Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter
www.mathe-laden.de bestellen
(falls Sie das möchten).
Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht aus dem Internet herunter geladen werden können.
Dazu gehören:
Inhaltsverzeichnis, **Stichwortverzeichnis**,
und viele **Aufgaben zum Selberrechnen**.

Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.
Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

Sie können diese Datei gerne beliebig für den eigenen Gebrauch verwenden.
Nicht gestattet sind Änderungen sowie kommerzielle Nutzung.

matheseite

Die gute Seite an Mathe.

h[x]=
mathe-seite.de

V.08 Parameter

V.08.01 Ebenenscharen (∯)

Aufgabe 1

Gegeben sind die Ebenen E_t und F mit: $E_t: 2x_1+2x_2+tx_3=12$ und $F: x_1+x_2+3x_3=7$

a) Für welchen Wert von t sind E_t und F parallel?

b) Für welchen Wert von t ist E_t parallel zur x_3-Achse?

c) Für welchen Wert von t enthält E_t den Punkt $Q(2|-1|2)$?

d) Für welches $t\in\mathbb{R}^+$ bilden die Spurpunkte von E_t ein gleichseitiges Dreieck?

Aufgabe 2

Gegeben sind $E_t: 3x_1-2tx_2+4x_3=t+4$ und $g: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$.

a) Für welchen Wert von „t“ sind E_t und g parallel?

b) Prüfen Sie, ob E_t und g orthogonal sein können.

Aufgabe 3

Für welchen Wert von „t“ schneiden sich die Ebenen $E_t: 3x_1-2tx_2+4x_3=4$ und $F: 6x_1+2x_2+3x_3=12$ unter einem Winkel von 60°?

Lösung von Aufgabe 1:

a) E_t und F sind parallel, wenn ihre Normalenvektoren gleich sind [oder Vielfache].

Der Normalenvektor von E_t ist $\vec{n}_E=\begin{pmatrix}2\\2\\t\end{pmatrix}$, der von F ist $\vec{n}_F=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

Betrachtet man die ersten beiden Koordinaten, sieht man, dass $\vec{n}_E$ das Doppelte von $\vec{n}_F$ sein muss. $\Rightarrow$ $t=6$.

b) Eine Ebene ist parallel zur x_3-Achse, wenn die x_3-Koordinate verschwindet [siehe Kap. V.01.11, Aufg. 30 bis Aufg.37]. Es gilt also $t=0$.

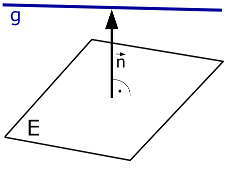
c) Ein Punkt liegt dann auf einer Ebene, wenn die Punktprobe stimmt.

Q in E_t einsetzen: $2\cdot2+2\cdot(-1)+t\cdot2=12 \Rightarrow \ldots \Rightarrow t=5$.

d) Die Spurpunkte von E_t sind: $S_1(6|0|0)$, $S_2(0|6|0)$ und $S_3\left(0\middle|0\middle|\frac{12}{t}\right)$.

Wenn man sich S_1 und S_2 anschaut, wird relativ schnell klar, dass die Spurpunkte dann ein gleichschenkliges Dreieck bilden, wenn der Spurpunkt S_3 in $(0|0|6)$ liegt. Es gilt also $\frac{12}{t}=6 \Rightarrow t=2$.

Lösung von Aufgabe 2:

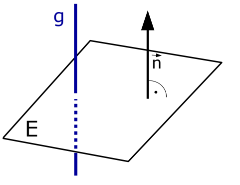


a) Eine Ebene und eine Gerade sind parallel, wenn sie entweder keinen Schnittpunkt haben [siehe Kap. V.08.04, Aufgabe 8 und Aufgabe 9] oder wenn der Normalenvektor der Ebene senkrecht auf dem Richtungsvektor der Gerade

steht.
Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt Null ist. Daher muss also das Skalarprodukt von Normalenvektor mit dem Richtungsvektor Null ergeben.

$3x_1-2tx_2+4x_3=t+4$ und $\begin{pmatrix}3\\-2t\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}=0 \Rightarrow 3\cdot(-2)+(-2t)\cdot1+4\cdot1=0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow t=-1$

b) Eine Gerade steht orthogonal [d.h. senkrecht] auf einer Ebene, wenn die Gerade [bzw. ihr Richtungsvektor] parallel zum Normalenvektor steht. Der Richtungsvektor muss ein Vielfaches des Normalenvektors sein.



