

Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter
www.mathe-laden.de bestellen
(falls Sie das möchten).

Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen
finden, die nicht aus dem Internet herunter
geladen werden können.

Dazu gehören:

Inhaltsverzeichnis, Stichwortverzeichnis,
und viele **Aufgaben zum Selberrechnen.**



Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses
Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von
welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.

Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und
den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.

Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

Sie können diese Datei gerne beliebig für den eigenen Gebrauch verwenden.
Nicht gestattet sind Änderungen sowie kommerzielle Nutzung.

mathe seite

Die gute Seite an Mathe.

V.06 Kreise und Kugeln

Kreise und Kugeln werden ähnlich gerechnet.

Normalerweise werden Kugeln wichtiger sein als Kreise.

Sollten Sie die Berechnungen zu Kugeln einigermaßen beherrschen, werden Ihnen so ziemlich alle Berechnungen zu Kreisen sehr bekannt vorkommen.

Der Unterschied ist nur die Anzahl der Dimensionen.

Mit Kugeln rechnet man im Dreidimensionalen.

Mit Kreisen rechnet man im Zweidimensionalen.

V.06.01 Kreisgleichungen (§§)

Es gibt zwei wichtige Arten von Kreisgleichungen.

Aus beiden kann man Radius und Mittelpunkt direkt ablesen.

Annahme, der Kreis hat den Mittelpunkt $M(m_1 | m_2)$ und den Radius r .

Dann lautet die eine Kreisgleichung:

[Man nennt diese Gleichung auch „Parametergleichung“ des Kreises.]

$$K : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \right]^2 = r^2$$

Mittelpunkt

Radius (quadriert)

Die andere Kreisgleichung lautet:

[Man nennt diese Gleichung auch „Koordinatengleichung“ des Kreises.]

$$K : (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$$

Koordinaten des Mittelpunktes

Radius (quadriert)

Aufgabe 1

Es sei der Kreis mit Mittelpunkt $M(3|4)$ und Radius $r=5$.

Wie lauten die beiden Gleichungen dieses Kreises?

Lösung:

$$K : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right]^2 = 25 \quad \text{bzw.} \quad K : (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = 25$$

Bemerkung:

Die rechte Kreisgleichung nimmt man eigentlich immer, wenn man mit der Gleichung was rechnen muss. Die linke ist eigentlich nur zum dumm rumstehen. In dieser Form sind die Kreisgleichungen meistens in den Aufgaben gegeben.

Wenn man [wie meistens] nur Kreismittelpunkt und Kreisradius für irgendwelche Rechnung braucht, ist's natürlich egal aus welcher Gleichung man sie rausliest.

Aufgabe 2

Überprüfen Sie, ob es sich hierbei um eine Kugelgleichung handelt!

$$K : x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 6x_2 + 36 = 0$$

Lösung:

$$K : x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 6x_2 + 36 = 0 \quad \text{erst sortieren}$$

[Immer die Hälfte der Beizahl quadrieren und auf *beiden* Seiten dazuaddieren.]

$$x_1^2 + 2x_1 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + x_2^2 + 6x_2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 36 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 \quad | -36$$

$$x_1^2 + 2x_1 + 1^2 + x_2^2 + 6x_2 + 3^2 = 1^2 + 3^2 - 36$$

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 3)^2 = -26$$

Das war's auch schon. Der Mittelpunkt wäre $M(-1 | -3)$, aber der Radius wäre $r = \sqrt{-26}$ und das ist unmöglich. Auf deutsch: es handelt sich um *keine Kreisgleichung*.

V.06.02 Schnitt Kreis-Gerade (§§)

Vorab zu Geradengleichungen:

Geradengleichungen haben im 2-Dimensionalen zwei Darstellungsmöglichkeiten:

→ die Koordinatenform: z.B. $y = 2x + 3$ [kennt man aus der Analysis]

→ die Parameterform: z.B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ [kennt man aus der Vektorgeometrie]

Es wäre gut, wenn Sie wüssten, wie man eine Form in die andere umwandelt:

