Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter **www.mathe-laden.de** bestellen (falls Sie das möchten).
Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht aus dem Internet herunter geladen werden können.
Dazu gehören:
Inhaltsverzeichnis, **Stichwortverzeichnis**,
und viele **Aufgaben zum Selberrechnen**.

Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.
Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

matheseite
Die gute Seite an Mathe.

V.06 Kreise und Kugeln

In Kapitel V.06.01–V.06.06 werden Kreise beschrieben. Diese sind derzeit in Prüfungen nicht so arg wichtig, daher gibt es zu diesen Kapiteln nichts Schriftliches. Sie finden beschreibende Videos zu diesen Kapiteln auf www.mathe-seite.de

V.06.07 Kugelgleichungen (∰)

Es gibt zwei wichtige Arten von Kugelgleichungen.
Aus beiden kann man Radius und Mittelpunkt direkt ablesen.
Annahme, die Kugel hat den Mittelpunkt $M(m_1 \mid m_2 \mid m_3)$ und den Radius r.

Dann lautet die eine Kugelgleichung:
[Man nennt diese Gleichung auch „Parametergleichung" der Kugel.]

$$\boxed{K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}\right]^2 = r^2}$$

Mittelpunkt Radius (quadriert)

Die andere Kugelgleichung lautet:
[Man nennt diese Gleichung auch „Koordinatengleichung" der Kugel.]

$$\boxed{K: (x_1-m_1)^2+(x_2-m_2)^2+(x_3-m_3)^2 = r^2}$$

Koordinaten des Mittelpunktes Radius (quadriert)

Aufgabe 1

Es sei die Kugel mit Mittelpunkt M(3|1|-2) und Radius r=6.
Wie lauten die beiden Gleichungen dieser Kugel?

Lösung:

$$K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right]^2 = 36 \quad \text{bzw.} \quad K: (x_1-3)^2 + (x_2-1)^2 + (x_3+2)^2 = 36$$

Bemerkung:
Die rechte Kugelgleichung nimmt man eigentlich immer, wenn man mit der Gleichung \`was rechnen muss. Die linke ist eigentlich nur zum dumm \`rumstehen. In dieser Form sind die Kugelgleichungen meistens in den Aufgaben gegeben.
Wenn man [wie meistens] nur Kugelmittelpunkt und Kugelradius für irgendwelche Rechnung braucht, ist's natürlich egal aus welcher Gleichung man sie \`rausliest.
Wenn Sie sich die zweite Kugelgleichung anschaut, fallen Ihnen nach wenigen Tagen sicherlich die Quadrate bei den Klammern auf und wenn es Ihre Aufgabe wäre, die Klammern aufzulösen, würden Sie diese Gleichung sicherlich nicht so umformen: $\cancel{x_1^2-9+x_2^2-1+x_3^2+4 = 36}$ Nee, sondern Sie würden sicherlich an die binomischen Formeln denken und so umformen:

$$x_1^2-6x_1+9+x_2^2-2x_2+1+x_3^2+4x_3+4 = 36 \qquad | -9-1-4$$

$$x_1^2-6x_1+x_2^2-2x_2+x_3^2+4x_3 = 22$$

An dieser Gleichung kann man nun weder Mittelpunkt noch Radius ablesen. Da aber ab und zu die Kugelgleichung in dieser Form gegeben ist, solltet Ihr auch diese ein bisschen können. Wir werden deswegen in einem Ultra-Schnell-Durchlauf die „quadratische Ergänzung" wiederholen.

Aufgabe 2

Überprüfen Sie, ob es sich hierbei um eine Kugelgleichung handelt!

$$K : x_1^2+x_2^2+x_3^2+6x_1-10x_2+8x_3 = -50$$

Lösung:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+6x_1-10x_2+8x_3 = -50$$ erst sortieren

[Immer die Hälfte der Beizahl quadrieren und auf *beiden* Seiten dazuaddieren.]

$$x_1^2+6x_1+\left(\frac{6}{2}\right)^2 + x_2^2-10x_2+\left(\frac{10}{2}\right)^2 + x_3^2+8x_3+\left(\frac{8}{2}\right)^2 = -50+\left(\frac{6}{2}\right)^2+\left(\frac{10}{2}\right)^2+\left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$x_1^2+6x_1+3^2 + x_2^2-10x_2+5^2 + x_3^2+8x_3+4^2 = -50+3^2+5^2+4^2$$

$$(x_1+3)^2 + (x_2-5)^2 + (x_3+4)^2 = 0$$

Das war's auch schon. Der Mittelpunkt wäre $M(-3|+5|-4)$,
aber der Radius wäre $r=\sqrt{0}=0$ und das wäre eine etwas komische Kugel.
Auf deutsch: es handelt sich um *keine Kugelgleichung,* weil der Radius keine positive Zahl ist.

Jetzt möchte ich noch ein paar **ungewöhnliche Kugelgleichungen** präsentieren, die aber alle schon 'mal im Abi oder in Klassenarbeiten drankamen.
[Wenn Sie 'mal selber auf eine komische Kugelgleichung stoßen solltet, denken dran, dass man eigentlich bei allen irgendein Skalarprodukt ausrechnen muss, dann kommt's auch schon 'raus.]

Aufgabe 3

Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius der folgenden Kugel: $K : \vec{x}\cdot\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right] = 15$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius der folgenden Kugel: $K : \vec{x}^2+\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix}+1 = 0$

Lösung von Aufgabe 3

$$K : \vec{x}\cdot\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right] = 15$$ Vektor $\vec{x}$ umschreiben

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1-2\\x_2-3\\x_3-4\end{bmatrix} = 15$$ Skalarprodukt ausrechnen

$x_1\cdot(x_1-2) + x_2\cdot(x_2-3) + x_3\cdot(x_3-4) = 15$

$x_1^2-2x_1 + x_2^2-3x_2 + x_3^2-4x_3 = 15$ ab jetzt läuft's wie in Aufgabe 2

$x_1^2-2x_1+1^2+x_2^2-3x_2+1{,}5^2+x_3^2-4x_3+2^2 = 15+1^2+1{,}5^2+2^2$

$(x_1-1)^2 + (x_2-1{,}5)^2 + (x_3-2)^2 = 22{,}5$

Damit ist der Mittelpunkt bei $M(1|1{,}5|2)$ und der Radius ist $r=\sqrt{22{,}5}$

Lösung von Aufgabe 4

$\vec{x}^2+\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix}+1 = 0$ Vektor $\vec{x}$ umschreiben

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix}+1 = 0$ Skalarprodukt ausrechnen

$x_1^2+x_2^2+x_3^2 - 2x_1+0+6x_3 + 1 = 0$ sortieren

$x_1^2-2x_1 + x_2^2 + x_3^2+6x_3 = -1$ wieder quadratisch ergänzen

$x_1^2-2x_1+1^2+x_2^2+x_3^2+6x_3+3^2 = -1+1^2+3^2$

$(x_1-1)^2 + (x_2-0)^2 + (x_3+3)^2 = 9$

Damit ist der Mittelpunkt bei $M(1|0|-3)$ und der Radius ist $r=3$.

V.06.08 Schnitt Kugel-Gerade (∰)

Eine Kugel mit einer Gerade zu schneiden, ist verhältnismäßig einfach. Man setzt die Gerade einfach in die Kugelgleichung ein und kommt auf eine quadratische Gleichung, die man mit p-q-Formel bzw. a-b-c-Formel löst.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Schnittpunkte von $K: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}\right]^2 = 26$ mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Schnittpunkte von $K: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}\right]^2 = 10$ mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\-4\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Lösung von Aufgabe 5

zuerst schreiben wir die Kugelgleichung anders auf [nicht *unbedingt* notwendig]

$K : (x_1-4)^2+(x_2+2)^2+(x_3-6)^2=26$

von der Gerade wissen wir: $x_1 = 5 + 2\cdot t$, $x_2 = 0 - 1\cdot t$, $x_3 = 3 + 1\cdot t$

Nun setzen wir diese x_1 , x_2 , x_3 von der Geraden in die Kugelgleichung ein, der Rest läuft dann von selbst.