$\Rightarrow \begin{pmatrix}3\\-2t\\4\end{pmatrix}=k\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}3=k\cdot(-2) & \Leftrightarrow & k=-1{,}5\\ -2t=k\cdot1 & \Leftrightarrow & k=-2t\\ 4=k\cdot1 & \Leftrightarrow & k=4\end{matrix}$

Die erste und dritte Zeile liefern unterschiedliche Werte für k. Das ist ein Widerspruch und bedeutet, dass es keine Lösung gibt. [Die zweite Zeile interessiert gar nicht.] $\Rightarrow$ g kann gar nicht senkrecht auf E_t stehen!

Lösung von Aufgabe 3:
Den Winkel zwischen zwei Ebenen berechnet man mit der Formel:

$\cos(\alpha)=\dfrac{|\vec{n}_1\circ\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_1|}$

[Hierbei sind $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ die Normalenvektoren der Ebenen, $\alpha=60°$]

Es gibt also:

$\cos(60°)=\dfrac{\left|\begin{pmatrix}3\\-2t\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\-2t\\4\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}\right|}=\dfrac{|2\cdot6+(-2t)\cdot2+4\cdot3|}{\sqrt{3^2+(-2t)^2+4^2}\cdot\sqrt{6^2+2^2+3^2}}=\dfrac{|24-4t|}{\sqrt{25+4t^2}\cdot7}$ [cos(60°)=0,5!]

$\Rightarrow 0{,}5=\dfrac{|24-4t|}{\sqrt{25+4t^2}\cdot7}$ quadrieren, um die Wurzel wegzukriegen

$0{,}25=\dfrac{(24-4t)^2}{(25+4t^2)\cdot49}$ $|\cdot(25+4t^2)\cdot49$

$0{,}25\cdot(25+4t^2)\cdot49=(24-4t)^2$ Klammern auflösen

$306{,}25+t^2=576-192t+16t^2$ $|-t^2-306{,}25$

$0=15t^2-192t+269{,}75$ p-q-Formel oder a-b-c-Formel anwenden

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow\ t_1\approx11{,}19\quad t_2\approx1{,}61$

V.08.02 Punkt einer Gerade mit bestimmten Abstand zu einer Ebene (∯)

Grundidee:
Wenn ein Punkt auf einer Gerade liegen soll, schreibt man diese Gerade in Punktform um und hat nun einen „Punkt" in Abhängigkeit von einem Parameter. Was eeecht totaahl cool ist.

Aufgabe 4

Welche Punkte der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ haben von $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6$ den Abstand 6?

Aufgabe 5

Die Grundfläche einer Pyramide ABCDS liegt in der Ebene $E: 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 12$.
Die Spitze der Pyramide liegt auf der Gerade $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Koordinaten der Pyramidenspitzen so, dass die Pyramide eine Höhe von $h=30$ hat.

Lösung von Aufgabe 4:
Alle Punkte, die auf der Geraden g liegen, haben die Koordinaten
$G(-2+4s|-4+4s|2-3s)$ [man liest die Gerade zeilenweise]
Nun sollen alle Punkte G von der Ebene E den Abstand 6 haben.
Abstand Punkt-Ebene berechnet man über HNF, also stellen wir die HNF von E auf.

HNF von E: $\dfrac{2x_1 + x_2 - 2x_3 - 6}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 0$

G in HNF einsetzen, um den Abstand zu erhalten.

$$d = \frac{|2\cdot(-2+4s) + (-4+4s) - 2\cdot(2-3s) - 6|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{|-4+8s-4+4s-4+6s-6|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|-18+18s|}{3}$$

Da der Abstand 6 sein soll, gilt:

$$6 = \frac{|-18+18s|}{3} \qquad |\cdot 3$$

$$18 = |-18+18s| \qquad \text{Betrag mit} \pm \text{auflösen}$$

$$\pm 18 = -18+18s$$

$+18 = -18+18s$	$-18 = -18+18s$
$36 = 18s$	$0 = 18s$
$2 = s_1$	$0 = s_2$

Setzt man s in die Gerade g ein, erhält man die Punkte.