Koordinatenform → Parameterform:

z.B. $y = 2x + 3$: man sucht sich zwei Punkte,

$$\text{z.B. } x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \Rightarrow P_1(1 | 5)$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2 \cdot 2 + 3 = 7 \Rightarrow P_2(2 | 7)$$

die Parameterform lautet nun: $x = (P_1) + t \cdot (P_2 - P_1) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2-1 \\ 7-5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Parameterform → Koordinatenform:

z.B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zeilenweise hinschreiben:

$$\text{Zeile 1: } x = 1 + t \cdot 1 \text{ nach „t“ auflösen} \Rightarrow t = \dots = x - 1$$

$$\text{Zeile 2: } y = 5 + t \cdot 2 \text{ t hier einsetzen} \Rightarrow y = 5 + (x - 1) \cdot 2 \Rightarrow \dots \Rightarrow y = 2x + 3$$

Eine Kugel mit einer Gerade zu schneiden, ist verhältnismäßig einfach. Man setzt die Gerade einfach in die Kugelgleichung ein und kommt auf eine quadratische Gleichung, die man mit p-q-Formel bzw. a-b-c-Formel löst.

Aufgabe 3 [Gerade in Parameterform]

Bestimmen Sie die Schnittpunkte von $K : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right]^2 = 25$ mit $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4 [Gerade in Parameterform]

Bestimmen Sie die Schnittpunkte von $K : [\vec{x}]^2 = 26$ mit $2x + 3y = 13$.

Lösung von Aufgabe 3

Zuerst schreiben wir die Kreisgleichung anders auf [nicht unbedingt notwendig]

$$K : (x_1-4)^2 + (x_2+2)^2 = 25$$

$$\text{von der Gerade wissen wir: } \begin{array}{l} x_1 = 1+1 \cdot t \\ x_2 = 2+1 \cdot t \end{array}$$

Nun setzen wir diese x_1 , x_2 von der Geraden in die Kreisgleichung ein, der Rest läuft dann von selbst.

$$(1+1t-4)^2 + (2+1t+2)^2 = 25 \quad \text{ausrechnen}$$

$$(t-3)^2 + (t+4)^2 = 25$$

$$t^2-6t+9 + t^2+8t+16 = 25 \quad \text{zusammenfassen}$$

$$2t^2 + 2t + 25 = 25 \quad | -25$$

$$2t^2 + 2t = 0 \Rightarrow t \cdot (2t+2) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow t_1 = 0 \vee t_2 = -1$$

Die Werte von „t“ wieder in die Gerade einsetzen, da wo „t“ herkommt.

$$t_1 = 0 \text{ in } g \Rightarrow \mathbf{S_1(1|2)}$$

$$t_2 = -1 \text{ in } g \Rightarrow \mathbf{S_2(0|1)}$$

Lösung von Aufgabe 4

In dieser Aufgabe heißen die Variablen offensichtlich nicht x_1 und x_2 , sondern x und y .

Ich hoffe, dass ist Ihnen egal.

Für den Fall, dass die Kugelgleichung Sie irritiert:

Stellen Sie sich statt: $[\vec{x}]^2 = 26$ einfach $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]^2 = 26$ vor.

Der Kreismittelpunkt liegt bei $M(0|0)$, der Radius ist $r = \sqrt{26}$.

Die umgeschriebene Kreisgleichung lautet $x^2 + y^2 = 26$ [bzw $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 26$]

In der Geradengleichung lösen wir entweder nach x oder y auf.

$2x+3y=13 \Rightarrow \dots \Rightarrow x=6,5-1,5y$. Dieses x setzen wir in die Kreisgleichung ein.

$x=6,5-1,5y$ in $x^2+y^2=26 \Rightarrow (6,5-1,5y)^2+y^2=26 \Rightarrow \dots \Rightarrow 3,25y^2-19,5y+42,25=26$

p-q-Formel oder a-b-c-Formel liefert für diese Gleichung die beiden Werte:

$y_1=1$ $y_2=5$. Beide y -Werte in „ $2x+3y=13$ “ einsetzen.

$y_1=1 \Rightarrow x_1=5 \Rightarrow$ erster Schnittpunkt: $\mathbf{S_1(5|1)}$

$y_2=5 \Rightarrow x_2=-1 \Rightarrow$ zweiter Schnittpunkt: $\mathbf{S_2(-1|5)}$

V.06.03 Schnitt Kreis-Kreis (φ)

Zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2 schneiden sich, wenn gilt:

$$|r_1 - r_2| < d(M_1, M_2) < r_1 + r_2$$

Wenn man zwei Kreise miteinander schneidet, erhält man leider nicht sofort die Schnittpunkte, sondern „nur“ die Gleichung einer Geraden, auf der diese Schnittpunkte liegen. [Man erhält sogar dann eine Geradengleichung, wenn sich die beiden Kreise gar nicht schneiden, es also gar keine Schnittpunkte gibt.] **Erstaunlich, erstaunlich !!**

Man sollte also auf *jeden* Fall prüfen ob sich die Kreise tatsächlich schneiden.

