Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter **www.mathe-laden.de** bestellen (falls Sie das möchten).
Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht aus dem Internet herunter geladen werden können.
Dazu gehören:
Inhaltsverzeichnis, **Stichwortverzeichnis**,
und viele **Aufgaben zum Selberrechnen**.

Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.
Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

matheseite
Die gute Seite an Mathe.

V.07 Pyramide

K

V.07.01 Ebene mit Koordinatenebenen (∯)

Wenn eine schiefliegende [=beliebige] Ebene die drei Koordinatenebenen schneidet, entsteht auch eine Pyramide. (Nämlich eine dreiseitige Pyramide.) Nett ist hierbei, dass man zwischen drei Kanten [den Koordinatenachsen] rechte Winkel hat.
Das einzig Doofe, was man machen kann, ist dabei die Ebene E als Pyramidengrundfläche zu nehmen und den Ursprung als Pyramidenspitze.
[In der Zeichnung ➘ wäre das, das Dreieck $S_1S_2S_3$ als Grundfläche zu nehmen]
Geschickt ist folgenden Methode: man nimmt z.B. das (rechtwinklige) Dreieck S_1S_2O als Grundfläche und S_3 als Pyramidenspitze.

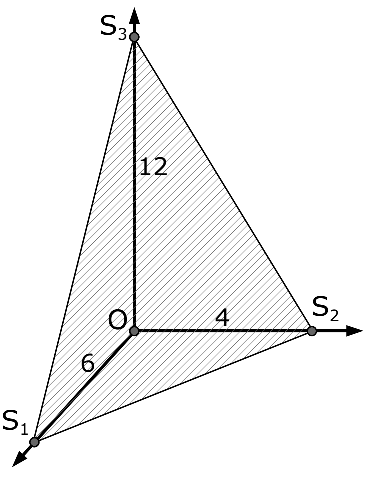
Aufgabe 1
Die Ebene E : $2x_1+3x_2+x_3=12$ bildet mit den Koordinatenachsen eine Pyramide. Bestimme ihr Volumen!

Lösung:
Zuerst bestimmen wir die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen [die Eckpunkte unserer Pyramide]. Das sind die drei Spurpunkte der Ebene $S_1(6|0|0)$ $S_2(0|4|0)$ und $S_3(0|0|12)$ und dann natürlich noch der Koordinatenursprung $O(0|0|0)$.
Wenn wir also tatsächlich das Dreieck S_1S_2O als Grundfläche nehmen, ist das ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten die Länge 6 bzw. 4 haben.
Die Grundfläche der Pyramide ist also:

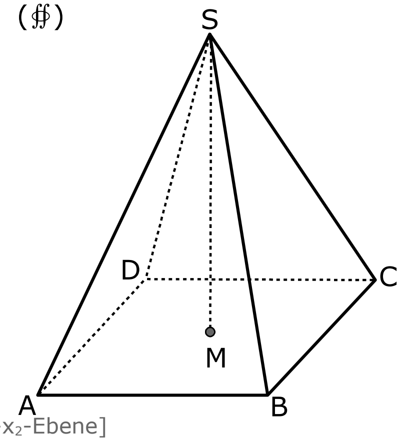
$$\text{Gfl} = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4 = 12$$

Die Höhe der Pyramide hat die Länge 12, sie ist nämlich der Abschnitt auf der x_3-Achse.
Damit gilt für das Pyramidenvolumen:

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3}\cdot \text{Gfl}\cdot H = \frac{1}{3}\cdot 12\cdot 12 = 48$$



V.07.02 senkrechte quadratische Pyramide (∯)



Erstens: **Was genau ist überhaupt eine senkrechte, quadratische Pyramide ?**

Eine quadratische Pyramide hat als Grundfläche natürlich ein Quadrat.
Bei einer senkrechten Pyramide ist die Spitze genau über der Mitte des Quadrats. Dadurch wird die Pyramide symmetrisch. Das macht vieles einfacher.
[Egal, was von einer Seitenfläche gefragt ist, man muss normalerweise nur *eine* berechnen, da sie ja aus Symmetriegründen alle gleich sind.]

