Übersicht:

1. Katalog (wichtige Funktionen und wie man sie aufruft)
2. Funktionen definieren (einspeichern mit und ohne Parameter)
3. Nullstellen
4. Gleichungen lösen (mit und ohne Parameter)
5. Ungleichungen lösen
6. Extrempunkte
7. Wendepunkte
8. y-Wert einer Funktion berechnen
9. Steigung einer Funktion ausrechnen
10. Tangenten und Normale bestimmen
11. Ableitungsfunktion bestimmen
12. Stammfunktion bestimmen
13. Flächen zwischen einer Funktion und der x-Achse
14. Fläche zwischen zwei Funktionen
15. Grenzwerte berechnen lassen (Limes)
16. Gleichungssysteme lösen (Matrizen)

01 Katalog: (wichtige Befehlskombinationen mit stichwortartiger Beschreibung zu deren Aufruf)

Alle genannten Befehle sind im Hauptmenü („Menü“) zu finden.

Ableitung	$\frac{d}{d\Box}(\Box)$	Menü > Analysis > Ableitung
Fläche berechnen	→ siehe „Integral“	
Funktionen definieren	:=	
Gleichungen lösen	solve	Menü > Algebra > solve
Gleichungssysteme lösen	rref	Menü > Matrix und Vektor > reduzierte Diagonalform
Grenzwert/Limes	lim	Menü > Analysis > Limes
Hochpunkt berechnen	→ siehe „Maximum“	
Integral	$\int_{\Box}^{\Box}(\Box) d\Box$	Menü > Analysis > Integral
Maximum	fMax	Menü > Analysis > Funktionsmaximum
Steigung einer Funktion	→ siehe „Gleichungssysteme lösen“	
Minimum	fMin	Menü > Analysis > Funktionsminimum
Normale	normalLine	Menü > Analysis > Normalenterm
Steigung einer Funktion	→ siehe „Ableitung“	
Tangente	tangentLine	Menü > Analysis > Tangententerm
Tiefpunkt berechnen	→ siehe „Minimum“	

Mehr als diese paar Befehle braucht man eigentlich nicht unbedingt.

02 Funktionen definieren (mit und ohne Parameter):

Damit der CAS sich eine Funktion merkt, muss man diese einspeichern. Der CAS nennt diesen Vorgang „Definieren“

Das zugehörige Zeichen lautet: **:=** (Die zugehörige Taste ist rechts von der „9“)

Beispiel 1: Nehmen wir an, wir wollen $f(x) = x^3 - 5x + 6$ einspeichern:

Wir geben in den CAS ein: „ $f(x) := x^3 - 5x + 6$ “

Beispiel 2: Nehmen wir an, wir wollen $f_t(x) = x^3 - 5tx + 6t^2$ einspeichern:

Wir geben in den CAS ein: „ $f(x,t) := x^3 - 5tx + 6t^2$ “

Ab jetzt kann man überall statt der Funktion einfach nur „ $f(x)$ “ bzw. „ $f(x,t)$ “ eingeben.

03 Nullstellen:

Der zugehörige Befehl lautet: **solve (Funktion=0 , Variable (meist „x“))**

(Findet man im Hauptmenü oben in der Menüleiste unter: Aktion > Gleich./Ungleich. > solve)

Möchte man die Nullstelle nur innerhalb eines bestimmten Intervalls, so kann man dahinter noch die Intervallgrenze eingeben. Also so: **solve (Funktion=0 , Variable (meist „x“) , linke Grenze , rechte Grenze)**

Eigentlich ist die Berechnung von Nullstellen nichts anderes als das Lösen einer Gleichung, wo auf der einen Seite „=0“ steht. (Siehe daher auch „04 Gleichungen lösen“)

Beispiel:

Nehmen wir an, wir wollen die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 3$ berechnen lassen:

- > > Der CAS zeigt: solve (
 - (Findet man im Haupt-Menü oben in der Menüleiste)
 - Nun die Funktion eingeben Der CAS zeigt: solve ($x^2 - 4x + 3$
 - „=0“ hinten dranhängen Der CAS zeigt: solve ($x^2 - 4x + 3 = 0$
 - Variable dranhängen (hier „x“) Der CAS zeigt: solve ($x^2 - 4x + 3 = 0, x$
 - Klammer schließen. Der CAS zeigt: solve ($x^2 - 4x + 3 = 0, x$)
- Es erscheinen die Nullstellen $x=1$ und $x=3$.