Man schneidet zwei Kreise, indem man die beiden Kreisgleichungen voneinander abzieht. Dann erhält man die Gleichung der Gerade, in der sich der Schnittpunkt befindet.

Danach nimmt man irgendeine der beiden Kreisgleichung und schneidet sie mit der erhaltenen Geradengleichung (Schnitt Gerade-Kreis, siehe Kap. V.06.02).

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Schnittpunkte von $K_1 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right]^2 = 25$ mit $K_2 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -10 \\ 12 \end{pmatrix} \right]^2 = 221$.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Schnittpunkte von $K_1 : |\vec{x}|^2 = 26$ mit $K_2 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} \right]^2 = 130$

Lösung von Aufgabe 5

Beide Kreisgleichung umschreiben

$$K_1 : (x_1-4)^2 + (x_2+2)^2 = 25 \quad \text{bzw.} \quad K_2 : (x_1+10)^2 + (x_2-12)^2 = 221$$

Alle Klammern auflösen

$$K_1 : x_1^2 - 8x_1 + 16 + x_2^2 + 4x_2 + 4 = 25 \quad \left[\begin{array}{l} \\ \leftarrow \end{array} \right.$$

$$K_2 : x_1^2 + 20x_1 + 100 + x_2^2 - 24x_2 + 144 = 221 \quad \left[\begin{array}{l} \\ \leftarrow \end{array} \right.$$

$$-28x_1 - 84 + 28x_2 - 140 = -196 \Rightarrow \dots \Rightarrow -28x_1 + 28x_2 = 28$$

In der Geradengleichung lösen wir z.B. nach x_2 auf.

$x_2 = 1 + x_1$ setzt man z.B. in K_1 ein.

$$(x_1-4)^2 + (1+x_1+2)^2 = 25 \Rightarrow (x_1-4)^2 + (x_1+3)^2 = 25$$

$$\Rightarrow x_1^2 - 8x_1 + 16 + x_1^2 + 6x_1 + 9 = 25 \Rightarrow \dots \Rightarrow 2x_1^2 - 2x_1 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1 \cdot (2x_1 - 2) = 0$$

diese Gleichung liefert zwei Werte für x_1 : $x_{11} = 0$ $x_{12} = 1$

Beide x_1 -Werte in „ $-28x_1 + 28x_2 = 28$ “ einsetzen.

$$x_{11} = 0 \Rightarrow x_{21} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{erster Schnittpunkt: } \mathbf{S_1(0|1)}$$

$$x_{12} = 1 \Rightarrow x_{22} = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{zweiter Schnittpunkt: } \mathbf{S_2(1|2)}$$

Lösung von Aufgabe 6

Beide Kreisgleichung umschreiben

$$K_1 : x_1^2 + x_2^2 = 26 \quad \text{bzw.} \quad K_2 : (x_1-8)^2 + (x_2-12)^2 = 130$$

Alle Klammern auflösen

$$K_1 : x_1^2 + x_2^2 = 26 \quad \left[\begin{array}{l} \\ \leftarrow \end{array} \right.$$

$$K_2 : x_1^2 - 16x_1 + 64 + x_2^2 - 24x_2 + 144 = 130 \quad \left[\begin{array}{l} \\ \leftarrow \end{array} \right.$$

$$16x_1 - 64 + 24x_2 - 144 = 104 \Rightarrow \dots \Rightarrow 16x_1 + 24x_2 = 104$$

In der Geradengleichung lösen wir entweder nach x_1 oder x_2 auf.