$s_1 = 2$ in $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $P_1(6|4|-4)$

$s_2 = 0$ in $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $P_2(-2|-4|2)$

Lösung von Aufgabe 5:
Die Spitze der Pyramide liegt auf der Geraden s. Jeder Punkt von dieser Geraden hat die Form: $S(1+2v|1+2v|2+v)$.

Nun soll die Pyramide die Höhe h=30 haben, d.h. der Abstand von S zur Grundfläche E muss 30 sein.
Der Abstand von einem Punkt zu einer Ebene wird über HNF berechnet.

HNF von E: $\frac{4x_1+4x_2+2x_3-12}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}} = 0$

S in HNF einsetzen, um den Abstand zu erhalten.

$$d = \frac{|4\cdot(1+2v)+4\cdot(1+2v)+2\cdot(2+v)-12|}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}} = \frac{|4+8v+4+8v+4+2v-12|}{\sqrt{36}} = \frac{|18v|}{6} = |3v|$$

Da der Abstand 30 sein soll, gilt:

$30 = |3v|$

$+30 = 3v$ $\qquad$ $-30 = 3v$

$10 = v_1$ $\qquad$ $-10 = v_2$

Setzt man s in die Gerade g ein, erhält man die Punkte.

$v_1=10$ in s : $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+10\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\21\\12\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $S_1(21|21|12)$

$v_2=-10$ in s : $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}-10\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-19\\-19\\-8\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $S_2(-19|-19|-8)$

V.08.03 Punkt einer Gerade mit bestimmten Abstand zum Punkt (∯)

Aufgabe 6

Welche Punkte der Gerade $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\3\\-7\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ haben von A(7|8|7) den Abstand 39?

Aufgabe 7

Welche Punkte der Gerade $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\5\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$ haben von B(6|4|8) den Abstand 15?

Lösung von Aufgabe 6:
Auch hier schreiben wir die Gerade in Punktform um. Danach berechnen wir von diesen Geradenpunkt den Abstand zu A und setzen diesen gleich 39.
g in Punktform umschreiben: G(5+2r|3+2r|-7−r)
Den Abstand von G zum Punkt A berechnen.

$$d(A,G) = |\overrightarrow{AG}| = \left|\begin{pmatrix}5+2r & - & 7\\3+2r & - & 8\\-7-r & - & 7\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2+2r\\-5+2r\\-14-r\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2+2r)^2+(-5+2r)^2+(-14-r)^2}$$

$= \ldots = \sqrt{9t^2+225}$

$d(A,G)=39 \quad \Rightarrow \sqrt{9r^2+225}=39$

$\Rightarrow 9r^2+225=1521 \Rightarrow \ldots \Rightarrow r=\pm 12$

$r_1=12$ in G(5+2r|3+2r|-7−r) $\Rightarrow$ $P_1(29|27|-19)$

$r_2=-12$ in G(5+2r|3+2r|-7−r) $\Rightarrow$ $P_2(-19|-21|5)$

Lösung von Aufgabe 7:
Wir schreiben die Gerade in Punktform um. Danach berechnen wir von diesen Geradenpunkt den Abstand zu B und setzen diesen gleich 15.
h in Punktform umschreiben: H(-4−4t|5+4t|4+2t)
Den Abstand von H zum Punkt B berechnen.

$$d(B,H) = |\overrightarrow{BH}| = \left|\begin{pmatrix} -4-4t & - & 6 \\ 5+4t & - & 4 \\ 4+2t & - & 8 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -10-4t \\ 1+4t \\ -4+2t \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-10-4t)^2+(1+4t)^2+(-4+2t)^2}$$

$$= \ldots = \sqrt{36t^2+72t+117}$$

$d(B,H)=15 \quad \Rightarrow \sqrt{36t^2+72t+117}=15$

$\Rightarrow 36t^2+72t+117=225 \Rightarrow \ldots \Rightarrow t_1=1 \quad t_2=-3$

$t_1=1$ in H(-4−4t|5+4t|4+2t) ⇒ $P_1(-8|9|6)$
$t_2=-3$ in H(-4−4t|5+4t|4+2t) ⇒ $P_2(8|-7|-2)$

V.08.04 Schnitt Gerade-Ebene (∯)

Aufgabe 8

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E: x_1-2x_2+3x_3=4$

Bestimme die Parameter a und b so, dass
a) g und E parallel zueinander sind,
b) g in E enthalten ist,
c) g und E sich in einem Punkt schneiden !