$(5+2t-4)^2 + (0-t+2)^2 + (3+t-6)^2 = 26$ ausrechnen

$(2t+1)^2 + (-t+2)^2 + (t-3)^2 = 26$

$4t^2+4t+1 + t^2-4t+4 + t^2-6t+9 = 26$ zusammenfassen

$6t^2 - 6t + 14 = 26$ | −26 | : 6

$t^2 - t - 2 = 0$ ← p-q-Formel oder a-b-c-Formel anwenden

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad t_1=-1 \quad \vee \quad t_2=2$

> Wäre in der Formel unter der Wurzel eine Null gestanden, hätten wir nur eine Lösung für's „t“ gehabt, es hätte nur einen Schnittpunkt gegeben und damit wäre die Gerade zufällig(?) also eine Tangente gewesen.
>
> Wäre unter der Wurzel etwas Negatives gestanden, gäb's keine Lösung, also wären Gerade und Kugel aneinander vorbeigelaufen. Ganz schön frech.

Die Werte von „t“ wieder in die Gerade einsetzen, da wo „t“ herkommt.

$t_1=-1$ in g $\Rightarrow$ $S_1(3|1|2)$

$t_2=2$ in g $\Rightarrow$ $S_2(9|-2|5)$

Lösung von Aufgabe 6

Zuerst schreiben wir die Kugelgleichung wieder anders auf:

$K : (x_1-2)^2+(x_2-3)^2+(x_3-2)^2=10$

von der Gerade wissen wir: $x_1 = 6 + 1\cdot t$, $x_2 = -4 + 2\cdot t$, $x_3 = 3 + 3\cdot t$

Die Gerade in die Kugel einsetzen...

$(6+t-2)^2 + (-4+2t-3)^2 + (3+3t-2)^2 = 10$ ausrechnen

$(t+4)^2 + (2t-7)^2 + (3t+1)^2 = 10$

$t^2+8t+16 + 4t^2-28t+49 + 9t^2+6t+1 = 10$ zusammenfassen

$14t^2 - 14t + 66 = 10$ | −26 | : 6

$t^2 - t + 4 = 0$ ← p-q-Formel oder a-b-c-Formel anwenden

Egal, ob man p-q-Formel oder a-b-c-Formel anwendet, unter der Wurzel erhält man immer etwas Negatives. Die Gleichung hat keine Lösung.

⇒ Die Kugel und die Gerade haben keine Schnittpunkte!

Bemerkung:

Wenn Sie also beweisen sollen, dass sich eine Gerade und eine Kugel schneiden sollen (oder eben nicht) haben Sie zwei Möglichkeiten:

→ Sie können den Abstand vom Kugelmittelpunkt zur Geraden ausrechnen und mit dem Kugelradius vergleichen [falls $d<r$: schneiden sie sich, falls $d=r$ berühren sie sich, falls $d>r$ laufen sie aneinander vorbei] oder

→ Kugel und Gerade schneiden und die Anzahl der Schnittpunkte prüfen.

V.06.09 Schnitt Kugel-Ebene (∰)

Dieses ist möglicherweise das Wichtigste vom Thema „Kugeln".
Wenn eine Kugel und eine Ebene sich schneiden, entsteht ein Schnittkreis.
Wenn Euch das nicht klar ist, stellt Euch vor, Ihr würdet von der Kugel ein Stück abschneiden. Es bleibt eine kreisförmige Schnittfläche übrig. Da mathematische Kugeln immer Hohlkugeln sind, ist der „Rand" dieser Schnittfläche unser Schnittkreis.
Nun ist es so, dass es im dreidimensionalen Raum *keine* Gleichung für einen Kreis gibt. Das führt uns zum Problem, dass wir gar nicht wie bei Gerade-Kugel eine Kugel mit Ebene schneiden können [wenn wir keine Schnittkreisgleichung erhalten können, weil es keine gibt, auf was wollen wir dann eigentlich hinrechnen ?!?].
Der Mittelpunkt des Schnittkreises liegt auf der Ebene „unter" dem Mittelpunkt der Kugel. Wir stellen also eine Lotgerade durch den Kugelmittelpunkt, senkrecht auf die Ebene. Der Schnittpunkt der Lotgerade mit der Ebene ist unser gesuchter Schnittkreismittelpunkt.
Um auf den Radius des Schnittkreises zu kommen, zeichnen wir uns ein ganz bestimmtes Dreieck heraus und wenden einmal den Pythagoras an.
[Siehe Beispiel und Zeichnungen dazu.]

Aufgabe 7

Es sei: $K : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}\right]^2 = 169$ und $E : 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$.

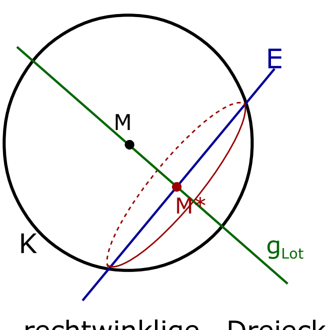
Bestimmen Sie Radius und Mittelpunkt des Schnittkreises von Kugel K und Ebene E

Aufgabe 8

Es sei: $K : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^2 = 85$ und $E : 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 16$.

Bestimmen Sie Radius und Mittelpunkt des Schnittkreises von Kugel K und Ebene E

Lösung von Aufgabe 7



Lotgerade bestimmen: $g_{Lot} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

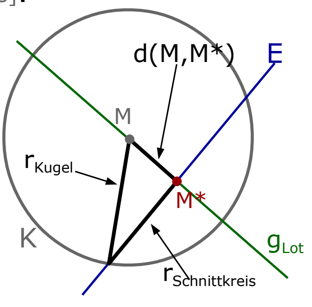
g_{Lot} mit E schneiden:

$2\cdot(10+2t) - 2\cdot(-6-2t) + (6+t) = 2$

$9t + 38 = 2 \quad \Rightarrow \quad t=-4$

t in g_{Lot} $\Rightarrow$ Schnittpunkt = **M*(2|2|2)**
das ist gleichzeitig unser Schnittkreismittelpunkt.
Für'n Radius des Schnittkreises betrachten wir das rechtwinklige Dreieck, bestehend aus dem Kugelradius, der Strecke MM* [= die Strecke vom Kugelmittelpunkt zum Schnittkreismitelpunkt] und dem Schnittkreisradius.

In diesem Dreieck kennen wir die Hypothenuse [=Kugelradius].
Die Länge MM* kann man leicht berechnen, da wir bereits die Koordinaten beider Punkte kennen.
Berechnen wir also die Länge der Strecke MM*.



$$d(M^*,M) = |\overline{M^*M}| = \left|\begin{pmatrix} 10 & - & 2 \\ -6 & - & 2 \\ 6 & - & 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{8^2+(-8)^2+4^2} = 12$$

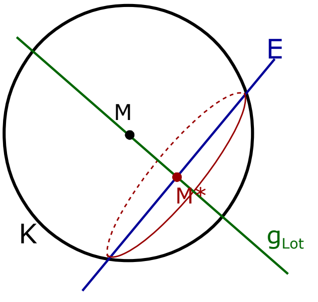
$\Rightarrow \; (r_{Kugel})^2 = (r_{Schnittkreis})^2 + d(M^*,M)^2$

$\quad 13 = (r_{Schnittkreis})^2 + 5^2$

$\Rightarrow \; \mathbf{r_{Schnittkreis}} = \sqrt{13^2-12^2} \; \mathbf{= 5}$

Lösung von Aufgabe 8

Bestimmung der Lotgerade: $g_{Lot} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$



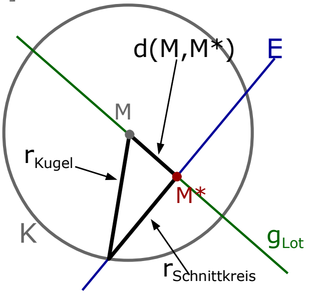
Lotgerade mit der Ebene schneiden:

$3 \cdot (5+3t) + 6 \cdot (9+6t) - 2(2-2t) = 16$

$15+9t + 54+36t - 4+4t = 16$

$49t + 65 = 16 \quad \Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad t=-1$

t in g_{Lot} $\Rightarrow$ Schnittpunkt = **M*(2|3|4)**
das ist gleichzeitig unser Schnittkreismittelpunkt.
Für den Radius des Schnittkreises betrachten wir das rechtwinklige Dreieck, bestehend aus dem Kugelradius, der Strecke MM* und dem Schnittkreisradius.
In diesem Dreieck kennen wir die Hypothenuse [=Kugelradius].
Die Länge MM* kann man leicht berechnen, da wir bereits die Koordinaten beider Punkte kennen.
Berechnen wir also die Länge der Strecke MM*.



$$d(M^*,M) = |\overline{M^*M}| = \left|\begin{pmatrix} 5 & - & 2 \\ 9 & - & 3 \\ 2 & - & 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+6^2+(-2)^2} = 7$$

