Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter **www.mathe-laden.de** bestellen (falls Sie das möchten).
Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht aus dem Internet herunter geladen werden können.
Dazu gehören:
Inhaltsverzeichnis, **Stichwortverzeichnis**,
und viele **Aufgaben zum Selberrechnen**.

Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.
Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

matheseite

Die gute Seite an Mathe.

A.46 Ganzrationale Funktionen

A.46.01 Polynomdivision (∯)

Die Polynomdivision braucht man in zwei wichtigen Fällen. Bei der Berechnung der Nullstellen von Parabeln 3., 4. oder noch höherer Ordnung [wenn Ausklammern oder Substitution nicht funktionieren][(1)] und bei der Berechnung der schiefen Asymptoten von gebrochen-rationalen Funktionen[(2)].
Zur Berechnung der Nullstellen kann man auch das Horner-Schema verwenden.

Bitte drandenken:
Man braucht entweder Polynomdivision ODER Horner-Schema. Nicht beides!!

Aufgabe 1 Dividieren Sie x^3+4x^2+6x+4 durch $x+2$!

Aufgabe 2 Teilen Sie x^3+2x^2-5x-6 durch $x+1$.

Aufgabe 3 Teilen Sie $(2x^3-4x^2+5x)$ durch (x^2-1).

Aufgabe 4 Bestimmen Sie alle Nullstellen von $2x^4-4x^3-26x^2+28x+48$!

Lösung von Aufgabe 1:

1.Schritt:

$$
\begin{array}{ll}
(x^3+4x^2+6x+4):(x+2) = x^2 & \leftarrow (\text{ denn } x^3:x = x^2 \text{) Jetzt zurückrechnen: } x^2\cdot(x+2) = x^3+2x^2 \\
\underline{-(x^3+2x^2)} & \leftarrow \text{dann abziehen} \\
\quad +2x^2+6x+4 & \leftarrow \text{jetzt geht's wieder von vorne los mit } 2x^2 : x
\end{array}
$$

2.Schritt:

$$
\begin{array}{ll}
(x^3+4x^2+6x+4):(x+2) = x^2+2x & \\
\underline{-(x^3+2x^2)} & \\
\quad +2x^2+6x+4 & (\text{ denn } 2x^2 : x = 2x \text{) Zurückrechnen: } 2x\cdot(x+2) = 2x^2+4x \\
\quad \underline{-(+2x^2+4x)} & \leftarrow \text{dann wieder abziehen} \\
\qquad +2x+4 & \leftarrow \text{jetzt geht's wieder von vorne los mit } 2x : x
\end{array}
$$

3.Schritt:

$$
\begin{array}{ll}
(x^3+4x^2+6x+4):(x+2) = x^2+2x+2 & \\
\underline{-(x^3+2x^2)} & \\
\quad +2x^2+6x+4 & \\
\quad \underline{-(+2x^2+4x)} & \\
\qquad +2x+4 & (\text{ denn } 2x : x = 2 \text{) Zurückrechnen: } 2\cdot(x+2) = 2x+4 \\
\qquad \underline{-(+2x+4)} & \leftarrow \text{dann wieder abziehen} \\
\qquad\quad 0 & \leftarrow \text{die Polynomdivision ist aufgegangen. Welch' Freude!!!!!!}
\end{array}
$$

1 siehe auch Kap A.12.07 und Kap A.12.08
2 siehe auch Kap A.43.07

Lösung von Aufgabe 2:

1.Schritt:

$(2x^3+4x^2-10x-12):(x+1) = 2x^2$ ← (denn $2x^3:x = 2x^2$) Zurückrechnen: $2x^2\cdot(x+1)=2x^3+2x^2$

$\underline{-(2x^3+2x^2)}$ dann abziehen

$+2x^2-10x-12$ jetzt geht's wieder von vorne los mit $2x^2:x$

2.Schritt:

$(2x^3+4x^2-10x-12):(x+1) = 2x^2+2x$

$\underline{-(2x^3+2x^2)}$

$+2x^2-10x-12$ (denn $2x^2:x=2x$) Zurückrechnen: $2x\cdot(x+1) = 2x^2+2x$

$\underline{-(+2x^2+2x)}$ ←dann wieder abziehen

$-12x-12$ ←jetzt geht's wieder von vorne los mit $-12x:x$

3.Schritt:

$(2x^3+4x^2-10x-12):(x+1) = 2x^2+2x-12$

$\underline{-(2x^3+2x^2)}$

$+2x^2-10x-12$

$\underline{-(+2x^2+2x)}$

$-12x-12$ (denn $-12x:x=-12$) Zurückrechnen: $-12\cdot(x+1) = -12x-2$

$\underline{-(-12x-12)}$ ←dann wieder abziehen

0 ←die Polynomdivision ist schon wieder aufgegangen.
(Sachen gibt's ...)