Aufgabe 9

Gegeben sind $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $E: 2x_1+ax_2-2x_3=3a$

Bestimme die Parameter a und b so, dass
a) g und E parallel zueinander sind,
b) g in E enthalten ist,
c) g und E sich in einem Punkt schneiden !

Lösung von Aufgabe 8:
Wir setzen die Gerade in die Ebene ein:

$(a+3t) - 2(1+bt) + 3(3+t) = 4$
$a + 7 + 6t - 2bt = 4 \qquad |-a-7$
$t \cdot (6-2b) = -a-3$

Stellen Sie sich vor, wir hätten keine Parameter a und b. Dann würden wir nach „t" auflösen. Das machen wir jetzt auch hier, trotz Parameter.

Jetzt sind wir mit dem rechnerischen Teil schon fertig und können bereits alles sehen, was wir brauchen.
Im Normalfall ergibt diese Gleichung eine Lösung für t: $t = \frac{-a-3}{6-2b}$

h[x]= mathe-seite.de

Wir müssen uns aber auf jeden Fall noch überlegen, unter welchen Umständen diese Gleichung Sonderfälle [unendlich viele oder keine Lösung] liefert.

Eine Gleichung liefert unendlich viele Lösungen, wenn sie die Form „0=0" hat.
Die Gleichung „t·(6–2b)=-a–3" hat aber nur dann die Form „0=0",
wenn 6–2b=0 ist und wenn -a–3=0 ist. [6–2b=0 ⇒ b=3 und -a–3=0 ⇒ a=-3]
Wir folgern also, dass die Gleichung ∞-viele Lösung hat, wenn b=3 und a=-3.

Eine Gleichung liefert keine Lösungen, wenn sie die Form „0=NichtNull" hat.
Die Gleichung „t·(6–2b)=-a–3" hat aber nur die Form „0=NichtNull",
wenn 6–2b=0 ist und wenn -a–3≠0 ist. [6–2b=0 ⇒ b=3 und -a–3≠0 ⇒ a≠-3]
Wir folgern also, dass die Gleichung keine Lösung hat, wenn b=3 und a≠-3.

Zusammenfassung:
Für b=3 und a=-3 gibt es unendlich viele Lösungen, g liegt also in E.
Für b=3 und a≠-3 gibt es keine Lösung, g und E sind also parallel
Für b≠3 (alle anderen Fälle) gibt es eine Lösung, also einen Schnittpunkt.

Lösung von Aufgabe 9:
Natürlich schneiden wir g und E wieder und lösen nach „t" auf.

g in E: $2\cdot(3+t) + a\cdot(1+2t) - 2\cdot(b-t) = 3a$
$6+2t + a+2at - 2b+2t = 3a$ zusammenfassen
$6+4t+a-2b+2at = 3a$ | $-6-a+2b$
$4t+2at = 2a+2b-6$ ausklammern
$t\cdot(4+2a) = 2a+2b-6$ | $:(4+2a)$

Wie interpretieren wir dieses Ergebnis?
- g liegt in E, wenn es unendlich viele Lösungen gibt.
  Das ist der Fall, wenn die Gleichung die Form 0=0 hat, bei a=-2 und b=5
  [4+2a=0 ⇒ a=-2 und 2a+2b–6=0 ⇒...⇒ b=3–a=3–(-2)=5]
- g und E sind parallel, wenn es keine Lösung gibt.
  Das ist der Fall, wenn die Gleichung die Form 0=Zahl hat, bei a=-2 und b≠5
  [4+2a=0 ⇒ a=-2 und 2a+2b–6≠0 ⇒...⇒ b≠5]
- g und E haben einen Schnittpunkt, wenn es *eine* Lösung gibt.
  Das ist der Fall, wenn die Gleichung die Form Zahl·t=Zahl hat, bei a≠2.

