Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter **www.mathe-laden.de** bestellen (falls Sie das möchten).
Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht aus dem Internet herunter geladen werden können.
Dazu gehören:
Inhaltsverzeichnis, **Stichwortverzeichnis**, und viele **Aufgaben zum Selberrechnen**.

Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.
Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

Sie können diese Datei gerne beliebig für den eigenen Gebrauch verwenden.
Nicht gestattet sind Änderungen sowie kommerzielle Nutzung.

matheseite
Die gute Seite an Mathe.

V.05 Diverses (∰)

V.05.01 Winkel bei Geraden und/oder Ebenen (∰)

Winkel zwischen **Gerade und Gerade**:
$\vec{u}, \vec{v}$ sind die Richtungsvektoren der beiden Geraden

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Winkel zwischen **Ebene und Ebene**:
$\vec{n}_1, \vec{n}_2$ sind die Normalenvektoren der beiden Ebenen

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Winkel zwischen **Gerade und Ebene**:
$\vec{u}, \vec{n}$ sind: Richtungsvektoren der Geraden
bzw. Normalenvektor der Ebene

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

Aufgabe 1

Bestimme den Winkel zwischen $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

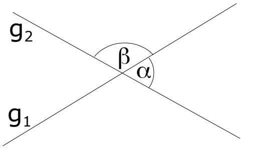
Lösung:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|(-4) \cdot 2 + (-1) \cdot 7 + 8 \cdot 4|}{\sqrt{81} \cdot \sqrt{69}} = \frac{17}{\sqrt{5589}} \approx 0{,}227$$

$\Rightarrow \quad \alpha = \arccos(0{,}227) = \mathbf{76{,}9°}$ Eingabe in T.R.: $\alpha = \cos^{-1}(0{,}227)$

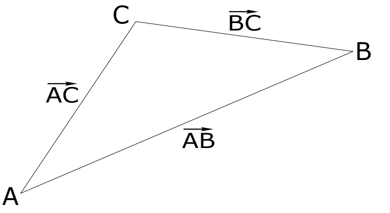
Winkel bei Anschaulichem

Wenn man zwei Geraden [oder zwei Ebenen] schneidet, erhält man immer zwei Winkel. Der eine ist größer, der andere ist kleiner als 90°. Der Betrag in der Winkelformel sorgt nun dafür, dass man immer den Winkel erhält, der kleiner als 90° ist.



So geschickt dies auch sein mag, gibt es manche Fälle, in denen das blöd ist. Stellt wir uns mal vor, wir müssten den Innenwinkel in einem Dreieck ausrechnen. Es könnte sich ja nun um einen stumpfen Winkel handeln [der größer als 90° ist]. Nun rechnen wir frisch&fröhlich den Winkel zwischen den Dreiecksseiten aus und bekommt *immer* einen Winkel `raus, der kleiner als 90° ist, also unter Umständen genau den falschen.

Innenwinkel im Dreieck



Um in einem Dreieck beispielsweise den Winkel bei A zu erhalten, rechnet man die Vektoren der anliegenden Schenkel [1] aus, wobei man beachten muss, beide Male zu A hinzurechnen, oder beide Male von A weg. [Man muss also die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ nehmen oder man nimmt $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{CA}$. Jedoch darf man nicht einmal $\overrightarrow{AB}$ und dann $\overrightarrow{CA}$ nehmen.]

Beachten Sie, dass im Zähler *keine* Betragsstriche stehen!

In diesem Dreieck gilt also:

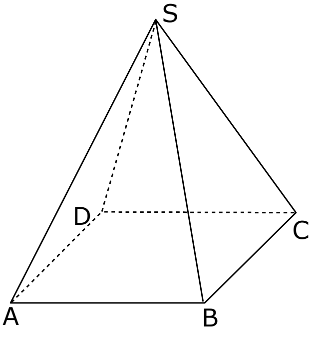
$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} \qquad \cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} \qquad \cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|}$$

oder oder oder

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{CA}|} \qquad \cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} \qquad \cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$$

Das wars. War's schlimm ?

Winkel zwischen Pyramidenflächen



[Wir reden hier *nur* von senkrechten, quadratischen Pyramiden. Bei anderen lässt sich nichts so einfach aussagen.]