Möchte man beispielsweise nur die Nullstellen im Bereich von $x=-2$ bis $x=2$, so hängt man diese Grenzen noch dran:

- linke und rechte Grenze Der CAS zeigt: solve ($x^2 - 4x + 3 = 0, x, -2, 2$
 - Klammer schließen. Der CAS zeigt: solve ($x^2 - 4x + 3 = 0, x, -2, 2$)
- Es erscheint die Nullstelle $x=1$.

Hat man die Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 3$ vorher bereits *eingespeichert* (mit „:=“), kann man statt „ $x^2 - 4x + 3$ “ natürlich auch nur „ $f(x)$ “ eingeben. Die CAS-Anzeige sähe also dementsprechend anders aus:

solve ($f(x) = 0, x$) bzw. solve ($f(x) = 0, x, -2, 2$)

04 Gleichungen lösen:

Der zugehörige Befehl lautet: **solve (Gleichung , Variable (meist „x“))**

(Findet man im Hauptmenü oben in der Menüleiste unter: Aktion > Gleich./Ungleich. > solve)

Möchte man die Lösungen nur aus einem bestimmten Intervall, so kann man dahinter noch die Intervallgrenze eingeben. Also so: **solve (Gleichung , Variable (meist „x“) , linke Grenze , rechte Grenze)**

Beispiel 1: (Funktion ohne Parameter)

Nehmen wir an, wir wollen die Gleichung $\sin(t) = 0,2t^2 - 4^t$ lösen lassen:

- > > Der CAS zeigt: solve (
 - (Findet man im Haupt-Menü oben in der Menüleiste)
 - Nun die Gleichung eingeben Der CAS zeigt: solve ($\sin(t) = 0,2t^2 - 4^t$
 - („sin“ findet man im „Keyboard“, Register „mth“. Achtung: Der CAS muss auf Bogenmaß umgestellt sein!!)
 - Variable dranhängen (hier „t“) Der CAS zeigt: solve ($\sin(t) = 0,2t^2 - 4^t, t$
 - Klammer schließen. Der CAS zeigt: solve ($\sin(t) = 0,2t^2 - 4^t, t$)
- Es erscheint die Lösung der Gleichung $t = -0,48...$

Möchte man beispielsweise nur die Nullstellen im Bereich von $t=-5$ bis $t=5$, so hängt man diese Grenzen noch dran:

- linke und rechte Grenze Der CAS zeigt: solve ($\sin(t) = 0,2t^2 - 4^t, t, -5, 5$
- Klammer schließen. Der CAS zeigt: solve ($\sin(t) = 0,2t^2 - 4^t, t, -5, 5$)

Es erscheint die Lösung der Gleichung $t = -0,48...$

Hat man die Funktionen vorher bereits *eingespeichert* (mit „:=“), (z.B. $f(t) = \sin(t)$ und $g(t) = 0,2t^2 - 4^t$) kann man statt „ $\sin(t) = 0,2t^2 - 4^t$ “ natürlich auch nur „ $f(t) = g(t)$ “ eingeben. Die CAS-Anzeige sähe also dementsprechend anders aus:

solve ($f(t) = g(t), t$) bzw. solve ($f(t) = g(t), t, -5, 5$)

Beispiel 2: (Funktion mit Parameter)

Nehmen wir an, wir wollen die Gleichung $tx^2 = x^3 - 2tx^2 - 4t^2x$ lösen lassen:

- Menü > Algebra > solve Der CAS zeigt: solve (
- Nun die Gleichung eingeben Der CAS zeigt: solve (t·x²=x³-2t·x²-4t²·x
- Variable dranhängen (hier „x“) Der CAS zeigt: solve (t·x²=x³-2t·x²-4t²·x,x
(Die Variable ist „x“, da wir nach „x“ auflösen möchten. „t“ ist nur der Parameter)
- Klammer schließen. Enter Der CAS zeigt: solve (t·x²=x³-2t·x²-4t²·x,x)
Es erscheint die Lösung der Gleichung $x=0, x=-t, x=4t$

05 Ungleichungen lösen:

Haargenau gleich wie in Punkt „04 Gleichungen lösen“, nur steht im solve-Befehl statt dem „=“ nun ein „>“ oder „<“.