Aufgabe 2 [billiges Beispiel, die Grundfläche liegt in der x_1-x_2-Ebene]

Eine quadratische Pyramide ist durch die Punkte A(8|0|0), B(8|8|0), C(0|8|0) und D(0|0|0) gegeben. Die Pyramide ist 12m hoch.
Bestimme die Koordinaten der Pyramidenspitze, das Volumen, sowie die Oberfläche der Pyramide ! [→ siehe auch Bsp.10]

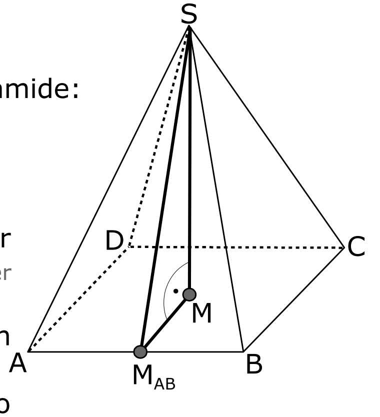
Lösung:
Die Spitze der Pyramide liegt ja genau 12m über dem Mittelpunkt. Also berechnen wir den Mittelpunkt des Quadrats und gehen dann 12 nach oben, in x_3-Richtung.

$$M_{Quadrat} = M_{AC} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{c}) = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{M(4|4|0)}$$

Die Spitze liegt 12 weiter oben, hat also die Koordinaten: **S(4|4|12)**

<u>Volumen</u>:
Die Grundfläche der Pyramide ist ein Quadrat, es gilt:
Grundfläche = $a^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = 8^2$ [1]
Damit berechnet sich das Volumen unserer lieben Pyramide:

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3}\cdot Gfl\cdot H = \frac{1}{3}\cdot 8^2\cdot 12 = 256$$



<u>Oberfläche</u>:
Die Oberfläche der Pyramide setzt sich aus einer Grundfläche [ein Quadrat] und vier Seitenflächen [vier identische Dreiecke] zusammen.
Die Grundfläche haben wir schon weiter oben berechnet: $Gfl = |\overrightarrow{AB}|^2 = 8^2 = 64$
Die Seitenflächen sind alle gleich gebaut, es reicht also die Fläche vom Dreieck ABS zu berechnen.

$$A_{ABS} = \frac{1}{2}\cdot Grundlinie\cdot Höhe = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{SM_{AB}}|$$

Die Länge von $|\overrightarrow{SM_{AB}}|$ haben wir noch nicht, den Mittelpunkt M_{AB} der Strecke AB, haben wir auch noch nicht.

---

1 Normalerweise müsste man |AB| *berechnen*, hier kann man die Seitenlänge jedoch ablesen

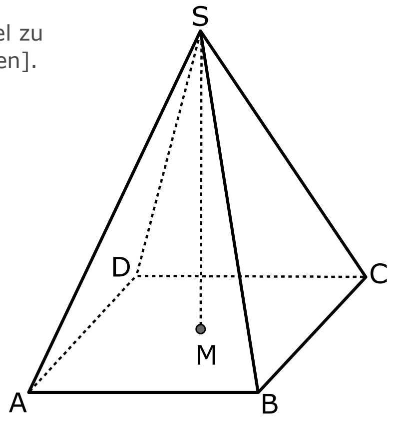
$$M_{AB} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\8\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}8\\4\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{M_{AB}(8|4|0)}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{SM_{AB}}\right| = \left|\left(M_{AB}-S\right)\right| = \left|\begin{pmatrix}8 & - & 4\\4 & - & 4\\0 & - & 12\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\0\\-12\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2+0^2+(-12)^2} \approx 12,65$$

$$\Rightarrow \quad A_{ABS} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SM_{AB}}\right| = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12,65 = 50,60$$

$$\Rightarrow \quad O_{ges} = Gfl_{Quadrat} + 4\cdot A_{ABS} = 64 + 4\cdot 50,6 \approx 266,4 \ \ (LE^2)$$

Aufgabe 3 [eher unschönes Beispiel, keine Fläche ist parallel zu irgendeiner Koordinatenebene, man kann gar nichts ablesen].



Eine senkrechte, quadratische Pyramide ist durch die Punkte A(3|4|7) B(4|-5|3) C(-1|-2|-5) und S(13|5|-5) gegeben.

Bestimmen Sie die Koordinaten des vierten Quadratpunktes D.

Bestimmen Sie Oberfläche und Volumen der Pyramide.