Bei Pyramiden ist die Sache sogar noch einfacher als bei Dreiecken. Man muss sich nur `mal klar machen, dass die Winkel zwischen zwei Seitenflächen *immer* zwischen 90° und 180° liegen. Die Winkel zwischen einer Seitenfläche und einer Grundfläche sind *immer* kleiner als 90°.

Das führt uns dazu, dass wir die ganz normale Winkelformel für zwei Ebenen nehmen können.

Diese Formel liefert ja immer Winkel, die kleiner als 90° sind. Wenn man also den Winkel zwischen Grundfläche und einer Seitenfläche sucht, ist man fertig. Wenn man den Winkel zwischen zwei Seitenflächen sucht, kriegt man genau den falschen [man erhält ja einen, der kleiner 90° ist, sucht aber einen der größer als 90° ist].

Weil man aber *immer* den falschen kriegt, muss man einfach 180-α rechnen und hat den gesuchten Winkel.

---

1 wie das schon klingt... „anliegende Schenkel" .... [zurück zu Mathe!!]

Pi mit 2000 Nachkommastellen (∮)

π≈3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209
74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651
32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102
70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196 44288 10975 66593 34461
28475 64823 37867 83165 27120 19091 45648 56692 34603 48610 45432
66482 13393 60726 02491 41273 72458 70066 06315 58817 48815 20920
96282 92540 91715 36436 78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841
46951 94151 16094 33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179
31051 18548 07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011
94912 98336 73362 44065 66430 86021 39494 63952 24737 19070 21798
60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674 81846 76694 05132 00056
81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091 73637 17872 14684 40901
22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925 89235 42019 95611 21290
21960 86403 44181 59813 62977 47713 09960 51870 72113 49999 99837
29780 49951 05973 17328 16096 31859 50244 59455 34690 83026 42522
30825 33446 85035 26193 11881 71010 00313 78387 52886 58753 32083
81420 61717 76691 47303 59825 34904 28755 46873 11595 62863 88235
37875 93751 95778 18577 80532 17122 68066 13001 92787 66111 95909
21642 01989 38095 25720 10654 85863 27886 59361 53381 82796 82303
01952 03530 18529 68995 77362 25994 13891 24972 17752 83479 13151
55748 57242 45415 06959 50829 53311 68617 27855 88907 50983 81754
63746 49393 19255 06040 09277 01671 13900 98488 24012 85836 16035
63707 66010 47101 81942 95559 61989 46767 83744 94482 55379 77472
68471 04047 53464 62080 46684 25906 94912 93313 67702 89891 52104
75216 20569 66024 05803 81501 93511 25338 24300 35587 64024 74964
73263 91419 92726 04269 92279 67823 54781 63600 93417 21641 21992
45863 15030 28618 29745 55706 74983 85054 94588 58692 69956 90927
21079 75093 02955 32116 53449 87202 75596 02364 80665 49911 98818
34797 75356 63698 07426 54252 78625 51818 41757 46728 90977 77279
38000 81647 06001 61452 49192 17321 72147 72350 14144 19735 68548
16136 11573 52552 13347 57418 49468 43852 33239 07394 14333 45477
62416 86251 89835 69485 56209 92192 22184 27255 02542 56887 67179
04946 01653 46680 49886 27232 79178 60857 84383 82796 79766 81454
10095 38837 86360 95068 00642 25125 20511 73929 84896 08412 84886
26945 60424 19652 85022 21066 11863 06744 27862 20391 94945 04712
37137 86960 95636 43719 17287 46776 46575 73962 41389 08658
32645 99581 33904 78027 59009 …………

V.05.02 Skalarprodukt, Orthogonalität von Vektoren (∰)

Das Skalarprodukt stellt anschaulich nichts (Wissenswertes) dar,
es gibt nur zwei nennenswerte Bedeutungen:

→ für die Winkelberechnung [siehe V.05.01 (letztes Kapitel)]

→ wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, ergibt ihr Skalarprodukt Null
[diese, zweite Bedeutung ist sehr wichtig und sollte nicht vergessen werden]

→ **Die Formel für das Skalarprodukt!**

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Das Skalarprodukt ist immer eine Zahl und kein Vektor!