V.08.05 Punkt einer Gerade bildet rechtwinkliges Dreieck (∯)

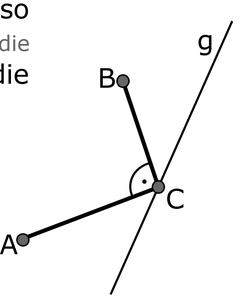
Aufgabe 10

Welcher Punkt der Gerade $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ bildet mit den Punkten A(4|3|5) und B(6|-5|3) ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB?

Aufgabe 11

Der Punkt T liegt auf $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$. Die Strecke AB mit A(2|3|4) und B(-1|-8|5) erscheint von T unter einem rechten Winkel. Bestimmen Sie die Koordinaten von T.

Lösung von Aufgabe 10:
Nennen wir den gesuchten Punkt „C“. Das Dreieck ABC muss also rechtwinklig sein, mit dem rechten Winkel in C [da AB ja die Hypotenuse ist]. Da C ein Punkt der Gerade g ist, schreiben wir die Gerade g in Punktform um. $\Rightarrow$ C(3+t|1+2t|-t)
Der Vektor $\overrightarrow{AC}$ muss also senkrecht auf $\overrightarrow{BC}$ stehen $\Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$



$$\overrightarrow{AC} = \vec{c}-\vec{a} = \begin{pmatrix}3+t & - & 4\\1+2t & - & 3\\-t & - & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+t\\-2+2t\\-5-t\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c}-\vec{b} = \begin{pmatrix}3+t & - & 6\\1+2t & - & (-5)\\-t & - & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3+t\\6+2t\\-3-t\end{pmatrix}$$

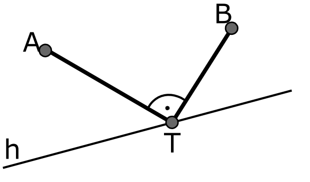
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-1+t\\-2+2t\\-5-t\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-3+t\\6+2t\\-3-t\end{pmatrix} = (-1+t)\cdot(-3+t)+(-2+2t)\cdot(6+2t)+(-5-t)\cdot(-3-t)$$

$$= 3-3t-t+t^2 - 12+12t-4t+4t^2 + 15+5t+3t+t^2 = 6t^2+12t+6$$

Wegen $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ folgt $6t^2+12t+6=0 \Rightarrow\ldots\Rightarrow t_{1,2}=-1$

t=-1 in g einsetzen $\Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ C(2|-1|1)

Lösung von Aufgabe 11:
Der Ausdruck „... die Strecke erscheint unter einem rechten Winkel...“ bedeutet, dass im Dreieck ABT der Winkel T 90° hat. Der Punkt T liegt auf der Geraden h, hat also die Koordinaten der Geraden: T(-1+2r|r|2−2r).
Der Vektor $\overrightarrow{AT}$ steht senkrecht auf $\overrightarrow{BT} \Rightarrow \overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{BT}=0$



$$\overrightarrow{AT} = \vec{t}-\vec{a} = \begin{pmatrix}-1+2r & - & 2\\r & - & 3\\2-2r & - & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3+2r\\-3+r\\-2-2r\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BT} = \vec{t}-\vec{b} = \begin{pmatrix}-1+2r & - & (-1)\\r & - & (-8)\\2-2r & - & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2r\\8+r\\-3-2r\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{BT} = \begin{pmatrix}-3+2r\\-3+r\\-2-2r\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2r\\8+r\\-3-2r\end{pmatrix} = (-3+2r)\cdot 2r+(-3+r)\cdot(8+r)+(-2-2r)\cdot(-3-2r)$$

$$= -6r+4r^2 - 24-3r+8r+r^2 + 6+4r+6r+4r^2 = 9r^2+9r-18$$

Wegen $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{BT}=0$ folgt $9r^2+9r-18=0 \Rightarrow\ldots\Rightarrow r_1=1 \vee r_2=-2$

r=1 in h $\Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $T_1(1|1|0)$

r=-2 in h $\Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-2\\6\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $T_2(-5|-2|6)$

V.08.06 Geradenschar (∯)

Aufgabe 12

a) Zeigen Sie, dass die Geradenschar $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2a\\1\\a+1\end{pmatrix}$ eine Ebene bildet.