$16x_1 + 24x_2 = 104 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1 = 6,5 - 1,5x_2$. Dieses setzen wir in die Kreisgleichung ein.

$$x_1 = 6,5 - 1,5x_2 \text{ in } x_1^2 + x_2^2 = 26 \Rightarrow (6,5 - 1,5x_2)^2 + x_2^2 = 26 \Rightarrow \dots \Rightarrow 3,25x_2^2 - 19,5x_2 + 42,25 = 26$$

p-q-Formel oder a-b-c-Formel liefert für diese Gleichung die beiden Werte:

$x_{21}=1$ und $x_{22}=5$. Beide y -Werte in „ $16x_1+24x_2=104$ “ einsetzen.
 $x_{21}=1 \Rightarrow x_{11}=5 \Rightarrow$ erster Schnittpunkt: $S_1(5|1)$
 $x_{22}=5 \Rightarrow x_{12}=-1 \Rightarrow$ zweiter Schnittpunkt: $S_2(-1|5)$

V.06.04 Abstand Kreis-Punkt (fff)

Bei Kugeln führt man jede Abstandsberechnung auf den Mittelpunkt zurück.
 D.h. bei Abstand Kugel-Punkt berechnet man den Abstand vom Mittelpunkt zum gegebenen Punkt und zieht den Kugelradius ab.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie den Abstand von $K : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right]^2 = 16$ zu $P(-3|6)$.

Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass $A(4|7)$ auf der Kugel $K : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right]^2 = 25$ liegt und der Punkt $B(3|-1)$ außerhalb von K .

Lösung von Aufgabe 7:

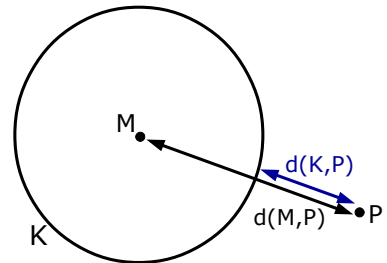
Wir berechnen zuerst den Abstand vom Mittelpunkt M zum Punkt P .

$$d(M,P) = \left| \begin{pmatrix} -3 & - \\ 6 & - \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$$

Da der Kreisradius $r=4$ ist,

ist der Abstand vom Kreis zum Punkt P :

$$d(K,P) = d(M,P) - r = 10 - 4 = 6$$



Lösung von Aufgabe 8

Der Punkt A liegt auf dem Kreis, wenn der Abstand von diesem Punkt zum Mittelpunkt genau so groß ist wie der Kreisradius.

Unser Kreis hat den Mittelpunkt bei $M(7|3)$ und einen Radius von $r=5$.

Der Abstand von A zum Mittelpunkt ist:

$$d(M,A) = \left| \begin{pmatrix} 4 & - \\ 7 & - \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

Der Abstand von A zu M ist 5 , genauso groß wie der Radius.

Der Punkt A liegt also auf dem Kreis.

Der Abstand von B zum Mittelpunkt

$$d(M,B) = \left| \begin{pmatrix} 3 & - \\ -1 & - \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} \approx 5,66$$

Der Abstand von B zu M ist größer als der Radius.

Der Punkt B liegt also außerhalb des Kreises.

V.06.05 Abstand Kreis-Gerade (fff)

Bei Kreisen führt man jede Abstandsberechnung auf den Mittelpunkt zurück. D.h. bei Abstand Kreis-Gerade berechnet man den Abstand vom Mittelpunkt zur gegebenen Gerade und zieht den Kreisradius ab. Die Gerade sollte man in Koordinatenform umwandeln [falls sie es nicht bereits ist].

Aufgabe 9 [Gerade in Koordinatenform]

Bestimmen Sie den Abstand von $K : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 = 5$ zu $g : 2x+y=-12$

Aufgabe 10

Zeigen Sie, dass $t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Tangente an $K : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^2 = 100$ ist.

Lösung von Aufgabe 9:

Der Mittelpunkt des Kreises ist $M(6|1)$, der Radius ist $r=\sqrt{5}$.

Nun bestimmen wir den Abstand des Mittelpunktes zur Geraden.

Die Gerade ist idealerweise bereits in Koordinatenform angegeben, also verwenden wir die HNF [HNF=Hesse-Normalform, siehe Kap. V.03.07].

g in HNF umwandeln:

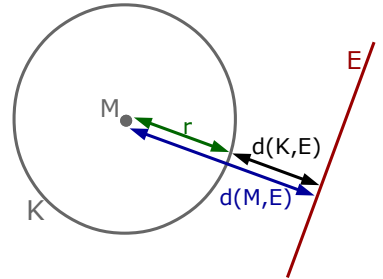
$$2x+y=-12 \Leftrightarrow 2x+y+12=0 \Leftrightarrow \frac{2x+y+12}{\sqrt{2^2+1^2}}=0 \Leftrightarrow \frac{2x+y+12}{\sqrt{5}}=0$$