06 Extrempunkte berechnen

Es gibt zwei gute Möglichkeiten Extrempunkte zu berechnen:

- a) Die Ableitung der Funktion definieren und die dann Null setzen
- b) direkt den Hoch- bzw. den Tiefpunkt bestimmen (über fMax/fMin)

Es gibt in seltenen Fälle, in welchen die eine Möglichkeit besser als die andere ist.

In allen Fällen ist es geschickt, die Funktion vorher mit „:=“ zu definieren (einspeichern).

a) Extrempunkte über die Nullstellen der Ableitung.

Nehmen wir an, die Funktion wäre unter $f(x)$ eingespeichert.

Man könnte nun die Ableitung definieren

(siehe → „11 Ableitungsfunktion bestimmen“)

und danach die Nullstellen dieser Ableitung berechnen

(siehe → „03 Nullstellen“)

Man erhält die x -Werte, von welchen man noch die

(siehe → „08 y-Wert einer Funktion berechnen“)

y -Werte errechnen lassen muss.

Beispiel 1: Wir möchten die Extrempunkte der Funktion $f(x)=0,5x^4-4x^2+6$ berechnen lassen

- $f(x)$ definieren (falls nicht bereits geschehen) $f(x):=0,5x^4-4x^2+6$
- Die Ableitung $f'(x)$ definieren (z.B. unter $f1(x)$) Define $f1(x)=diff(f(x),x)$
- Die Ableitung $f'(x)$ Null setzen solve ($f1(x)=0,x$)

Man erhält die x -Werte $x=0, x=-2, x=2$. Nun braucht man noch die y -Werte

- Die y -Werte ausrechnen lassen $f(0)$ (ebenso die y -Werte von -2 und -2)

Man erhält die y -Werte: $y_1=f(0)=6$ $y_2=f(-2)=-2$ $y_3=f(2)=-2$

Beispiel 2: Wir möchten die Extrempunkte der Funktion $f(x)=0,5x^4-4tx^2+6t^2$ berechnen lassen

- $f(x)$ definieren (falls nicht bereits geschehen) $f(x,t):=x^4-4t·x^2+6t^2$
- Die Ableitung $f'(x)$ definieren (z.B. unter $f1(x,t)$) $f1(x,t):= \frac{d}{dx} (f(x,t))$
- Die Ableitung $f'(x)$ Null setzen solve ($f1(x,t)=0,x$)

Man erhält die x -Werte $x=0, x=-2t, x=2t$. Nun braucht man noch die y -Werte

- Die y -Werte ausrechnen lassen $f(2t,t)$ (ebenso die y -Werte von 0 und -2t)

Man erhält die y -Werte: $y_1=f(0)=6t^2$ $y_2=f(-2t)=-2t^2$ $y_3=f(2t)=-2t^2$

b) Extrempunkte über fMax bzw. fMin

Der zugehörige Befehl lautet: **fMax (Funktion , Variable (meist „x“))** bzw. **fMin (Funktion , Variable)**

(Findet man im Hauptmenü oben in der Menüleiste unter: Menü > Analysis > Funktionsmaximum)

Manchmal bringt der CAS da überaus intelligente Lösungen wie „ $x=\infty$ “ oder so. Spätestens dann empfiehlt es sich, den CAS nur in einem bestimmten Intervall suchen zu lassen, also hängt man noch Intervallgrenzen an.

Also so: **fMax (Funktion , Variable , linke Grenze, rechte Grenze)** ebenso mit fMin(...)

Beispiel 1: Wir möchten die Extrempunkte der Funktion $f(x)=0,5x^4-4x^2+6$ im Intervall $[-1;5]$ berechnen lassen

- $f(x)$ definieren (falls nicht bereits geschehen) $f(x):=0,5x^4-4x^2+6$
- Hochpunkte bestimmen lassen $fMax(f(x),x,-1,5)$

Man erhält das Maximum von $y=6$ bei $x=0$ (Achtung: der CAS zeigt zuerst den y -Wert an, dann erst den x -Wert!)