Geben Sie eine Gleichung dieser Ebene an.

b) Für welchen Wert von a geht g_a durch den Punkt P(-1|4|3)?

c) Zeigen Sie, dass es keinen Wert für a gibt, für den g_a orthogonal auf die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}\pi\\e\\\sqrt{2}\end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ liegt.

Lösung von Aufgabe 12:

a) Kleiner Trick: das „a" steckt nur im Richtungsvektor.
Wir spalten den Richtungsvektor in zwei Vektoren auf: einer mit a, einer ohne.

$$\Rightarrow\ g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2a\\1\\a+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2a\\0\\a\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$ im mittleren Vektor „a" ausklammern

$$= \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} + t\cdot a\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$ „t·a" nennen wir irgendwie, z.B. „s"

$$= \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$ ← das ist eine Ebenengleichung

Wir erhalten eine Ebenengleichung.
Damit haben wir beide Fragen gleichzeitig beantwortet.

b) Immer wenn man prüfen will, ob ein Punkt auf einer Gerade liegen soll, setzt man den Punkt P für „$\vec{x}$" ein.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2a\\1\\a+1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} -1 &= 5+2a\cdot t \\ 4 &= 1+1\cdot t \\ 3 &= 3+(a+1)\cdot t \end{aligned} \Leftrightarrow 3=t \quad \begin{aligned} &\Leftrightarrow -1=5+2a\cdot 3 \Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow -1=a \\ \\ &\Leftrightarrow 3=3+(a+1)\cdot 3 \Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow -1=a \end{aligned}$$

Der Punkt P liegt für a=-1 auf der Geraden g.

c) Zwei Geraden stehen senkrecht aufeinander, wenn das Skalarprodukt der Richtungsvektoren Null ergibt.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2a\\1\\a+1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2a\cdot1+1\cdot3+(a+1)\cdot(-2)=0 \Leftrightarrow 2a+3-2a-2=0 \Leftrightarrow 1=0$$

Man erhält einen Widerspruch. Die beiden Geraden können nicht orthogonal sein, völlig unabhängig von „a".

V.08.07 Ebenenschar (∯)

Aufgabe 13

Bestimme die Parameter „a“ und „b“ so, dass die Ebenen
$E: 2x_1+ax_2-4x_3=5$ und $F: -x_1+4x_2+bx_3=8$ parallel sind !

Aufgabe 14

Sei $E: x_1+3x_2-2x_3=2$ und $F_k: (k+1)x_1+(2k+4)x_2+(-3-k^2)x_3=5-k$
Bestimme „k“ so, dass die Ebenen E und F identisch sind.

Lösung von Aufgabe 13:
Damit E und F parallel sind, müssen die beiden Normalenvektoren vielfach sein.

$$\vec{n}_E = v\cdot\vec{n}_F \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}2\\a\\-4\end{pmatrix} = v\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\b\end{pmatrix} \quad \begin{array}{lll} \Leftrightarrow\ -2=v & & \\ & \Leftrightarrow\ a=(-2)\cdot 4 & \Leftrightarrow\ a=-8 \\ & \Leftrightarrow\ -4=(-2)\cdot b & \Leftrightarrow\ b=2 \end{array}$$

Fertig!

Lösung von Aufgabe 14:
Damit die Ebenen identisch sind, müssen die Normalenvektoren Vielfache voneinander sein. Zusätzlich müssen die rechten Seiten dann auch passen [die gleichen Vielfache sein], aber darum kümmern wir uns erst am Schluss.

$$v\cdot\vec{n}_E = \vec{n}_F \quad\Leftrightarrow\quad v\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k+1\\2k+4\\-3-k^2\end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \Leftrightarrow\ 1\cdot v = k+1 & |\cdot(-3) \\ \Leftrightarrow\ 3\cdot v = 2k+4 & + \\ \Leftrightarrow\ -2\cdot v = -3-k^2 & \end{array}$$

$-3\cdot I+II \;\Rightarrow\; 0=-k+1 \;\Rightarrow\; k=1$

Wir haben zwar weder v berechnet, noch haben wir die Probe in der dritten Gleichung gemacht. Ist alles egal, denn wir setzen k in die Ebene F_k ein und gucken uns die beiden Ebenen an.

$$\begin{array}{ll} & E: \quad x_1+3x_2-2x_3=2 \\ k=1 \text{ in } & F_1: \; 2x_1+6x_2-4x_3=4 \end{array}$$

Beide Ebenen sind perfekt gleich [genau das Doppelte voneinander],
damit sind sie identisch.