Lösung:

Koordinaten von D:

Es gilt ja: $\vec{d} = \vec{a}+\overrightarrow{BC} =$

(in der unmathematischen Schreibweise: $D = A+\overrightarrow{BC}$) [die Theorie finden Sie unter: V.05.04]

$$\Rightarrow \quad \vec{d} = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & - & 4\\-2 & - & -5\\-5 & - & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\7\\-1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{D(-2|7|-1)}$$

Volumen der Pyramide: $V_{Pyr} = \frac{1}{3}\cdot Gfl\cdot H$

Die Grundfläche ist ein Quadrat, wir brauchen also nur dessen Seitenlänge:

$$\Rightarrow \quad a = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix}4 & - & 3\\-5 & - & 4\\3 & - & 7\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\-9\\-4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{98} \approx 9,90 \qquad \Rightarrow \ \mathbf{Gfl = a^2 = 98}$$

Die Höhe kann man entweder als Abstand Punkt-Ebene berechnen, das wäre dann der Abstand von S zur Grundfläche ABCD. Allerdings müssten wir dann noch die Koordinatengleichung der Ebene ABC aufstellen [für die HNF] blablablah... Auf jeden Fall dauert es länger, als wenn wir einfach den Abstand von S zur Mitte des Quadrats errechnen.

$$M = \frac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{c}) = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\-5\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad M(1|1|1)$$

$$\Rightarrow \ H = d(S,M) = \left|\overrightarrow{SM}\right| = \left|\begin{pmatrix}1 & - & 13\\1 & - & 5\\1 & - & -5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-12)^2+(-4)^2+6^2} = 14$$

$$\Rightarrow \quad V_{Pyr} = \frac{1}{3}\cdot Gfl\cdot H = \frac{1}{3}\cdot 98\cdot 14 \approx 457,33 \ (LE^3)$$

Oberfläche der Pyramide: $O = A_{ABCD} + 4 \cdot A_{ABS}$

$A_{ABCD} = 98$ haben wir bereits für's Volumen berechnet, also brauchen wir noch A_{ABS}.

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{SM_{AB}}|$$

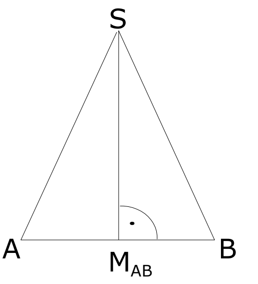
Wir wissen: $|\overrightarrow{AB}| = 9{,}9$ [s.oben]

$$M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -0{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{AB}(3{,}5|-0{,}5|5)$$

$$|\overrightarrow{SM_{AB}}| = \left| \begin{pmatrix} 3{,}5 & - & 13 \\ -0{,}5 & - & 5 \\ 5 & - & -5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -9{,}5 \\ -5{,}5 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-9{,}5)^2 + (-5{,}5)^2 + 10^2} \approx 14{,}85$$

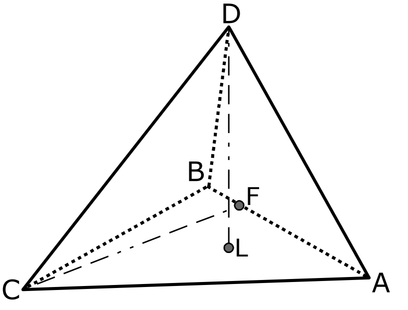
$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{SM_{AB}}| = \frac{1}{2} \cdot 9{,}9 \cdot 14{,}85 \approx 73{,}51$$

$\Rightarrow O = 98 + 4 \cdot 73{,}51 \approx 392$



V.07.03 Volumen einer dreiseitigen Pyramide (normal) (∮)

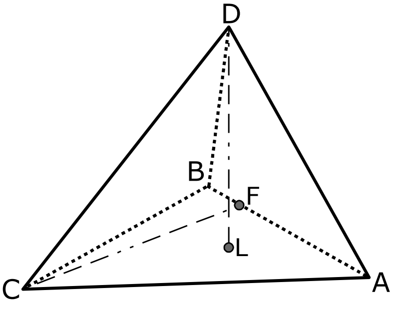
In einer beliebigen dreiseitigen Pyramide tauchen sehr viele Grundlagenberechnungen auf. Man muss meistens nur das Volumen berechnen [und nicht die Oberfläche]. Ist aber aufwändig genug. Vermutlich wird man diese Aufgabe nie in einer Abi-Aufgabe sehen. Ab und zu taucht sie jedoch in Klassenarbeiten auf und wie gesagt... es sind Grundlagen, die jede(r) beherrschen sollte.