Nun berechnen wir den Abstand vom Mittelpunkt zur Gerade [M in HNF einsetzen]

$$d(M,g) = \frac{2 \cdot 6 + 1 + 12}{\sqrt{5}} = \frac{25}{\sqrt{5}} \quad [\text{vereinfachen wäre geschickt}] = \frac{25 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{25 \cdot \sqrt{5}}{5} = 5 \cdot \sqrt{5}$$

Der Abstand von der Geraden zum Kreis bestimmen.

$$d(K,g) = d(K,M) - r = 5 \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$



Lösung von Aufgabe 10:

Eine Gerade ist Tangente an einen Kreis, wenn der Abstand von der Gerade zum Kreis Null ist, d.h. wenn der Abstand von der Gerade zum Kreismittelpunkt genauso groß wie der Radius ist.

Der Mittelpunkt des Kreises ist $M(-3|0)$, der Radius des Kreises ist $r=10$.

Die Gerade sollte in Koordinatenform umgewandelt werden [für die HNF].

$$t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 8 - 3 \cdot r \\ x_2 = 2 + 4 \cdot r \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot 4 \quad + \\ | \cdot 3 \quad - \end{array} \Rightarrow 4x_1 + 3x_2 = 38$$

$$\text{Die HNF der Gerade lautet: } \Leftrightarrow \frac{4x_1 + 3x_2 - 38}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{4x_1 + 3x_2 - 38}{5} = 0$$

Den Abstand vom Mittelpunkt $M(-3|0)$ zur Gerade berechnen [M in HNF einsetzen] ...

$$d(M,g) = \frac{|4 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 - 38|}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

Der Abstand von der Geraden zum Kreis ist genau so groß wie der Kreisradius, die Gerade t ist tatsächlich eine Tangente.

V.06.06 Abstand Kreis-Kreis (fff)

Bei Kreisen führt man jede Abstandsberechnung auf den Mittelpunkt zurück.
D.h. bei Abstand zweier Kreise berechnet man den Abstand beider Mittelpunkte und zieht beide Kreisradien ab.

Aufgabe 11

Bestimmen Sie den Abstand von $K_1 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix} \right]^2 = 9$ und $K_2 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right]^2 = 25$

Aufgabe 12

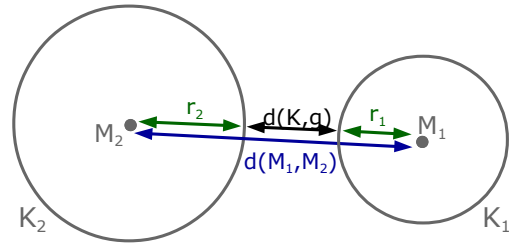
Zeigen Sie, dass sich die beiden Kreise K_1 und K_2 berühren.
Es gilt: $K_1: (x_1-2)^2 + (x_2+4)^2 = 4$ und $K_2: (x_1+2)^2 + (x_2+1)^2 = 49$

Lösung von Aufgabe 11:

Erst Abstand von M_1 zu M_2 berechnen:

$$\begin{aligned} d(M_1, M_2) &= |\vec{M}_1 \vec{M}_2| = \left| \begin{pmatrix} 5 & -(-7) \\ 3 & -(-2) \end{pmatrix} \right| = \\ &= \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d(K_1, K_2) = d(M_1, M_2) - r_1 - r_2 = 13 - 3 - 5 = 5$$



Lösung von Aufgabe 12:

Zwei Kreise berühren sich, wenn der Abstand der beiden Mittelpunkte gleich der Summe beider Radien ist, also für $d(M_1, M_2) = r_1 + r_2$ oder $d(M_1, M_2) = |r_1 - r_2|$ [im letzten Fall berühren sich die Kreise von innen.]

Der Abstand beider Mittelpunkte beträgt:

$$d(M_1, M_2) = |\vec{M}_1 \vec{M}_2| = \left| \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

Die beiden Radien haben die Länge: $r_1 = 2$ und $r_2 = 7$.

Es gilt zwar nicht: $d(M_1, M_2) = r_1 + r_2$,

aber $d(M_1, M_2) = |r_1 - r_2| \Rightarrow K_1$ und K_2 berühren sich von innen.