- Tiefpunkte bestimmen lassen $fMin(f(x),x,-1,5)$

Man erhält das Minimum von $y=-2$ bei $x=2$ (auch hier zeigt der CAS zuerst den y -Wert an, dann erst den x -Wert!)

Beispiel 2: Wir möchten die Extrempunkte der Funktion $f(x)=0,5x^4-4tx^2+6t^2$ im Intervall $[-t;5t]$ berechnen lassen

- $f(x)$ definieren (falls nicht bereits geschehen) $f(x):=0,5x^4-4t·x^2+6t^2$
- Hochpunkte bestimmen lassen $fMax(f(x,t),x,-t,5t)$

Man erhält das Maximum von $y=6t^2$ bei $x=0$
 ➤ Tiefpunkte bestimmen lassen
 Man erhält das Minimum von $y=-2t^2$ bei $x=2t$

(auch hier zeigt der CAS zuerst den y-Wert an, dann erst den x-Wert!)
 $fMin(f(x,t),x,-t,5t)$
 (auch hier zeigt der CAS zuerst den y-Wert an, dann erst den x-Wert!)

07 Wendepunkte berechnen

Es gibt keinen Befehl einen Wendepunkte *direkt* zu berechnen. (Im Grafikmenü geht's allerdings)
 Man muss die Wendepunkte also über die Nullstellen der zweite Ableitung berechnen.

Nehmen wir an, die Funktion wäre unter $f(x)$ eingespeichert.

Man definiert die erste Ableitung $f'(x)$ (siehe → „11 Ableitungsfunktion bestimmen“)

danach definiert man die zweite Ableitung $f''(x)$ - || -

Die Nullstellen von $f''(x)$ berechnen (siehe → „03 Nullstellen“)

dadurch erhält man die x-Werte, von welchen man (siehe → „08 y-Wert einer Funktion berechnen“)
 noch die y-Werte errechnen lassen muss.

Beispiel 1: Wir möchten die Wendepunkte der Funktion $f(x)=0,5x^4-4x^2+6$ berechnen lassen

- $f(x)$ definieren (falls nicht bereits geschehen) $f(x):=0,5x^4-4x^2+6$
 - Die Ableitung $f'(x)$ definieren (z.B. unter $f1(x)$) $f1(x):= \frac{d}{dX} (f(x))$
 - Die Ableitung $f''(x)$ definieren (unter $f2(x)$) $f2(x):= \frac{d}{dX} (f1(x))$
 - Die zweite Ableitung $f''(x)$ Null setzen $solve(f2(x)=0,x)$
- Man erhält die x-Werte $x=-1,15$ und $x=1,15$. Nun braucht man noch die y-Werte
- Die y-Werte ausrechnen lassen $f(1,15)$ (ebenso den y-Werte von $-1,15$)
- Man erhält die y-Werte: $y_1=f(-1,15)=1,58$ $y_2=f(1,15)=1,58$

Beispiel 2: Wir möchten die Extrempunkte der Funktion $f(x)=0,5x^4-4tx^2+6t^2$ berechnen lassen

- $f(x)$ definieren (falls nicht bereits geschehen) $f(x,t):=0,5x^4-4t \cdot x^2+6t^2$
 - Die Ableitung $f'(x)$ definieren (z.B. unter $f1(x,t)$) $f1(x,t):= \frac{d}{dX} (f(x,t))$
 - Die Ableitung $f''(x)$ definieren (unter $f2(x,t)$) $f2(x,t):= \frac{d}{dX} (f1(x,t))$
 - Die Ableitung $f''(x)$ Null setzen $solve(f2(x,t)=0,x)$
- Man erhält die x-Werte $x=-1,15t$ $x=1,15t$. Nun braucht man noch die y-Werte
- Die y-Werte ausrechnen lassen $f(1,15t,t)$ (ebenso den y-Wert von $-1,15t$)
- Man erhält die y-Werte: $y_1=f(-1,15t)=1,58t^2$ $y_2=f(1,15t)=1,58t^2$

08 y-Werte berechnen

y-Werte zu berechnen geht ganz einfach. Man setzt einfach den x-Wert in die gewünschte Funktion ein.