$$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot Gfl \cdot H \qquad Gfl = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

Nehmen wir das Dreieck ABC als Grundfläche, dann ist D die Spitze der Pyramide. Die Pyramidenhöhe H ist also der Abstand von der Ebene E_{ABC} zum Punkt D (⇒HNF).
Um die Fläche des Dreiecks ABC [A=½·g·h] zu berechnen, könnte man AB als Grundlinie nehmen, dann wäre der Abstand von A zu B die Grundlinie g [Abstand Punkt-Punkt]. Die Höhe des Dreiecks h ist dann der Abstand von C zur Geraden g_{AB}.

Aufgabe 4 [siehe auch Aufgabe 5]
Eine dreiseitige Pyramide ist durch die Punkte A(2|-2|0) B(-2|10|6) C(-3|6|-3) und D(7|5|1) gegeben.
Bestimme das Volumen der Pyramide.



Lösung:
Das Volumen der Pyramide berechnet man über

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot Gfl \cdot H,$$

wobei Gfl die Grundfläche ABC ist und H die Höhe der Pyramide, also der Abstand von der Ebene ABC zur Spitze D.

Die Grundfläche ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC, welchen man über die Formel $Gfl = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h$ berechnet.

Hierbei könnte g die Länge des Seite AB sein und h der Abstand von C zur Gerade AB.

$$g = |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} -2 & - & 2 \\ 10 & - & -2 \\ 6 & - & 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2+12^2+6^2} = 14$$

h:

Wir stellen die Lotebene auf, die senkrecht zu AB steht und durch C geht. Die schneidet man mit der Geraden g_{AB}. Dann bestimmen wir den Abstand von diesem Schnittpunkt F zur Dreieckspitze C.

E_{Lot} : Der Normalenvektor von E_{Lot} ist der Richtungsvektor von g_{AB}. Also erst g_{AB} aufstellen.

$$g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -2 & - & 2 \\ 10 & - & -2 \\ 6 & - & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow E_{Lot}: -4x_1+12x_2+6x_3 = d$ C in E_{Lot} einsetzen

$-4\cdot(-3)+12\cdot 6+6\cdot(-3)=d \Rightarrow d=66 \Rightarrow E_{Lot}: -4x_1+12x_2+6x_3=66$

$g_{AB}\cap E_{Lot}: -4\cdot(2-4t)+12\cdot(-2+12t)+6\cdot(6t)=66$

$-32+196t=66 \Rightarrow t=0{,}5$

$$t \text{ in } g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow F(0|4|3)$$

$$\Rightarrow h_{AB} = |\overrightarrow{FC}| = \left|\begin{pmatrix} -3 & - & 0 \\ 6 & - & 4 \\ -3 & - & 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = 7$$

$$\Rightarrow Gfl = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}\cdot h_{AB} = \frac{1}{2}\cdot 14\cdot 7 = 49$$

Gfl = 49

Die Pyramidenhöhe ist der Abstand von D zur Ebene E_{ABC}.

Dumm ist natürlich, dass wir die Ebenengleichung von E_{ABC} noch nicht haben.

Also erst Parameterform aufstellen, dann die Koordinatenform.

$$E_{ABC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} B-A \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} C-A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform von E_{ABC} bestimmen:

Variante über Skalarprodukt:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -4n_1+12n_2+6n_3=0$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -5n_1+8n_2-3n_3=0$$

$$\begin{aligned} -4n_1+12n_2+6n_3 &= 0 \\ -5n_1+8n_2-3n_3 &= 0 \quad | \cdot 2 \\ \hline -14n_1+28n_2 \quad &= 0 \end{aligned}$$

wähle $n_2=1 \Rightarrow n_1=2$

$n_2=1$ und $n_1=2$ in eine Gleichung $\Rightarrow n_3=-{}^2/_3$

Variante über Kreuzprodukt:

$$\begin{array}{cc} -4 & -5 \\ 12 & 8 \\ 6 & -3 \\ -4 & -5 \\ 12 & 8 \\ 6 & -3 \end{array}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 12\cdot(-3) - 6\cdot 8 \\ 6\cdot(-5) - (-4)\cdot(-3) \\ -4\cdot 8 - 12\cdot(-5) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -84 \\ -42 \\ 28 \end{pmatrix} \widehat{=}[\text{gekürzt}]\widehat{=} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2/3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow E_{ABC}: 6\cdot x_1+3\cdot x_2-2\cdot x_3=d$ Stützvektor der Parameterform einsetzen,