Der häufigste Fehler beim Skalarprodukt: $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ +6 \\ +6 \end{pmatrix}$ ← **falsch !!**

Zwar stimmen die Einträge „-4", „+6" und „+6" im Ergebnis, jedoch werden diese nicht übereinander in einen Vektor geschrieben, sondern zusammengezählt.

Richtig ist $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 +6 +6 = 8$ ← **richtig !!**

Aufgabe 2

Bestimmen das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \cdot 2 + (-6) \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 - 18 + 6 = 0$$

[Übrigens: weil als Ergebnis „0" `rauskommt, stehen die Vektoren senkrecht aufeinander]

Aufgabe 3

Untersuche die Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ auf Orthogonalität.

Lösung:
Auf „Orthogonalität" untersuchen, heißt: wir müssen schauen, ob die Geraden senkrecht aufeinander stehen. Dazu verwenden wir die Richtungsvektoren.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \cdot 4 + 1 \cdot 7 + 8 \cdot (-4) = 16 + 7 - 32 = -9$$

Da nicht Null rauskommt, sind die Geraden nicht orthogonal !

V.05.03 Kreuzprodukt bzw. Vektorprodukt (∰)

[Falls Sie das Kreuzprodukt in der Schule nicht lernen, dürfen Sie dieses Kapitel gerne überspringen.]
Das Kreuzprodukt ist eine sehr einfache Methode um einen Vektor zu berechnen, der auf zwei anderen senkrecht steht (*die einfachste Methode überhaupt!*).
Die Hauptanwendung ist wohl die Berechnung des Normalenvektors einer Ebene
[siehe→ „Kap V.01.06, Parameterform in Koordinatenform, erster Weg"!]
Eine weitere recht interessante Anwendung ist die Flächenberechnung von Dreiecken und Parallelogrammen [Kap V.05.07] und die Volumenberechnung von Pyramiden [Kap V.07.04].

Aufgabe 4

Bestimme den Vektor $\vec{c}$, der auf den beiden Vektoren

$\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\3\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix}$ senkrecht steht!

Lösung:
Um das sogenannte Kreuzprodukt anzuwenden, schreiben wir beide Vektoren zweimal übereinander hin.

$$\begin{array}{rr} -3 & -1 \\ 3 & -4 \\ -1 & 3 \\ -3 & -1 \\ 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \cancel{-3} & \cancel{-1} \\ 3 & -4 \\ -1 & 3 \\ -3 & -1 \\ 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{array} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 \quad - \quad (-1)\cdot 4 \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

(Im ersten Schritt streichen wir die ersten Zeile. Anschließend multiplizieren wir „über Kreuz" „links oben mal rechts unten"
minus
„links unten mal rechts oben"
Das Ergebnis ist die erste Zeile des gesuchten Vektors.

$$\begin{array}{rr} \cancel{-3} & \cancel{-1} \\ \cancel{3} & \cancel{-4} \\ -1 & 3 \\ -3 & -1 \\ 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{array} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 & - & (-1)\cdot 4 \\ (-1)\cdot(-1) & - & (-3)\cdot 3 \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ \\ \end{pmatrix}$$

(Im zweiten Schritt streichen wir auch die zweite Zeile. Anschließend multiplizieren wir wieder „über Kreuz" „links oben mal rechts unten" minus
„links unten mal rechts oben"
Das Ergebnis ist die zweite Zeile des gesuchten Vektors.

$$\begin{array}{rr} \cancel{-3} & \cancel{-1} \\ \cancel{3} & \cancel{-4} \\ \cancel{-1} & \cancel{3} \\ -3 & -1 \\ 3 & -4 \\ -1 & 3 \end{array} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 & - & (-1)\cdot 4 \\ (-1)\cdot(-1) & - & (-3)\cdot 3 \\ (-3)\cdot(-4) & - & 3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(Im dritten Schritt streichen wir auch die dritte Zeile und rechnen wieder wie vorher „über Kreuz" Das Ergebnis ist die dritte Zeile des gesuchten Vektors.

Aufgabe 5

Bestimme den Vektor $\vec{n}$, der auf den beiden Vektoren

$\vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix}$ senkrecht steht!

