338-338t|}{\sqrt{845}} \qquad |:338$$

$$\frac{|-t|}{13} = \frac{|1-t|}{\sqrt{845}} \qquad |(\ )^2$$

$$\frac{t^2}{169} = \frac{1-2t+t^2}{845} \qquad |\cdot 169\cdot 845$$

$$845t^2 = 169-338t+169t^2 \qquad |-169t^2+338t-169$$

$$676t^2+338t-169 = 0$$

ab hier p-q-Formel oder a-b-c-Formel

$$\Rightarrow\ldots\Rightarrow \quad t_1\approx 0{,}31 \quad t_2\approx -0{,}81$$

Man könnte den Betrag auch auflösen, indem man auf die andere Seite ein $\pm$ schreibt, aber wenn ich quadriere, geht der Betrag auch weg (alles wird ja positiv) und man kriegt auch die Wurzel von $\sqrt{845}$ weg.

t_1 und t_2 in M einsetzen und dadurch die gesuchten Punkte erhalten.

$t_1=0{,}31$ in M $\Rightarrow M_1(5{,}56|-3{,}86|2{,}48) \Rightarrow d_1(M_1,E_{ABC}) =\ldots\approx 8{,}06$

$t_2=-0{,}81$ in M $\Rightarrow M_2(32{,}44|2{,}86|-5{,}48) \Rightarrow d_2(M_2,E_{ABC}) =\ldots\approx 21{,}04$

$d_1<d_2 \Rightarrow M_1$ liegt innerhalb der Pyramide, M_2 liegt außerhalb der Pyramide

$\Rightarrow$ **$M(5{,}56|-3{,}86|2{,}48)$ $\quad r=8{,}06$**