V.08.08 Parameter bei Kugeln (∯)

Aufgabe 15

Es sei: $K_s: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2+2s\\1+2s\\1-3s\end{pmatrix}\right]^2 = 20s^2-44$ und die Ebene $E: 4x_1+2x_2-4x_3=6$

Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte aller Kugeln der Schar K_t auf einer Geraden liegen. Welche Kugel berührt die Ebene E ?

Aufgabe 16

Bestimmen Sie alle Kugeln, die mit der Ebene $E: 4x_1+2x_2-4x_3=6$ einen Schnittkreis bilden, welcher den Mittelpunkt in $M^*(1|5|2)$ und den Radius $r^*=4$ hat.

Lösung von Aufgabe 15:
Um zu zeigen, dass alle Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, schreiben wir die Koordinaten des Mittelpunkts hin und „ziehen" den Vektor auseinander.

$$M = \begin{pmatrix} 2+2s \\ 1+2s \\ 1-3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2s \\ 2s \\ -3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

← das ist die gesuchte Gerade. Gezeigt !

Wenn die Kugel K_s die Ebene E berührt, muss der Abstand vom Mittelpunkt zur Ebene gleich dem Radius sein. Also erst HNF von E ausrechnen.

$$HNF_E: \frac{4x_1+2x_2-4x_3-6}{\sqrt{4^2+2^2+(-4)^2}}=0 \Rightarrow \frac{4x_1+2x_2-4x_3-6}{6}=0$$

$$d(M,E) = \left|\frac{4\cdot(2+2s)+2\cdot(1+2s)-4\cdot(1-3s)-6}{6}\right| = \left|\frac{24s}{6}\right| = |4s|$$

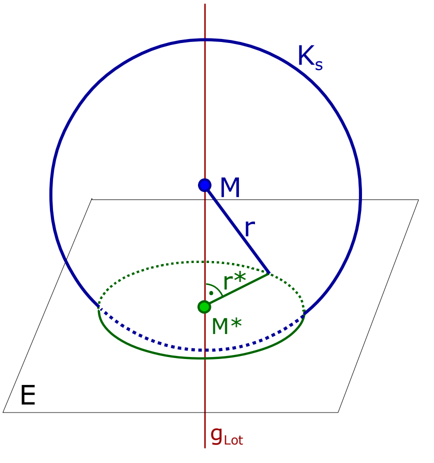
Da die Kugel die Ebene berührt, muss der Abstand gleich dem Radius sein.

$$\Rightarrow d(M,S)=r \Rightarrow 4s=\sqrt{20s^2-44} \quad |(\ )^2$$

$$16s^2=20s^2-44 \quad |-16s^2+44$$

$$44=4s^2 \Rightarrow s^2=11 \Rightarrow s=\pm\sqrt{11}$$

Lösung von Aufgabe 16
Sie müssen sich etwas klar machen:
Die Mittelpunkte aller Kugeln, die mit einer Ebene den gleichen Schnittkreis gemeinsam haben, liegen alle auf der Lotgeraden, die senkrecht auf E steht und durch den Mittelpunkt des Schnittkreises gehen.



$$g_{Lot}: \vec{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow M(1+4s|5+2s|2-4s)$$

Den Radius der Kugel kann man über Pythagoras berechnen:

$$r^2 = (r^*)^2 + d(M,M^*)^2$$

$$d(M^*,M) = |\overrightarrow{M^*M}| = \left|\begin{pmatrix} 1+4s & - & 1 \\ 5+2s & - & 5 \\ 2-4s & - & 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4s \\ 2s \\ -4s \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(4s)^2+(2s)^2+(-4s)^2} = 6s$$

$$r^2 = (r^*)^2+d(M,M^*)^2 \Rightarrow r^2=4^2+(6s)^2=36s^2+16$$

$\Rightarrow$ **Alle gesuchten Kugeln haben die Form:** $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix} 1+4s \\ 5+2s \\ 2-4s \end{pmatrix}\right]^2 = 36s^2+16$