Lösung:
Um das sogenannte Kreuzprodukt anzuwenden, schreiben wir beide Vektoren zweimal übereinander hin und wenden die Regel an.
Folgende Rechnung gilt mathematisch nur als Nebenrechnung:

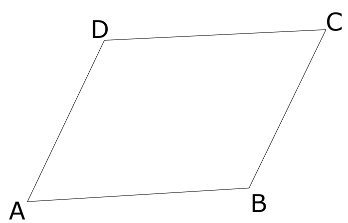
$$\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 0 & -3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 0 & -3 \end{array} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-3) & - & 0\cdot(-2) \\ 0\cdot 2 & - & (-1)\cdot(-3) \\ (-1)\cdot(-2) & - & 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & - & 0 \\ 0 & - & 3 \\ 2 & - & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die mathematische Schreibweise wäre einfach nur: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Wichtige Beispiele und Anwendungen vom Kreuzprodukt sind:
→ Umwandlung einer Ebene von Parameterform in Koordinatenform in Kap. V.01.06 (Seite Fehler: Referenz nicht gefunden)
→ Bestimmung der Fläche eines Dreiecks in Kap. V.05.07 (Seite 12)
→ Bestimmung des Volumens einer Pyramide in Kap. V.07.04 (**Seite**).

V.05.04 Vierte Punkt eines Parallelogramms

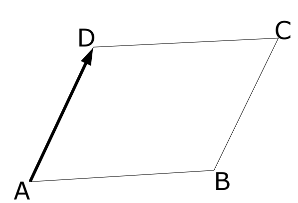
Es geht um folgende Problematik:
Man hat drei Punkte gegeben und sucht nun einen vierten Punkt derart, dass die vier Punkte ein Parallelogramm ergeben. [Statt „Parallelogramm" kann auch „Quadrat" oder „Rechteck" oder „Raute" gefragt sein. Alles das gleiche Prinzip.]
Es handelt sich hier um eine sehr einfache Rechnung. Dennoch ist es sehr wichtig, denn die Frage ist sehr wichtig und taucht regelmäßig in Klassenarbeiten und Prüfungen auf.



Es gibt mehrere Möglichkeiten, wobei ich die erste am besten finde.

Aufgabe 6
Gegeben sind die Punkte A(2|-1|5), B(1|1|3) und C(0|4|2).
Bestimmen Sie den Punkt D so, dass ABCD ein Parallelogramm ist.

Lösungweg 1:
[Ob statt „Parallelogramm" das Wort „Quadrat" oder „Raute" oder „Rechteck" verwendet wird, ist völlig wurscht. Die Rechnung wäre immer genau die gleiche.]
Man erhält den Punkt D, indem man auf den Punkt A den Vektor $\overrightarrow{AD}$ dazuaddiert. $D = A + \overrightarrow{AD}$



Dummerweise kennen wir den Vektor $\overrightarrow{AD}$ nicht, aber $\overrightarrow{AD}$ ist der gleiche Vektor wie $\overrightarrow{BC}$ $\Rightarrow$ $D = A + \overrightarrow{BC}$.
Da man Punkte und Vektoren nicht addieren kann, muss die Schreibweise verschönert werden.
Statt $D = A + \overrightarrow{BC}$ schreibt man: $\mathbf{\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 4 - 1 \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D(1|2|4)}$$

Lösungweg 2:
Den Punkt D benennen wir mit $D(d_1|d_2|d_3)$.
Die Vektoren $\overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{BC}$ sind gleich. Es gilt also: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ $\Rightarrow$ $d-a=c-b$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} d_1 - 2 \\ d_2 - (-1) \\ d_3 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 4 - 1 \\ 2 - 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} d_1-2 = -1 \\ d_2+1 = 3 \\ d_3-5 = -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} d_1 = 1 \\ d_2 = 2 \\ d_3 = 4 \end{array} \Rightarrow \mathbf{D(1|2|4)}$$

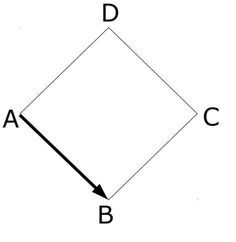
Es gibt noch einige weitere Lösungswege, aber auf die verzichten wir.