$\Rightarrow \; (r_{Kugel})^2 = (r_{Schnittkreis})^2 + d(M^*,M)^2$

$\quad \sqrt{85}^2 = (r_{Schnittkreis})^2 + 7^2$

$\quad 85 = (r_{Schnittkreis})^2 + 49$

$\Rightarrow \; \mathbf{r_{Schnittkreis}} = \sqrt{85-49} \; \mathbf{= 6}$

V.06.10 Schnitt Kugel-Kugel (∰)

Zwei Kugeln mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2 schneiden sich, wenn gilt:

$$|r_1 - r_2| < d(M_1, M_2) < r_1 + r_2$$

Und warum das so ist, dürfen Sie sich selber überlegen. (1)
Der Schnitt zweier Kugeln ist wieder ein Schnittkreis. Supersach'.
Und wenn man dann zwei Kugeln miteinander schneidet, erhält man [wie könnte es auch anders sein] natürlich `was ganz anderes als eine Gleichung für den Schnittkreis [eine Gleichung des Schnittkreises gibt es ja nicht und in der Zeit, die Sie zum Lesen des letzten Kapiteln gebraucht haben, hat auch keiner `was Neues erfunden].
Man erhält nämlich die Gleichung der gesamten Ebene, in der der Schnittkreis drinliegt. Und Sie werden folgendes Wunder nicht glauben: man erhält sogar dann eine Ebenengleichung, wenn sich die beiden Ebenen gar nicht schneiden [es also gar keinen Schnittpunkt oder Schnittkreis gibt]. Erstaunlich, erstaunlich !!
Man sollte also auf *jeden* Fall prüfen ob sich die Kugeln tatsächlich schneiden. Meistens jedoch ist die Aufgabe so gestellt, dass daraus hervor geht ob sich die Kugeln schneiden oder nicht [oder ob Sie es prüfen sollen].

Man schneidet zwei Kugeln, indem man die beiden Kugelgleichungen voneinander abzieht. Dann erhält man die Koordinatengleichung der Ebene, in der sich der Schnittkreis befindet.
Danach nimmt man irgendeine der beiden Kugelgleichung und schneidet sie mit der erhaltenen Ebenengleichung (Schnitt Ebene-Kugel, siehe letztes Beispiel).

ACHTUNG!! ES FOLGT EINE TOLLE **AUFGABE**:

Aufgabe 9

Es sei: $K_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}\right]^2 = 26^2$ und $K_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\right]^2 = 23^2$

Prüfen Sie, ob sich die Kugeln schneiden und bestimmen Sie gegebenfalls Mittelpunkt und Radius der Schnittkreises.

Aufgabe 10

Gegeben sind die Kugeln: $K_1: \vec{x}^2 - \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 99 = 0$ und $K_2: \vec{x} \cdot \left[\vec{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = 139$

Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius der Schnittkreises von K_1 und K_2.

---

1 Wenn das WARUM so wahnsinnig wichtig wäre, hätte ich mir wohl die Mühe gemacht es zu erklären, oder ??

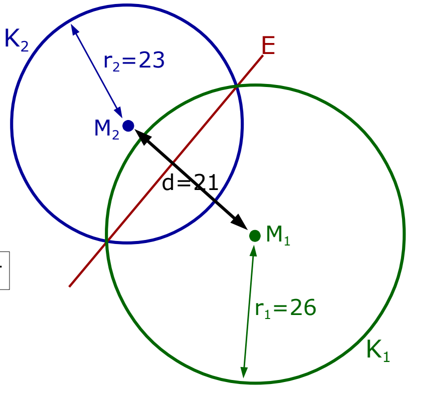
Lösung von Aufgabe 9

$$d(M_1,M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & - & 7 \\ -5 & - & 13 \\ 5 & - & (-4) \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ -18 \\ 9 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2+(-18)^2+9^2} = 21$$

Die beiden Kugeln schneiden sich, falls gilt:

$$\begin{array}{lccccc} & |r_1-r_2| & < & d(M_1,M_2) & < & r_1+r_2 \\ & |26-23| & < & 21 & < & 26+23 \\ \Leftrightarrow & 3 & < & 21 & < & 49 \end{array}$$

Dadat eine wahre Aussage ist, **schneiden sich die Kugeln**.



Um zwei Kugeln zu schneiden [und die Gleichung der Schnittebene zu erhalten], schreiben wir die Kugelgleichungen derart um, dass wir sie voneinander abziehen können.

$K_1: \ (x_1-7)^2 + (x_2-13)^2 + (x_3+4)^2 = 676$

$K_2: \ (x_1-1)^2 + (x_2+5)^2 + (x_3-5)^2 = 529$

[Klammern auflösen]

$K_1: \ x_1^2-14x_1+49+x_2^2-26x_2+169+x_3^2+8x_3+16 = 676$

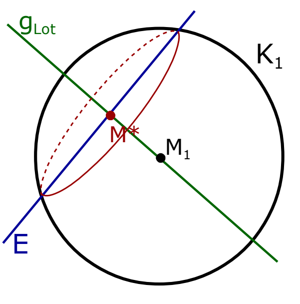
$K_2: \ x_1^2-2x_1+1+x_2^2+10x_2+25+x_3^2-10x_3+25 = 529$

$K_1 \cap K_2: \ -12x_1+48 \quad -36x_2+144 \ + 18x_3-9 = 147$

$\Rightarrow$ die Schnittebene beider Kugeln: $E: -12x_1-36x_2+18x_3=-36$

Schönschönschön. Nun können wir also mit Schnitt Kugel-Ebene weitermachen. Wir nehmen dazu die Schnittebene E und eine der beiden Kugeln [z.B. K_1].

Die Kugel $K_1: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}\right]^2 = 26^2$ schneidet die Ebene $E: -12x_1-36x_2+18x_3=-36$ natürlich in einem Schnittkreis, von welchem wir Mittelpunkt und Radius bestimmen müssen [wie im letzten Kapitel].



Wir bestimmen wieder zuerst den Mittelpunkt des Schnittkreises M*, indem wir die Lotgerade mit der Schnittebene schneiden.
Die Lotgerade steht natürlich senkrecht auf der Ebene [deswegen *Lot*gerade], also können wir für deren Richtungsvektor den Normalenvektor der Ebene nehmen. Als Stützvektor nehmen wir den Mittelpunkt der Kugel, weil das ein Punkt ist, der auf der Lotgerade liegt.

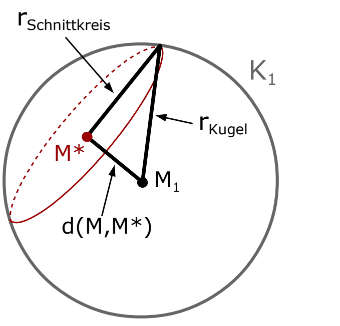
$\Rightarrow \ g_{Lot}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -12 \\ -36 \\ 18 \end{pmatrix}$ [in die Ebene einsetzen]

$g_{Lot} \cap E: \ -12\cdot(7-12t) - 36\cdot(13-36t) + 18\cdot(-4+18t) = -36$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \ -624+1764t=-36 \quad \Rightarrow \dots \Rightarrow \ t = \frac{588}{1764} = \frac{1}{3}$

t in g_{Lot} $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ Schnittpunkt: **M*(3|1|2)**

Nun, da wir den Mittelpunkt des Schnittkreises haben, können wir den Schnittkreisradius wieder ziemlich einfach bestimmen, indem wir wieder den Pythagoras anwenden. Zuerst brauchen wir allerdings den Abstand von M_1 zu M^*.



$$d(M_1,M^*) = \left|\begin{pmatrix}3 & - & 7\\1 & - & 13\\2 & - & (-4)\end{pmatrix}\right| = \ldots = \sqrt{(-4)^2+(-12)^2+6^2} = 14$$

mit Pythagoras folgt: $(r_{Kugel})^2 = (r_{Schnittkreis})^2 + d(M_1,M^*)^2$

$$26^2 = (r_{Schnittkreis})^2 + 14^2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{r_{Schnittkreis}} = \sqrt{26^2-14^2} \; \boldsymbol{\approx 21{,}9}$$

Lösung von Aufgabe 10

Wir müssen *nicht* beweisen, dass die Kugeln sich überhaupt schneiden. Laut Formulierung der Aufgabe, kann man das wohl stillschweigend voraussetzen.

Allerdings sind beide Kugelgleichungen in einer etwas blöden Form angegeben, wir können weder Mittelpunkt noch Radius vernünftig ablesen. Also formen wir um.