Lösung von Aufgabe 3:

1.Schritt:

$(2x^3-4x^2+5x):(x^2-1) = 2x$ ← (denn $2x^3:x^2 = 2x$) Zurückrechnen: $2x\cdot(x^2-1)=2x^3-2x$

$\underline{-(2x^3 \quad -2x)}$ dann abziehen

$-4x^2+7x$ jetzt geht's wieder von vorne los mit $-4x^2:x^2$

2.Schritt:

$(2x^3-4x^2+5x \quad):(x^2-1) = 2x-4$

$\underline{-(2x^3 \quad -2x)}$

$-4x^2+7x$ (denn $-4x^2:x^2=-4$) Zurückrechnen: $-4\cdot(x^2-1)=-4x^2+4$

$\underline{-(-4x^2 \quad +4)}$ ←dann wieder abziehen

$7x-4$

Jetzt geht's nicht mehr weiter. „$7x-4$“ kann nicht mehr durch „x^2“ geteilt werden. „$7x-4$“ ist der Rest. Das Ergebnis der Polynomdivision lautet daher:

$$(2x^3-4x^2+5x) : (x^2-1) = 2x-4+\frac{7x-4}{x^2-1}$$

Lösung von Aufgabe 4:

Die Gleichung $2x^4-4x^3-26x^2+28x+48=0$ kann nicht durch Ausklammern oder Substitution und schon gar nicht durch Mitternachts-Formel gelöst werden, deswegen bleibt nur Polynomdivision übrig.
Da keine Nullstelle angegeben wurde, mit der begonnen werden kann, müssen wir wild ein paar x-Werte einsetzen und schauen, ob irgendwann mal „0“ rauskommt. (Das wäre dann unsere erste Nullstelle).

1 einsetzen: $2\cdot 1^4 - 4\cdot 1^3 - 26\cdot 1^2 + 28\cdot 1 + 48 = 48 \neq 0$ schlecht
-1 einsetzen: $2\cdot(-1)^4 - 4\cdot(-1)^3 - 26\cdot(-1)^2 + 28\cdot(-1) + 48 = 0$ sehr gut.

Unsere erste Nullstelle (mit der wird die Polynomdivision starten) ist $x_1 = -1$
Man dividiert immer durch (x–Nullstelle), in diesem Fall also durch (x–(-1)), also durch (x+1)

$$
\begin{array}{l}
(2x^4-4x^3-26x^2+28x+48) : (x+1) = 2x^3-6x^2-20x+48 \\
\underline{-(2x^4+2x^3)} \\
\quad -6x^3-26x^2 \\
\quad \underline{-(-6x^3-6x^2)} \\
\qquad -20x^2+28x \\
\qquad \underline{-(-20x^2-20x)} \\
\qquad\qquad +48x+48 \\
\qquad\qquad \underline{-(48x+48)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

⇒ Das neue Ergebnis-Polynom lautet: $2x^3-6x^2-20x+48$

Dieses Polynom muss wieder =0 gesetzt werden und da wieder kein Ausklammern, keine Substitution funktioniert, ist Polynomdivision am Start. Vorher noch ein paar lustige x-Werte raten.

1 einsetzen: $2\cdot 1^3 - 6\cdot 1^2 - 20\cdot 1 + 48 = 48 \neq 0$ schlecht
-1 einsetzen: $2\cdot(-1)^3 - 6\cdot(-1)^2 - 20\cdot(-1) + 48 = 60 \neq 0$ schlecht
2 einsetzen: $2\cdot 2^3 - 6\cdot 2^2 - 20\cdot 2 + 48 = 0$ sehr gut

Wegen der Nullstelle von „+2“, dividieren wir $2x^3 - 6x^2 - 20x + 48$ durch (x-2)

$$
\begin{array}{l}
(2x^3-6x^2-20x+48) : (x-2) = 2x^2-2x-24 \\
\underline{-(2x^3-4x^2)} \\
\quad -2x^2-20x \\
\quad \underline{-(-2x^2+4x)} \\
\qquad -24x+48 \\
\qquad \underline{-(-24x+48)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

⇒ Das neue Ergebnis-Polynom lautet: $2x^2-2x-24$

Dieses Polynom muss wieder =0 gesetzt werden und hier funktioniert Mitternachtsformel [p-q-Formel oder a-b-c-Formel].
Ich rechne es nicht im Detail aus, aber es möge Ihnen reichen, dass das Ergebnis $x_3=-3$ und $x_4=4$ sein wird.
Wir haben also vier Nullstellen: $\mathbf{x_1=-1}$, $\mathbf{x_2=2}$, $\mathbf{x_3=-3}$ und $\mathbf{x_4=4}$

A.46.02 Horner-Schema (∲)

Bitte drandenken:
Man braucht entweder Polynomdivision ODER Horner-Schema. Nicht beides!!