Aufgabe 7

Gegeben sind die Punkte $A(1|5|4)$, $C(9|10|1)$ und $D(3|8|-2)$.
Bestimmen Sie den Punkt B so, dass ABCD ein Quadrat ist.

Lösung:
Man erhält den Punkt B, indem man auf den Punkt A den Vektor $\overrightarrow{AB}$ dazuaddiert. $B = A + \overrightarrow{AB} = A + \overrightarrow{DC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 - 3 \\ 10 - 8 \\ 1 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B(7|7|7)}$$



V.05.05 Punkt im Inneren eines Parallelogramms / Dreiecks (∰)

Gegeben sind ein Parallelogramm [kann also auch ein Rechteck, Raute oder Quadrat sein] oder ein Dreieck, sowie ein weiterer Punkt.
Man muss feststellen, ob dieser weitere Punkt im Inneren des Parallelogramms bzw. des Dreiecks liegt oder außerhalb.
Man stellt die Ebene des Parallelogramms oder des Dreiecks auf und macht eine Punktprobe mit dem weiteren Punkt. Je nachdem was für Werte für die Parameter der Ebenengleichung rauskommen, liegt der Punkte innen oder außen.

Details sind in den nächsten zwei Aufgaben beschrieben.

Aufgabe 8

Gegeben ist ein Parallelogramm mit den Eckpunkten A(2|-5|-1), B(6|3|3), C(8|7|9) und D(4|-1|5) sowie der Punkt P(6|3|5).
Prüfen Sie, ob der Punkt P im Inneren des Parallelogramms liegt.

Aufgabe 9

Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten A(2|-5|-1), B(6|-3|1), C(6|3|7) sowie der Punkt Q(5|-2|2).
Prüfen Sie, ob der Punkt Q im Inneren des Dreiecks liegt.

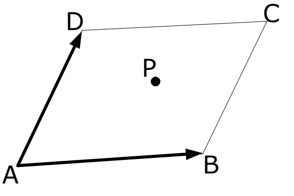
Aufgabe 10

Gegeben ist das Rechteck ABCD mit den Eckpunkten A(-4|0|3), B(-2|1|1), C(1|7|7) und D(-1|6|9) sowie der Punkt P(4|2|-1).
Prüfen Sie, ob der Punkt P im Inneren des Rechtecks liegt.

Aufgabe 11

Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten R(1|2|3), S(3|0|1), T(5|6|-3) sowie der Punkt U(7|4|-5).
Prüfen Sie, ob der Punkt U im Inneren des Dreiecks liegt.

Lösung von Aufgabe 8



→ **Eine Parametergleichung der Ebene E bestimmen.**
Als Stützvektor irgendeinen Eckpunkt wählen und dann als Richtungsvektor [unbedingt!] von diesem Eckpunkt zu den benachbarten Eckpunkten gehen.
Wir wählen A als Stützvektor und $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ als Richtungsvektoren. $\Rightarrow$ $E_{ABCD}: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$

→ **Eine Punktprobe von P mit der Ebene E machen.**

$$\begin{pmatrix}6\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$$

als LGS aufschreiben und die Gleichungen verrechnen

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 6=2+4r+2s & |\cdot 2 \\ \text{II} & 3=-5+8r+4s & - \\ \text{III} & 5=-1+4r+6s & - \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{I} & 6=2+4r+2s \\ \text{II'} & 9=9 \\ \text{III'} & 1=3 \quad -4s \end{array}$$

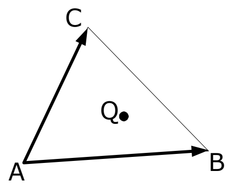
Gleichung II' liefert eine wahre Aussage und ist damit nicht von Bedeutung.
Gleichung III' liefert s=0,5. Das setzt man in Gleichung I ein und erhält r=0,5.

→ Interpretation:
- → **Liegen beide Parameter zwischen 0 und 1, ist der Punkt im Inneren.**
- → **Anderenfalls liegt der Punkt außerhalb des Parallelogramms.**

In unserer Aufgabe liegen beide Parameter zwischen 0 und 1 [r=0,5 s=0,5], daher liegt der Punkt P im Inneren des Parallelogramms!