Umformung von K_1:

$$K_1 : \vec{x}^2 - \begin{pmatrix}16\\2\\8\end{pmatrix}\cdot\vec{x} - 99 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}16\\2\\8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - 99 = 0 \qquad \text{Skalarprodukt anwenden}$$

$$\Leftrightarrow\quad x_1^2+x_2^2+x_3^2 - 16x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 99 \qquad \text{sortieren und quadratisch ergänzen}$$

$$\Leftrightarrow\quad x_1^2-16x_1+64 + x_2^2-2x_2+1 + x_3^2-8x_3+16 = 99+64+1+16$$

$$\Leftrightarrow\quad (x_1-8)^2 + (x_2-1)^2 + (x_3-4)^2 = 180$$

Nun kann man Mittelpunkt und Radius ablesen. $\quad M_1(8|1|4) \quad r_1 = \sqrt{180}$ f

Umformung von K_2:

$$K_2 : \vec{x}\cdot\left[\vec{x} + \begin{pmatrix}4\\18\\2\end{pmatrix}\right] = 139 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1+4\\x_2+18\\x_3+2\end{bmatrix} = 139 \qquad \text{Skalarprodukt anwenden}$$

$$\Leftrightarrow\quad x_1\cdot(x_1+4) + x_2\cdot(x_2+18) + x_3\cdot(x_3+2) = 139$$

$$\Leftrightarrow\quad x_1^2+4x_1 + x_2^2+18x_2+x_3^2+2x_3 = 139 \qquad \text{quadratisch ergänzen}$$

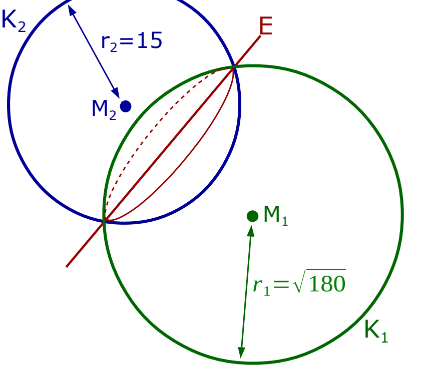
$$\Leftrightarrow\quad x_1^2+4x_1+4 + x_2^2+18x_2+81+x_3^2+2x_3+1 = 139+4+81+1$$

$$\Leftrightarrow\quad (x_1+2)^2 + (x_2+9)^2 + (x_3+1)^2 = 225$$

Man kann wieder Mittelpunkt und Radius ablesen.

$M_2(-2|-9|-1) \quad r_2=15$

Zuerst brauchen wir wieder die Gleichung der Schnittebene, welche wir erhalten, indem wir beide Kugelngleichungen von einander abziehen.



$K_1 : \quad (x_1-8)^2 + (x_2-1)^2 + (x_3-4)^2 = 180$

$K_2 : \quad (x_1+2)^2 + (x_2+9)^2 + (x_3+1)^2 = 225$

[Klammern auflösen]

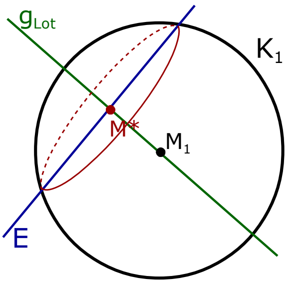
$$K_1 : \quad x_1^2-16x_1+64 + x_2^2-2x_2+1 + x_3^2-8x_3+16 = 180$$

$$K_2 : \quad x_1^2+4x_1+4 + x_2^2+18x_2+81+x_3^2+2x_3+1 = 225 \qquad -$$

$$K_1\cap K_2 : \quad -20x_1+60 \quad -20x_2-80 \quad -10x_3+15 = -45$$

[die Ebenengleichung zusammenfassen] E: $-20x_1-20x_2-10x_3=-40$
[und vereinfachen] ⇒ die Schnittebene: $E: 2x_1+2x_2+x_3=4$

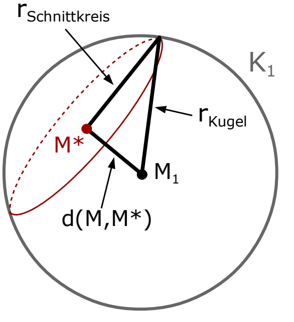
Nun schneiden wir K_1 [K_2 wäre ebenfalls möglich] mit E.
$K_1: (x_1-8)^2+(x_2-1)^2+(x_3-4)^2=180$ schneidet die Ebene $E: 2x_1+2x_2+x_3=4$ in einem Schnittkreis, von welchem wir Mittelpunkt und Radius bestimmen müssen.
Wir bestimmen zuerst den Mittelpunkt des Schnittkreises M*, indem wir die Lotgerade mit der Schnittebene schneiden.
Die Lotgerade hat als Richtungsvektor den Normalenvektor der Ebene und als Stützvektor den Mittelpunkt der Kugel.



$\Rightarrow\; g_{Lot}: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ [in die Ebene einsetzen]

$g_{Lot} \cap E: \; 2\cdot(8+2t) + 2\cdot(1+2t) + (4+1t) = 4$
⇒ … ⇒ $22+9t=4$ ⇒ … ⇒ $t=-2$
t in g_{Lot} ⇒ … ⇒ Schnittpunkt: **M*(4|-3|2)**

Nun, da wir den Mittelpunkt des Schnittkreises haben, können wir den Schnittkreisradius wieder ziemlich einfach bestimmen, indem wir wieder den Pythagoras anwenden. Zuerst brauchen wir allerdings den Abstand von M_1 zu M*.



$d(M_1,M^*) = \left|\begin{pmatrix}4-8\\-3-1\\2-4\end{pmatrix}\right| = \ldots = \sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(-2)^2} = 6$

mit Pythagoras folgt: $(r_{Kugel})^2 = (r_{Schnittkreis})^2 + d(M_1,M^*)^2$
$180 = (r_{Schnittkreis})^2 + 6^2$
$\Rightarrow\; \mathbf{r_{Schnittkreis}} = \sqrt{180-36} = \mathbf{12}$

V.06.11 Abstand Kugel-Punkt (∰)

Bei Kugeln führt man jede Abstandsberechnung auf den Mittelpunkt zurück.
D.h. bei Abstand Kugel-Punkt berechnet man den Abstand vom Mittelpunkt zum gegebenen Punkt und zieht den Kugelradius ab.

Aufgabe 11

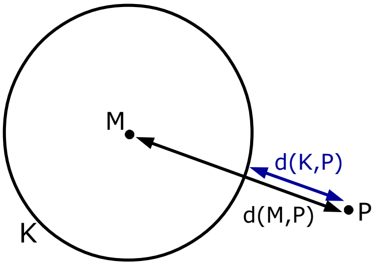
Bestimmen Sie den Abstand von $K_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\-2\\8\end{pmatrix}\right]^2 = 16$ zu P(6|5|4).

Aufgabe 12

Zeigen Sie, dass A(5|0|-1) und B(3|-2|7) auf der Kugel $K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]^2 = 36$ liegen.

Lösung von Aufgabe 11:
Wir berechnen zuerst den Abstand vom Mittelpunkt M zum Punkt P.

$$d(M,P) = \left|\begin{pmatrix} 6 & - & 2 \\ 5 & - & (-2) \\ 4 & - & 8 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2+7^2+(-4)^2} = 9$$



Da der Kugelradius r=4 ist, ist der Abstand von der Kugel zum Punkt P:
d(K,P) = d(M,P)−r = 9−4 = 5

Lösung von Aufgabe 12
Ein Punkt liegt auf der Kugel, wenn der Abstand von diesem Punkt zum Mittelpunkt genau so groß ist wie der Kugelradius.
Unsere Kugel hat den Mittelpunkt bei $M(1|2|3)$ und einen Radius von $r=6$.

Der Abstand von A zum Mittelpunkt

$$d(M,A) = \left|\begin{pmatrix} 5 & - & 1 \\ 0 & - & 2 \\ -1 & - & 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2} = 6$$

Der Abstand von A zu M ist 6, genauso groß wie der Radius.
Der Punkt A liegt also auf der Kugel.

Der Abstand von B zum Mittelpunkt

$$d(M,B) = \left|\begin{pmatrix} 3 & - & 1 \\ -2 & - & 2 \\ 7 & - & 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+(-4)^2+4^2} = 6$$

Der Abstand von B zu M ist 6, genauso groß wie der Radius.
Der Punkt B liegt also auf der Kugel.

V.06.12 Abstand Kugel-Gerade (∰)

Bei Kugeln führt man jede Abstandsberechnung auf den Mittelpunkt zurück.
D.h. bei Abstand Kugel-Gerade berechnet man den Abstand vom Mittelpunkt zur gegebenen Gerade und zieht den Kugelradius ab.