Nehmen wir an, die Funktion um welche es geht wäre unter $g(x)$ gespeichert und wir suchen den y-Wert, der zu $x=4$ gehört.

Wir tippen einfach in den CAS ein: $g(4)$ und erhalten sofort den y-Wert.

Handelt es sich um eine Funktionenschar, geht es auch nicht viel komplizierter.

Nehmen wir also an, wir hätten vorher eine Funktion $h_t(x)$ definiert. Die Definition erfolgte unter $h(x,t)=...$

Will man nun, dass der CAS für x den Wert 4 einsetzt, gibt man einfach ein: $h(4,t)$

Will man hingegen für t den Wert 4 einsetzen, gibt man ein: $h(x,4)$

(Oft ist es auch notwendig, diese Funktion zu speichern, da man sie später noch braucht.

Man kann das problemlos tun mit: $h4(x):=h(x,4)$ [Der Name h4 ist natürlich beliebig]

Man kann für x natürlich auch Parameter einsetzen. Soll z.B. $x=3t$ sein, gibt man ein: $h(3t,t)$

Fazit: Der CAS hat die Funktion $h(x,t)$ gespeichert. Steht nun statt dem „x“ etwas anderes, setzt er statt dem „x“ diese andere Zahl oder den anderen Buchstaben ein. Steht an der Stelle vom „t“ etwas, so setzt er dieses ein.

09 Steigungen berechnen

Der entscheidende Befehl lautet: $\frac{d}{d\Box}(\Box)$

(Findet man im Menü unter: Menü > Analysis > Ableitung)

Da die Steigung immer die Ableitung der Funktion ist, definieren wir die Ableitung und setzen da dann den x-Wert ein.

Nehmen wir an, die Funktion, um welche es geht, wäre unter $g(x)$ gespeichert und wir suchen die Steigung bei $x=4$.

Wir definieren zuerst die Ableitung $g'(x)$: $g1(x)= \frac{d}{dX} (g(x))$ (siehe → „11 Ableitungsfunktion“)

Nun setzen wir in $g'(x)$ den gewünschten x-Wert ein: $g1(4)$ (siehe → „08 y-Werte einsetzen“)

10 Tangente bzw. Normale berechnen

Der entscheidende Befehl lautet: **tangentLine (Funktion , Variable (meist „x“) , x-Wert (des Berührungspunktes))**
bzw. **normalLine (Funktion , Variable (meist „x“) , x-Wert (des Berührungspunktes))**
(Findet man im Menü unter: Menü > Analysis > Tangententerm)

Annahme, die betreffende Funktion wäre unter f(x) gespeichert und wir suchen die Tangente an f(x) im Berührungspunkt B(2?).
Wir geben einfach in den CAS ein: `tangentLine(f(x),x,2)` Es erscheint die Tangentengleichung.
Normalengleichung geht analog.

11 Ableitungsfunktion bestimmen

Der zugehörige Befehl lautet: $\frac{d}{d\Box}(\Box)$

(Findet man im Menü unter: Menü > Analysis > Ableitung)

Angenommen, die betreffende Funktion wäre unter f(x) gespeichert und wir suchen Ableitungsfunktion f'(x).

Wir definieren die Ableitungsfunktion f'(x): $f1(x) := \frac{d}{dX}(f(x))$

(Selbstverständlich ist es egal, wie die Ableitungsfunktion genannt wird. „f1“ ist also nicht zwingend)

12 Stammfunktion bestimmen

Der zugehörige Befehl lautet: $\int_{\Box}^{\Box}(\Box) d\Box$

(Findet man im Menü unter: Menü > Analysis > Integral)

Angenommen, die betreffende Funktion wäre unter f(x) gespeichert und wir suchen Stammfunktion F(x).

Wir definieren die Stammfunktion F(x): $ff(x) = \int_{\Box}^{\Box}(f(x)) dx$

Es ist hierbei wichtig *nichts* für die Grenzen einzugeben.