Lösung von Aufgabe 9

→ **Eine Parametergleichung der Ebene E bestimmen**.
Als Stützvektor irgendeinen Eckpunkt wählen und dann als Richtungsvektor [unbedingt!] von diesem Eckpunkt zu den benachbarten Eckpunkten gehen.
Wir wählen A als Stützvektor und $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ als Richtungsvektoren. $\Rightarrow$ $E_{ABCD}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$



→ **Eine Punktprobe von Q mit der Ebene E machen**.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

als LGS aufschreiben und die Gleichungen verrechnen

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 5 = 2+4r+4s & \\ \text{II} & -2 = -5+2r+8s & |\cdot 2 \\ \text{III} & 2 = -1+2r+8s & |\cdot 2 \end{array} \quad - \quad - \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{I} & 5 = 2+4r+4s \\ \text{II'} & 9 = 12 \quad -12s \\ \text{III'} & 1 = 4 \quad -12s \end{array}$$

Sowohl Gleichung II' als auch Gleichung III' liefern s=0,25. Das setzt man in Gleichung I ein und erhält r=0,5.

→ Interpretation:
- → **Ist jeder Parameter positiv und die Summe beider Parameter ist kleiner als 1, ist der Punkt im Inneren** (also bei $r>0$, $s>0$ und $r+s<1$)**.**
- → **Anderenfalls liegt der Punkt außerhalb des Parallelogramms.**

In unserer Aufgabe sind beide Parameter positiv, die Summe der Parameter ist kleiner als 1, daher liegt der Punkt P im Inneren des Dreiecks!

Lösung von Aufgabe 10

→ Eine Parametergleichung der Ebene E bestimmen.

$$E_{ABCD}: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

→ **Eine Punktprobe von P mit der Ebene E machen**.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

als LGS aufschreiben und die Gleichungen verrechnen

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 1 = -4+2s+3t & |\cdot 2 \quad |\cdot 2 \\ \text{II} & 4 = 0+s+6t & \\ \text{III} & 1 = 3-2s+6t & \end{array} \quad - \quad - \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{I} & 1 = -4+2s+3t \\ \text{II'} & -2 = -8+3s \\ \text{III'} & 1 = -11+6s \end{array}$$

Gleichung II' und Gleichung III' liefern jeweils s=2. In Gleichung I eingesetzt, erhält man $t={}^{1}/_{3}$. Allein schon, weil $s>1$, liegt der Punkt P außerhalb des Rechtecks ABCD.

Lösung von Aufgabe 11

→ Eine Parametergleichung der Ebene E bestimmen.

$$E_{ABCD}: \vec{x} = \overrightarrow{OR}+\lambda\cdot\overrightarrow{RS}+\mu\cdot\overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\-6\end{pmatrix}$$

→ Eine Punktprobe von Q mit der Ebene E machen.

$$\begin{pmatrix}7\\4\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\-6\end{pmatrix}$$ als LGS aufschreiben und die Gleichungen verrechnen

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 7=1+2\lambda+4\mu \\ \text{II} & 4=2-2\lambda+4\mu \\ \text{III} & -5=3-2\lambda-6\mu \end{array} \quad + \quad + \quad \rightarrow \quad \begin{array}{lll} \text{I} & 7=1+2\lambda+4\mu & \\ \text{II'} & 11=3 & +8\mu \\ \text{III'} & 2=4 & -2\mu \end{array}$$

Sowohl Gleichung II' als auch Gleichung III' liefern $\mu=1$. Das setzt man in Gleichung I ein und erhält $\lambda=1$.

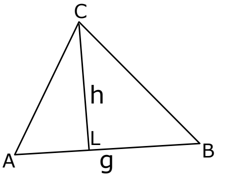
→ Interpretation:
Die Summe beider Parameter ist größer als 1 [r+s=2>1], daher liegt der Punkt U außerhalb des Dreiecks RST!

V.05.06 **Dreiecksfläche** (über A=½·g·h) (∯)

Aufgabe 12 [siehe auch Aufgabe 11]

Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(-3|0|1), B(5|8|5) und C(3|0|-2).
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Lösung:
Wir denken an die Flächeninhaltsformel: A=½·g·h
Die Grundlinie g ist: g=AB,
die Höhe geht durch C und steht senkrecht auf AB.