Aufgabe 13

Bestimmen Sie den Abstand von $K : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right]^2 = 9$ zu $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 14

Zeigen Sie, dass $t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Tangente an $K : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^2 = 49$ ist.

Lösung von Aufgabe 13:
Erst Abstand Mittelpunkt-Gerade berechnen.

Die Methode, mit welcher Sie den Anstand von einem Punkt zu einer Gerade bestimmen, bleibt natürlich Ihnen überlassen. Ich wähle hier die Methode über die Lotebene.

Die Lotebene aufstellen. Der Richtungsvektor von g ist der Normalenvektor.

$E_{Lot}: 1x_1+0x_2+1x_3=a$ M in E_{Lot} einsetzen. $1\cdot6+0\cdot4+1\cdot(-2)=a \Rightarrow a=4$

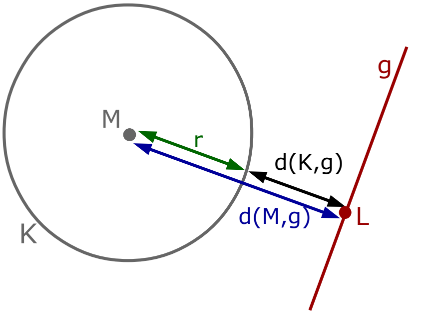
$\Rightarrow E_{Lot}: 1x_1 + 1x_3 = 4$

Lotebene mit der Gerade g schneiden:

$E_{Lot}\cap g: \; 1\cdot(4+t) + 1\cdot(4+t) = 4$

$2t + 8 = 4 \quad \Rightarrow \quad t=-2$

t in g $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ Lotfußpunkt: L(2|2|2)



Der Abstand von M zu g ist:

$$d(M,g)=d(M,L)=|\overrightarrow{LM}| = \left|\begin{pmatrix}6 & - & 2\\4 & - & 2\\-2 & - & 2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}4\\2\\-4\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \sqrt{4^2+2^2+(-4)^2} = 6$$

$\Rightarrow$ $d(K,g) = d(M,g)-r = 6-3 = 3$

Lösung von Aufgabe 14:
Eine Gerade ist Tangente an eine Kugel, wenn der Abstand von der Gerade zur Kugel Null ist, d.h. wenn der Abstand von der Gerade zum Kugelmittelpunkt gleich dem Radius ist.

Zum Rechenweg, um den Abstand einer Gerade von einem Punkt zu bestimmen: es ist natürluch egal, welchen Weg Sie wählen. Ohne besonderen Grund wähle ich den Weg über das Skalarprodukt.

Jeder Punkt auf der Gerade t hat die Form: $T_r(7-2r|-2+2r|-2+3r)$.
Der Verbindungsvektor von Mittelpunkt M zum Punkt T_r ist:

$$\overrightarrow{MT_r} = \begin{pmatrix}7-2r & - & 6\\-2+2r & - & 8\\-2+3r & - & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2r\\-10+2r\\-4+3r\end{pmatrix}$$

Dieser Vektor muss senkrecht auf der Gerade stehen, das Skalarprodukt von $\overrightarrow{MT_r}$ mit dem Richtungsvektor der Gerade muss daher Null ergeben.

$$\begin{pmatrix}1-2r\\-10+2r\\-4+3r\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix}=0 \Rightarrow (1-2r)\cdot(-2)+(-10+2r)\cdot2+(-4+3r)\cdot3=0 \Rightarrow$$

$-2+4r-20+4r-12+9r=0 \quad \Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad r=2$

r=2 in T_r einsetzen $\Rightarrow$ der Lotfußpunkt T hat die Koordinaten T(3|2|4)

Den Abstand vom Lotfußpunkt T zum Kugelmittelpunkt M bestimmen.

$$d(M,g)=d(M,T)=|\overrightarrow{TM}| = \left|\begin{pmatrix}6 & - & 3\\8 & - & 2\\2 & - & 4\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\6\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+6^2+(-2)^2} = 7$$

Der Abstand von der Gerade zum Kugelmittelpunkt ist gleich dem Radius, der Abstand von der Gerade zur Kugel ist also 0 $\Rightarrow$ die Gerade berührt die Kugel.

Bemerkung:

→ Wäre der Abstand von M zu g kleiner als der Radius gewesen, hätten sich Gerade und Kugel geschnitten.

→ Wäre der Abstand von M zu g genau gleich dem Radius gewesen, hätten sich Gerade und Kugel berührt, g wäre also eine Tangente von der Kugel gewesen.

V.06.13 Abstand Kugel-Ebene (∰)

Bei Kugeln führt man jede Abstandsberechnung auf den Mittelpunkt zurück.
D.h. bei Abstand Kugel-Ebene berechnet man den Abstand vom Mittelpunkt zur gegebenen Ebene und zieht den Kugelradius ab.

Aufgabe 15

Bestimmen Sie den Abstand von $K: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-7\\3\\7\end{pmatrix}\right]^2 = 36$ zu $E: 8x_1-x_2-4x_3=-6$

Aufgabe 16

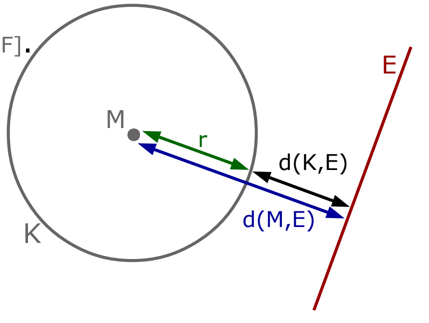
Zeigen Sie: $T: 12x_1+x_2+12x_3=13$ ist Tangentialebene an $K: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}11\\2\\14\end{pmatrix}\right]^2 = 289$.

Lösung von Aufgabe 15:
Erst Abstand Mittelpunkt-Ebene berechnen [über HNF].
Die Ebene in HNF umwandeln.

$$E_{HNF}: \frac{8x_1-x_2-4x_3+6}{\sqrt{8^2+(-1)^2+(-4)^2}} = \frac{8x_1-x_2-4x_3+6}{9} = 0$$

$$d(M,E) = \left|\frac{8\cdot(-7)-3-4\cdot 7+6}{9}\right| = 9$$

$$d(K,E) = d(M,E)-r = 9-6 = 3$$



Lösung von Aufgabe 16:
Eine Ebene ist Tangentialebene an eine Kugel, wenn der Abstand von dieser Ebene zur Kugel 0 ist, wenn also der Abstand von E zu M gleich dem Radius ist.
Die Ebene in HNF umwandeln.

$$T_{HNF}: \frac{12x_1+x_2+12x_3-13}{\sqrt{12^2+1^2+12^2}} = \frac{12x_1+x_2+12x_3-13}{17} = 0$$

$$d(M,T) = \frac{|12\cdot 11+2+12\cdot 14-13|}{17} = 17$$

Der Abstand von T zum Kugelmittelpunkt ist gleich dem Radius
⇒ die Ebene T ist Tangentialebene!

Bemerkung:
→ Wäre der Abstand von M zu E kleiner als der Radius gewesen, hätten sich Ebene und Kugel geschnitten.
→ Wäre der Abstand von M zur Ebene genau gleich dem Radius gewesen, hätten sich Ebene und Kugel berührt, E wäre eine Tangentialebene von der Kugel gewesen.

V.06.14 Abstand Kugel-Kugel (∰)

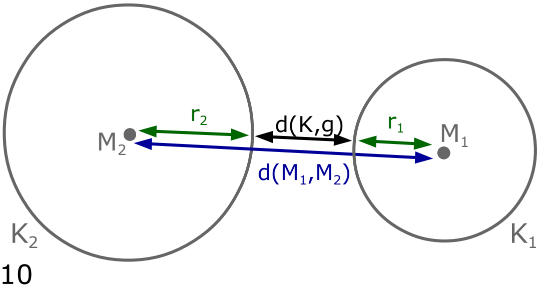
Bei Kugeln führt man jede Abstandsberechnung auf den Mittelpunkt zurück.
D.h. bei Abstand zweier Kugeln berechnet man den Abstand beider Mittelpunkte und zieht beide Kugelradien ab.