(Selbstverständlich ist es egal, wie die Stammfunktion genannt wird. „ff“ ist also nicht zwingend)

13 Fläche zwischen einer Funktion und der x-Achse

Der zugehörige Befehl lautet: $\int_{\Box}^{\Box}(\text{Funktion}) d\Box$

(Findet man im Menü unter: Aktion > Berechnung > $\int$)

Angenommen, die betreffende Funktion wäre unter f(x) gespeichert und wir suchen Fläche,
die f(x) mit der x-Achse einschließt.

Frage: Sind die Integralgrenzen bekannt? Falls nicht, müssen diese erst berechnet werden (meist sind das die Nullstellen).

Fläche berechnen $\int_{\text{linke Grenze}}^{\text{rechte Grenze}}(f(x)) dx$

Beispiel: Wir möchten die Fläche, die $f(x)=0,5x^4-4x^2+8$ mit der x-Achse einschließt, berechnen.

- f(x) definieren (falls nicht bereits geschehen) $f(x):=0,5x^4-4x^2+8$
- Die Nullstellen berechnen (falls nicht schon bekannt) $\text{solve}(f(x)=0,x)$ Man erhält: $x_1=-2$ und $x_2=2$
- Die Fläche berechnen $\int_{-2}^2(f(x)) dx$

Man erhält die Fläche: $A=17,07$

14 Fläche zwischen zwei Funktionen

Der zugehörige Befehl lautet: $\int_{\text{linke Grenze}}^{\text{rechte Grenze}}(\text{Funktion 1} - \text{Funktion 2}) d\Box$

(Findet man im Menü unter: Aktion > Berechnung > $\int$)

Angenommen, die beiden betreffenden Funktionen wären unter f(x) und g(x) gespeichert und wir suchen Fläche,
die f(x) und g(x) einschließen.

Frage: Sind die Integralgrenzen bekannt? Falls nicht, müssen diese erst berechnet werden (meist sind das die Schnittpunkte).

Fläche berechnen $\int_{\text{linke Grenze}}^{\text{rechte Grenze}}(f(x) - g(x)) dx$

Beispiel: Wir möchten die Fläche, die $f(x)=0,5x^4-4x^2+8$ mit $g(x)=0,25x^2+10,25$ einschließt

- f(x) und g(x) definieren (falls nicht bereits geschehen) $f(x):=0,5x^4-4x^2+8$
 $g(x):=0,25x^2+10,25$
- Die Schnittpunkte berechnen (falls nicht bekannt) $\text{solve}(f(x)=g(x),x)$ Man erhält: $x_1=-3$ und $x_2=3$
- Die Fläche berechnen $\int_{-3}^3(f(x) - g(x)) dx$

Man erhält die Fläche: $A=41,4$

15 Grenzwert einer Funktion

Der zugehörige Befehl lautet: $\lim_{\square \rightarrow \square} (\square)$
(Findet man im Menü unter: Menü > Analysis > Limes)

Beispiel: Wir möchten den Grenzwert der Funktion $f(x) = \frac{4x^2-5}{x^2+1}$ für $x \rightarrow \infty$

- $f(x)$ definieren (falls nicht bereits schon geschehen) $f(x) := \frac{4x^2-5}{x^2+1}$
- Die Grenzwert berechnen $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))$

Bemerkung: das Quadrat über dem „ ∞ “-Zeichen bleibt leer.

Man erhält den Grenzwert: 4

16 Gleichungssysteme lösen

Der zugehörige Befehl lautet: **rref (Matrix)**
(Findet man im Hauptmenü oben in der Menüleiste unter: Menü > Matrix und Vektor > reduzierte Diagonalform)

Beispiel: Wir möchten das Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= -9 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

- Eingabe in CAS: rref(
- Matrix erstellen lassen [Taste neben der „9“]. Im CAS erscheint: $\text{rref}\left(\begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}\right)$
- Zahlen eintragen. Im CAS erscheint: $\text{rref}\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & -9 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$
-
- Es erscheint die Lösung. $x_1=1$ $x_2=2$ $x_3=3$

Ich hoffe, alles funktioniert, anderenfalls ...

Viel Glück ☺

Diese Übersicht gibt's auch im Downloadbereich von www.mathe-seite.de