Die Länge der Grundlinie ist:

$$g = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix}5 & - & (-3)\\8 & - & 0\\5 & - & 1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{8^2+8^2+4^2} = 12$$

Die Länge der Höhe h ist der Abstand des Punktes C zur Grundlinie AB.
Wie man den Abstand von C zu AB berechnet, ist egal. Ich wähle die Methode über die Lotebene. [Kap. V.03.02, Seite Fehler: Referenz nicht gefunden]
Der Normalenvektor der Lotebene ist der Vektor $\overrightarrow{AB}$.

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix} \Rightarrow E_{Lot}: 8x_1+8x_2+4x_3=d$$

Um „d" zu bestimmen, setzen wir C in E_{Lot} ein $\Rightarrow$ 8·3+8·0+4·(-2)=d $\Rightarrow$ 16=d
$\Rightarrow E_{Lot}: 8x_1+8x_2+4x_3=16$
Bestimmung des Lotfußpunktes L:
Wir schneiden die Ebene E_{Lot} mit der Gerade durch A und B.
Die Gerade AB hat die Gleichung:

$$g_{AB}: \vec{x} = (A) + r\cdot(\overrightarrow{AB}) = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}$$

g_{AB} mit E_{Lot} schneiden:

$8\cdot(-3+8r)+8\cdot(0+8r)+4\cdot(1+4r)=16$

$-24+64r+64r+4+16r=0 \Rightarrow 144r=36 \Rightarrow r=\frac{1}{4}$

r=¼ in g_{Lot} einsetzen: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow$ **L(-1|2|2)**

Die Höhe ist nun der Abstand von C zu L.

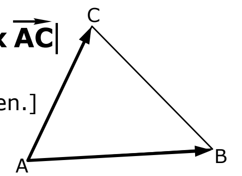
$$h = \left|\overrightarrow{CL}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1 & - & 3\\ 2 & - & 0\\ 2 & - & (-2)\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2+2^2+4^2} = 6$$

Die Fläche des Dreiecks beträgt: $A = \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 6 = 36 \quad \Rightarrow$ $\mathbf{A_{\Delta ABC} = 36}$

Diese Methode ist leider ein bisschen umständlich.
Die Methode des nächsten Kapitels finde ich besser.

V.05.07 Dreiecksfläche (über das Kreuzprodukt) (∰)

Die Fläche eines Dreiecks ABC berechnet man über: $\mathbf{A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}$



[Man könnte auch die Formeln $A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right|$ oder $A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\right|$ verwenden.]

Aufgabe 13 [siehe auch Aufgabe 10]

Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(-3|0|1), B(5|8|5) und C(3|0|-2).
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Lösung:

Den Flächeninhalt berechnet man über $A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5 & - & (-3)\\ 8 & - & 0\\ 5 & - & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3 & - & (-3)\\ 0 & - & 0\\ -2 & - & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\cdot(-3) & - & 4\cdot 0\\ 4\cdot 6 & - & 8\cdot(-3)\\ 8\cdot 0 & - & 8\cdot 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-24\\48\\-48\end{pmatrix}$$

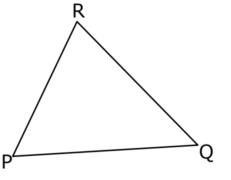
$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-24\\48\\-48\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-24)^2+48^2+(-48)^2} = 36 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A_{\Delta ABC} = 36}$$

Aufgabe 14

Gegeben ist das Dreieck PQR mit P(-1|7|-6), Q(5|-1|2) und R(10|3|-10).
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks PQR.

Lösung:

Man berechnet den Flächeninhalt über $A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right|$.



$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5 & - & (-1) \\ -1 & - & 7 \\ 2 & - & (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 10 & - & (-1) \\ 3 & - & 7 \\ -10 & - & (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \cdot (-4) & - & 8 \cdot (-4) \\ 8 \cdot 11 & - & 6 \cdot (-4) \\ 6 \cdot (-4) & - & (-8) \cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 112 \\ 64 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 64 \\ 112 \\ 64 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{64^2 + 112^2 + 64^2} = 72 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A_{\Delta PQR} = 72}$$