Aufgabe 17

Bestimmen Sie den Abstand von $K_1 : \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}\right]^2 = 4$ und $K_2 : \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}13\\3\\14\end{pmatrix}\right]^2 = 25$

Aufgabe 18

Zeigen Sie, dass sich die beiden Kugeln K_1 und K_2 berühren. Es gilt:
$K_1:(x_1-2)^2+(x_2+9)^2+(x_3-4)^2=25$ und $K_2:(x_1+4)^2+(x_2+3)^2+(x_3-1)^2=16$



Lösung von Aufgabe 17:
Erst Abstand von M_1 zu M_2 berechnen:

$$d(M_1,M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}13 & - & 1\\ 3 & - & 4\\ 14 & - & 2\end{pmatrix}\right| =$$

$$= \left|\begin{pmatrix}12\\-1\\12\end{pmatrix}\right| = \sqrt{12^2+(-1)^2+12^2} = 17$$

$\Rightarrow\ d(K_1,K_2) = d(M_1,M_2)-r_1-r_2 = 17-2-5 = 10$

Lösung von Aufgabe 18:
Zwei Kugeln berühren sich, wenn der Abstand der beiden Mittelpunkte gleich der Summe beider Radien ist, also für $d(M_1,M_2)=r_1+r_2$. [Falls gilt: $d(M_1,M_2)=|r_1-r_2|$, würden sich die Kugeln von innen berühren, wenn also eine Kugel in der anderen liegt.]
Der Abstand beider Mittelpunkte beträgt:

$$d(M_1,M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix}2 & - & (-4)\\ -9 & - & (-3)\\ 4 & - & 1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}6\\-6\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2+(-6)^2+3^2} = 9$$

Die beiden Radien haben die Länge: $r_1=5$ und $r_2=4$.
Da gilt: $d(M_1,M_2)=r_1+r_2 \Rightarrow K_1$ und K_2 berühren sich.

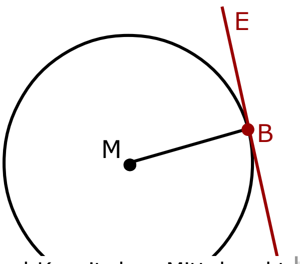
Bemerkung:

→ Wäre der Abstand der Abstand der Mittelpunkte kleiner als die Summe der Radien und größer als die Differen gewesen, hätten sich die Kugeln geschnitten. [Die Kugeln schneiden sich also, wenn gilt: $|r_1-r_2|< d(M_1,M_2) < r_1+r_2$

→ Wäre der Abstand der Mittelpunkt genau gleich r_1+r_2 gewesen, hätten sich die Kugeln von außen berührt. Wäre der Abstand der Mittelpunkt gleich $|r_1+r_2|$ gewesen, hätten sich die Kugeln von innen berührt.

V.06.15 Tangentialebene (∯)

Zu einer Tangentialebene gehört eine Kugel und ein Punkt, der Berührpunkt. [Ich hoffe, dass die Lebensweisheiten, die ich bisher versprühe, Sie sehr beeindrucken].
Der Vektor $\overrightarrow{MB}$ steht senkrecht auf der berührenden Ebene, er ist also der Normalenvektor dieser Tangentialebene.
Man könnte also immer wenn M und B gegeben sind, eine Tangentialebene so berechnen:
Man stellt den Vektor $\overrightarrow{MB}$ auf, diesen nimmt man als Normalenvektor [damit hat man bereits die Zahlen vor den x_1 , x_2 , x_3 von der Tangentialebene]. Wenn man nun noch den Berührpunkt B einsetzt, hat man die gesamte Koordinatengleichung der Tangentialebene.



Die Kugel K, mit dem Mittelpunkt M und einer Tangentialebene. Beide berühren sich im Punkt B. [Die Tangentialebene E ist nur als Strich eingezeichnet.]
Der Vektor $\overrightarrow{MB}$ steht senkrecht auf der Ebene. [So wie jeder Kreisradius auf einer Tangente.]

Viele berechnen Tangentialebenen mit einer Formel:

$$\boxed{T: (\vec{x}-\vec{m})\circ(\vec{b}-\vec{m}) = r^2}$$

← $\vec{m}$ ist der Mittelpunkt, $\vec{b}$ der Berührpunkt, r der Kugelradius.

Aufgabe 19

Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene T, die die Kugel
$K: (x_1-2)^2+(x_2+1)^2+(x_3-4)^2=25$ im Punkt $B(2|3|1)$ berührt.

Aufgabe 20

Es sei: $K_1 : \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}5\\-1\\8\end{pmatrix}\right]^2 = 49 \qquad K_2 : \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-1\\8\\-10\end{pmatrix}\right]^2 = 196$ sowie der Punkt $A(8|5|a)$

a) Zeigen Sie, dass sich K_1 und K_2 berühren. Bestimmen Sie diesen Berührpunkt B.
Durch B geht eine Tangetialebene E an beide Kugeln.
Bestimmen Sie Ihre Gleichung.

b) Bestimmen Sie $a<7$ so, dass der Punkt A Element der Kugel K_1 ist.
Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene T, die K_1 im Punkt A berührt ?

c) Weisen Sie nach, dass T die Kugel K_2 schneidet.
Welcher Punkt G von K_2 liegt von T am weitesten entfernt ?
Wie groß ist dieser Abstand ?

Lösung von Aufgabe 19
Der Mittelpunkt der Kugel ist $M(2|-1||4)$, der Radius ist $r=5$.
Diese und die Koordinaten des Berührpunktes in die Formel ein.

$$(\vec{x}-\vec{m})\circ(\vec{b}-\vec{m}) = r^2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}\right)\circ\left(\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}\right) = 5^2$$

vereinfachen

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1-2 \\ x_2+1 \\ x_3-4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 25$ Skalarprodukt ausrechnen

$\Rightarrow (x_1-2)\cdot 0 + (x_2+1)\cdot 4 + (x_3-4)\cdot(-3) = 25$ vereinfachen

$\Rightarrow \dots \Rightarrow 4x_2-3x_3 = 9$

Die Gleichung der Tangentialebene lautet: $T: 4x_2-3x_3 = 9$

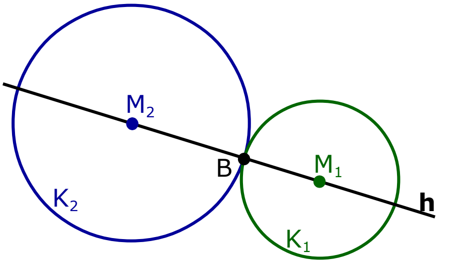
Lösung von Aufgabe 20

a) Wenn sich die Kugeln berühren, muss der Abstand der beiden Mittelpunkte genau r_1+r_2 sein.

$$d(M_1,M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 & - & 5 \\ 8 & - & (-1) \\ -10 & - & 8 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -18 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2+9^2+(-18)^2} = 21$$

$r_1=7 \quad r_2=14 \quad \Rightarrow \quad d(M_1,M_2)=r_1+r_2 \quad \Rightarrow \quad K_1$ und K_2 berühren sich.

Um den Berührpunkt zu erhalten, stellen wir zuerst eine Verbindungsgerade von M_1 zu M_2 auf. Diese Gerade [nennen wir sie „h"] schneiden wir mit einer der beiden Kugeln [z.B. K_1]. Dummerweise erhalten wir zwei Schnittpunkte: einmal den gewünschten Berührpunkt B und dann noch einen „falschen" [auf der anderen Seite der Kugel]. Um diesen „richtigen" vom „falschen" zu unterscheiden, berechnen wir die Abstände von M_2 zu diesen beiden Schnittpunkten aus. Der Schnittpunkt mit dem kleinsten Abstand ist der Richtige.



Die Verbindungsgerade $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} M_2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} M_2-M_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Wir schneiden h mit K_1. Dazu K_1 erstmal umschreiben, dann h in K_1 einsetzen.

$K_1: (x_1-5)^2+(x_2+1)^2+(x_3-8)^2=49$

h in K_1: $(5-6t-5)^2+(-1+9t+1)^2+(8-18t-8)^2= 49$

$\Rightarrow 36t^2 + 81t^2 + 324t^2 = 49 \Rightarrow 441t^2=49 \Rightarrow t^2=\frac{49}{441}=\frac{1}{9} \Rightarrow t_{1,2}=\pm\frac{1}{3}$

t_1 in h $\Rightarrow \dots \Rightarrow B_1(3|2|2)$

t_2 in h $\Rightarrow \dots \Rightarrow B_2(7|-4|14)$

Wir haben nun zwei mögliche Koordinaten des Berührpunktes. Allerdings wissen wir, dass der Abstand von B zu M_2 genau dem Radius entsprechen muss.

$$d(B_1,M_2) = \left|\overrightarrow{B_1M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 & - & 3 \\ 8 & - & 2 \\ -10 & - & 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2+6^2+(-12)^2} = 14$$

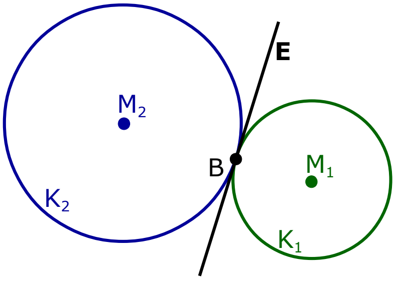
$$d(B_2,M_2) = \left|\overrightarrow{B_2M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 & - & 7 \\ 8 & - & (-4) \\ -10 & - & 14 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -24 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-8)^2+12^2+(-24)^2} = 28$$

B_2 ist von M_1 weiter weg als B_1. Also ist B_2 falsch. B_1 ist der gesuchte Punkt.