$6\cdot 2+3\cdot(-2)-2\cdot 0=d \Rightarrow d=6$

$\Rightarrow E_{ABC}: 6\cdot x_1+3\cdot x_2-2\cdot x_3=6$

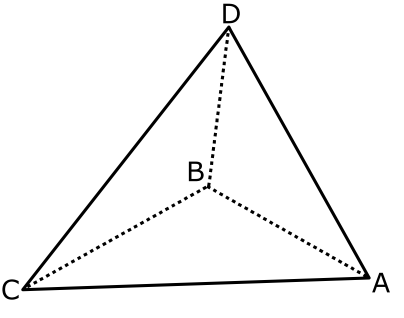
Nun können wir den Abstand von D zur Ebene E_{ABC} ausrechnen.

HNF von E_{ABC} ausrechnen: $\frac{6x_1+3x_2-2x_3-6}{\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}} = \frac{6x_1+3x_2-2x_3-6}{7} = 0$

$H_{Pyr} = d(D,E_{ABC}) = (\text{D in HNF einsetzen}) = \left|\frac{6\cdot 7+3\cdot 5-2\cdot 1-6}{7}\right| = 7$

Jetzt sind wir fertig. $V_{Pyr} = \frac{1}{3}\cdot Gfl\cdot H = \frac{1}{3}\cdot 49\cdot 7 \approx 114{,}33\ (LE^3)$

V.07.04 Volumen einer dreiseitigen Pyramide (über Kreuzprodukt)



Das Volumen einer dreiseitigen Pyramide kann auch einfacher berechnet werden als im letzten Kapitel. Man benutzt dazu die Formel:

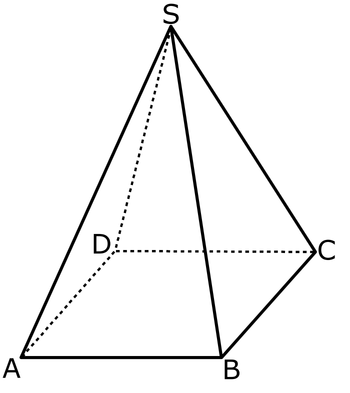
$$\boxed{\mathbf{V_{Pyr} = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\circ\overrightarrow{AD}\right|}}$$ ← dreiseitige Pyramide

[Man beginnt in einem beliebigen Eckpunkt und verwendet alle drei Vektoren, die von diesem Eckpunkt ausgehen.]

Natürlich könnte man auch die Formeln

$V_{Pyr} = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right)\circ\overrightarrow{BD}\right|$ oder $V_{Pyr} = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\right)\circ\overrightarrow{CD}\right|$

verwenden.



Bemerkung:

Das Volumen einer quadratischen Pyramide kann man mit einer ähnlichen Formel bestimmen:

$$\boxed{\mathbf{V_{Pyr} = \frac{1}{3}\cdot\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)\circ\overrightarrow{AS}\right|}}$$ ← quadratische Pyramide

Aufgabe 5 [siehe auch Aufgabe 4]

Eine dreiseitige Pyramide ist durch die Punkte A(2|-2|0) B(-2|10|6) C(-3|6|-3) und D(7|5|1) gegeben. Bestimme das Volumen der Pyramide.

Lösung:

Das Volumen der Pyramide kann man über $V_{Pyr} = \frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\circ\overrightarrow{AD}\right|$ berechnen.

In unserem Fall gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechnung von $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$: $\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 12\cdot(-3) & - & 6\cdot 8 \\ 6\cdot(-5) & - & (-4)\cdot(-3) \\ (-4)\cdot 8 & - & 12\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -84 \\ -42 \\ 28 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad V_{Pyr} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right) \circ \overrightarrow{AD} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} -84 \\ -42 \\ 28 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| (-84) \cdot 5 + (-42) \cdot 7 + 28 \cdot 1 \right| = \frac{1}{6} \cdot 686 \approx \mathbf{114{,}33}$$