$\Rightarrow$ **B(3 | 2 | 2)**

Die Tangentialebene:

Mann kann die Formel verwenden, wie in der letzten Aufgabe, oder:
Die Ebene, die beide Kugeln in B berührt, steht ja senkrecht auf dem Vektor $\overrightarrow{M_1M_2}$, also nehmen wir $\overrightarrow{M_1M_2}$ als Normalenvektor für E. Dann liegt ja B auf E, also können wir noch eine Punktprobe mit B machen.
Gut, gell ?



$$\vec{n}_E = \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -18 \end{pmatrix} \Rightarrow E: -6x_1+9x_2-18x_3 = a$$

B in E einsetzen: $-6\cdot3+9\cdot2-18\cdot2=a \Rightarrow -36=a \Rightarrow E: -6x_1+9x_2-18\cdot x_3=-36$

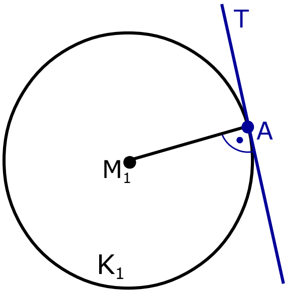
b) Wir wissen ja, dass A auf K_1 liegt, also machen wir mit A eine Punktprobe um a zu bestimmen, d.h. wir setzen A in K_1 ein.

A in K_1 : $(8-5)^2+(5+1)^2+(a-8)^2=49$ vereinfachen

$\Rightarrow 9+36+(a-8)^2=49 \Rightarrow (a-8)^2=4 \Rightarrow a-8=\pm2 \Rightarrow a_1=10 \quad a_2=6$

Da $a<7$ sein soll $\Rightarrow a=6 \Rightarrow \ldots \Rightarrow$ **A(8|5|6)**

Nun soll T die Kugel K_1 im Punkt A berühren.
Der Vektor $\overrightarrow{M_1A}$ steht [als Radius] senkrecht auf der gesuchten Ebene T. Damit können wir diesen Vektor als Normalenvektor von T verwenden. Wenn wir nachher A wieder in T einsetzen, erhalten wir die komplette Koordinatengleichung von T.
[Man könnte natürlich auch die Formel für die Tangentialebene verwenden.]



$$\vec{n}_T = \overrightarrow{M_1A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ T : $3x_1+6x_2-2x_3 = b$

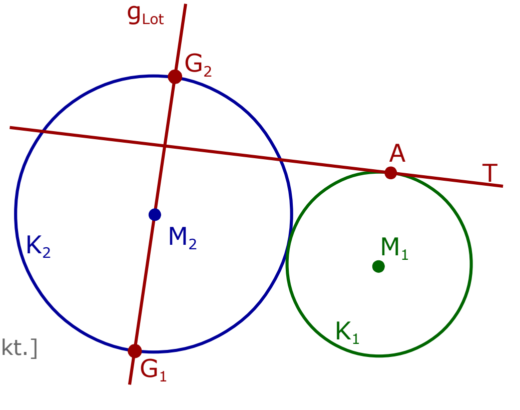
A in T : $3\cdot8+6\cdot5-2\cdot6=b \Rightarrow b=42 \Rightarrow$ T : $3x_1+6x_2-2x_3=42$

c) Wenn T die Kugel K_2 schneiden soll muss der Abstand von M_2 zur Ebene T kleiner als der Radius $r_2=14$ sein. Also berechnen wir $d(T,M_2)$ [mit HNF].

$$HNF_T: \frac{3x_1+6x_2-2x_3-42}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}} = \frac{3x_1+6x_2-2x_3-42}{7} = 0$$

$$\Rightarrow d(T,M_2) = \left|\frac{3\cdot(-1)+6\cdot8-2\cdot(-10)-42}{7}\right| \approx 3{,}29 < r_2 \Rightarrow \text{T schneidet } K_2.$$

Um den G-Punkt zu erhalten, stellen wir eine Lot-gerade g_{Lot} auf, die senkrecht auf T steht und durch M_2 geht. Wenn wir diese mit der Kugel K_2 schneiden, erhalten wir wieder zwei Schnittpunkte G_1 und G_2. Einer davon ist der gesuchte G-Punkt, der den größten Abstand von T hat, der andere liegt wieder auf der anderen Seite von K_2 und ist falsch.
[Hier in der Zeichnung wäre G_1 der gesuchte G-Punkt.]



Der Richtungsvektor der Lotgeraden g_{Lot} ist der Normalenvektor der Ebene T. Der Stützvektor von g_{Lot} ist der Punkt M_2.

$$g_{Lot}: \vec{x} = \begin{pmatrix} M_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} n_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung der Kugel K_2 lautet umgeschrieben:

$$K_2 : (x_1+1)^2+(x_2-8)^2+(x_3+10)^2 = 196$$

g_{Lot} in K_2 : $(-1+3t+1)^2+(8+6t-8)^2+(-10-2t+10)^2 = 196$

$\Rightarrow\ 9t^2+36t^2+4t^2=196\ \Rightarrow\ 49t^2=196\ \Rightarrow\ t_{1,2}=\pm 2$

$t_{1,2}$ in g_{Lot} $\Rightarrow$ $G_1(5|20|-14)$ und $G_2(-7|-4|-6)$

Nur einer der beiden Punkte ist der Richtige. Um zu schauen welcher von beiden es ist, berechnen wir ihren Abstand zur Ebene T [mit HNF].
Der richtige Punkt muss der mit dem kleineren Abstand sein.

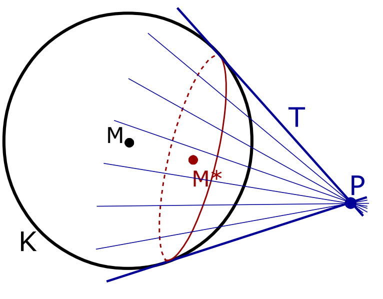
$$T : 3x_1+6x_2-2x_3=42 \quad \Rightarrow \quad HNF_T : \frac{3x_1+6x_2-2x_3-42}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}} = \frac{3x_1+6x_2-2x_3-42}{7} = 0$$

$$d(G_1,T) = \left| \frac{3 \cdot 5+6 \cdot 20-2 \cdot (-14)-42}{7} \right| \approx 17{,}28$$

$$d(G_2,T) = \left| \frac{3 \cdot (-7)+6 \cdot (-4)-2 \cdot (-6)-42}{7} \right| \approx 11{,}85$$

$\Rightarrow$ Der gesuchte Punkt ist **$G_1(5|20|-14)$**.

V.06.16 Tangentialkegel (∯)



Folgende Situation:
Von einem Punkt, der außerhalb einer Kugel K liegt, werden Tangenten an die Kugel gelegt. Wenn man alle Tangenten betrachtet, ergibt sich ein unendlich großer Kegel, der Tangentialkegel. Die Berührpunkte aller Tangenten an die Kugel ergibt einen Kreis, den Berührkreis.

Normalerweise sind gegeben: der Kugelmittelpunkt M, der Kugelradius r und der Punkt von außerhalb P.

Normalerweise sind gefragt: der Mittelpunkt und Radius des Berührkreises und der Öffnungswinkel des Kegels [an der Kegelspitze P].

Vorgehensweise:

→ Mit der unten stehenden Formel [nächste Seite] bestimmt man die Gleichung der Ebene, in der der Berührkreis liegt. Diese Ebene heißt Polarebene.

→ Ab dem Moment, wo man die Gleichung der Polarebene hat, bestimmt man den Mittelpunkt und Radius des Berührpunktes mithilfe der Methode aus Kapitel: V.06.09 Schnitt Kugel-Ebene.

→ Den Öffnungswinkel bestimmt man recht einfach über Trigonometrie.

Die Ebene, in welcher der Berührkreis liegt, berechnet man mit der Formel:

$$\mathbf{B:}\ (\vec{x}-\vec{m})\circ(\vec{p}-\vec{m}) = r^2$$

← $\vec{m}$ ist der Mittelpunkt,
$\vec{p}$ ist die Kegelspitze.
r der Kugelradius.

Aufgabe 21

Vom Punkt P(7|10|11) werden Tangenten an die Kugel
K : $(x_1-3)^2+(x_2-2)^2+(x_3-3)^2=36$ gelegt.

Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Berührkreises.
Bestimmen Sie den Öffnungswinkel des Kegels.

Aufgabe 22

Vom Punkt Q(-18|1|-3) werden Tangenten an die Kugel
K : $(x_1-6)^2+(x_2-5)^2+(x_3-3)^2=64$ gelegt.

Der Berührkreis bildet mit Q einen Kegel.
Bestimmen Sie das Volumen und die Oberfläche dieses Kegels.

Lösung von Aufgabe 21:
Der Mittelpunkt der Kugel ist M(3|2|3), der Radius ist r=6.
Wenn wir diese beiden und den Punkt P in die Formel ein:

$$(\vec{x}-\vec{m})\circ(\vec{p}-\vec{m}) = r^2 \ \Rightarrow\ \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}\right)\circ\left(\begin{pmatrix}7\\10\\11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}\right) = 36 \ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}x_1-3\\x_2-2\\x_3-3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\8\\8\end{pmatrix} = 36$$

$\Rightarrow\ (x_1-3)\cdot4+(x_2-2)\cdot8+(x_3-3)\cdot8 = 36$

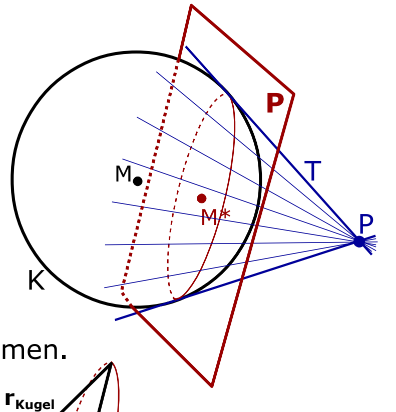
$4x_1-12 + 8x_2-16 + 8x_3-24=36 \ \Rightarrow\ 4x_1+8x_2+8x_3=88 \quad |:4$

Die Ebene, in welcher der Berührkreis liegt, heißt **Polarebene**
und lautet: P : $x_1+2x_2+2x_3=22$

[Ab jetzt geht's wie in Kap. V.06.09 weiter, mit Schnitt von Kugel mit einer Ebene.]

Die Lotgerade aufstellen, die senkrecht auf der Ebene P steht und durch M [und P] geht:

$$g_{Lot}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$



Die Lotgerade mit der Ebene P schneiden, um den Mittelpunkt des Berührkreises zu erhalten.

g_{Lot} in B einsetzen:

$(3+t)+2\cdot(2+2t)+2\cdot(3+2t)=22$

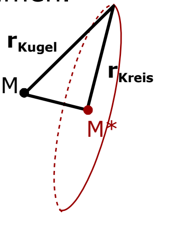
$3+t + 4+4t + 6+6t = 22 \ \Rightarrow\ldots\Rightarrow\ t=1$

$t=1$ in g_{Lot} einsetzen $\Rightarrow$ **M*(4|4|5)**

Den Radius des Berührkreises mit Pythagoras bestimmen.

Der Abstand von M zu M* ist:

$$d(M,M^*) = \left|\begin{pmatrix}4 & - & 3\\4 & - & 2\\5 & - & 3\end{pmatrix}\right| =\ldots= \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$$



mit Pythagoras folgt: $(r_{Kugel})^2 = (r_{Kreis})^2+d(M,M^*)^2$

$$6^2 = (r_{Kreis})^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{r_{Berührkreis}} = \sqrt{36-9} = \mathbf{\sqrt{27}}$$

Den Öffnungswinkel bestimmen:

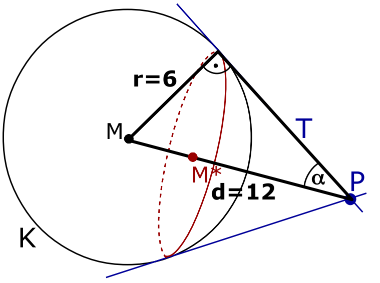
In der Skizze ist α der halbe Öffnungswinkel.

α berechnet man über die Trigonometrie.

Dazu braucht man den Abstand von M zu P.

$$d(M,P) = \left|\begin{pmatrix}7-3\\10-2\\11-3\end{pmatrix}\right| = \ldots = \sqrt{4^2+8^2+8^2} = 12$$

$$\sin(\alpha)=\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}=\frac{r}{d}=\frac{6}{12}=0{,}5 \Rightarrow \alpha=\sin^{-1}(0{,}5)=30°$$



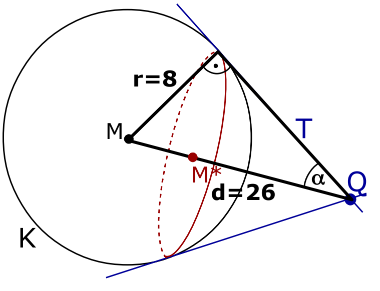
Der Öffnungswinkel des Kegels beträgt: 2·30° = **60°**

Lösung von Aufgabe 22:

Diese Aufgabe hört sich zwar ähnlich an wie Aufgabe 21, ist aber viel einfacher, da wir die Polarebene und den Mittelpunkt des Berührkreises nicht brauchen.

Wir lösen die ganze Aufgabe hauptsächlich als rein trigonometrisches Problem und brauchen nur den Abstand von M zu Q.

$$d(M,Q) = \left|\begin{pmatrix}-18-6\\1-5\\-3-3\end{pmatrix}\right| = \ldots = \sqrt{(-24)^2+(-4)^2+(-6)^2} = 26$$



Damit können wir den Öffnungswinkel des Kegels bestimmen.

$$\sin(\alpha)=\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}=\frac{r}{d}=\frac{8}{26}\approx 0{,}308$$

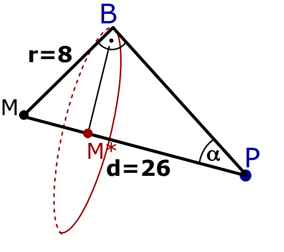
$$\Rightarrow \alpha = \sin^{-1}(0{,}308) \approx 17{,}94°$$

[Der Öffnungskegel wäre eigentlich dass Doppelte von α, also 2·17,94=35,88°. Aber uns interessiert für später immer nur der halbe Öffnungswinkel, also α.]

Nun betrachten wir das Dreieck zwischen M, Q und irgendeinem Berührpunkt genauer.

Die Strecke BP [das ist die Seitenlinie des Kegels] kann man mit Pythagoras berechnen.

$$MB^2+BP^2=MP^2 \Rightarrow BP=\sqrt{MP^2-MB^2}=\sqrt{26^2-8^2}\approx 24{,}74$$



Der Radius des Grundkreises vom Kegel ist die Strecke M*P, welche im Dreieck M*BP bestimmt wird.

$$\sin(\alpha)=\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}=\frac{M^*P}{BP} \Rightarrow M^*P=BP\cdot\sin(\alpha)=24{,}74\cdot in(17{,}94)\approx 7{,}62 \Rightarrow \mathbf{r=7{,}62}$$

Die Höhe des Kegels erhält man ebenfalls im Dreieck M*BP mit Pythagoras.

$$M^*B^2+BP^2=M^*P^2 \Rightarrow M^*P=\sqrt{BP^2-M^*P^2}=\sqrt{24{,}74^2-7{,}62^2}\approx 23{,}54 \Rightarrow \mathbf{h=23{,}54}$$

Nun kann man Volumen und Oberfläche mit den Formeln aus der Formelsammlung berechnen:

$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 7{,}62^2\cdot 23{,}54 \approx 1431{,}3$ **Das Volumen ist 1431,3.**

$O = r^2+\pi\cdot r\cdot s = 7{,}62^2+\pi\cdot 7{,}62\cdot 24{,}74 \approx 650{,}3$ **Die Oberfläche ist 650,3.**

V.06.17 Berechnung der Lottozahlen für nächste Woche

Dieses Kapitel ist zur Zeit leider noch in Bearbeitung …

Bemerkung:
Die Themen „Umkugeln“ und „Inkugeln“ finden Sie in Kapitel V.09.05 und V.09.06.