Aufgabe 5

Das Problem: Von x^3+4x^2+6x+4 kennt man die Nullstelle N(-2|0).
Es sollen alle weiteren Nullstellen berechnet werden.

Aufgabe 6

Von $2x^4-4x^3-26x^2+28x+48$ sollen alle Nullstellen bestimmt werden.

Lösung von Aufgabe 5:
Das Horner-Schema ist eine Art Tabelle.
In die erste Zeile werden die Koeffizienten des Polynoms eingetragen.
(Die Koeffizienten sind die Zahlen vor den x-Termen eines Polynoms)
Unten links steht die Nullstelle.
In der dritten Zeile wird die Zahl der ersten Spalte einfach übernommen.

	$1x^3$	$4x^2$	$6x$	4
	↓			
$x=-2$	1			

Nun wird die Nullstelle (hier „-2“) mit der ersten Zahl aus der dritten Zeile multipliziert und das Ergebnis in die nächste Spalte, in die zweite Zeile eingetragen. Die Zahlen der ersten beiden Zeilen addiert man und trägt sie drunter in die dritte Zeile ein.

	$1x^3$	$4x^2$	$6x$	4
		$-2\cdot1=-2$	$-2\cdot2=-4$	
$x=-2$	1	$4+(-2)=2$	$6+(-4)=2$	

Die Nullstelle wird mit der nächsten Zahl aus der dritten Zeile multipliziert (hier „2“) und das Ergebnis wieder in die in die nächste Spalte der zweite Zeile eingetragen. Die Spalteneinträge der ersten beiden Zeilen addiert man und trägt sie drunter in die dritte Zeile ein.

	$1x^3$	$4x^2$	$6x$	4
		$-2\cdot1=-2$	$-2\cdot2=-4$	$-2\cdot2=-4$
$x=-2$	1	$4+(-2)=2$	$6+(-4)=2$	$4+(-4)=0$

Zum Schluss muss immer „0“ rauskommen.

Die Zahlen der dritten Zeile sind die Koeffizienten des neuen Polynoms, das man ab jetzt betrachtet.
Das neue Polynom ist immer eine Potenz kleiner als das das alte. Da das Ausgangspolynom 3. Grades ist, hat unser neues Polynom die Potenz 2. Wir beginnen also mit x^2.
Die Zahlen vor den „x“ entnehmen wir (wie bereits angedeutet) der dritten Zeile unserer „Horner“-Tabelle. (Die letzte „0“ wird ignoriert)

⇒ Das neue Ergebnis-Polynom lautet: $1\cdot x^2+2\cdot x+2$

Dieses neue Polynom musste man nun =0 setzen, um die anderen Nullstellen zu bestimmen. Das würde man nun mit der Mitternachts-Formel berechnen [p-q-Formel bzw. a-b-c-Formel].
Das mache ich an dieser Stelle nicht mehr, ich denke das müssten Sie hinkriegen.

Lösung von Aufgabe 6:
Die Gleichung $2x^4-4x^3-26x^2+28x+48=0$ kann nicht durch Ausklammern oder Substitution und schon gar nicht durch Mitternachts-Formel gelöst werden, deswegen bleibt nur das Horner-Schema.
Da keine Nullstelle angegeben wurde, mit der begonnen werden kann, müssen wir wild ein paar x-Werte einsetzen und schauen, ob irgendwann mal „0" rauskommt. (Das wäre dann unsere erste Nullstelle).

1 einsetzen:	$2\cdot1^4 - 4\cdot1^3 - 26\cdot1^2 + 28\cdot1 + 48 = 48 \neq 0$	schlecht
-1 einsetzen:	$2\cdot(-1)^4 - 4\cdot(-1)^3 - 26\cdot(-1)^2 + 28\cdot(-1) + 48 = 0$	sehr gut.

Unsere erste Nullstelle (mit der wird das Horner-Schema starten) ist $x_1 = -1$

	$2x^4$	$-4x^3$	$-26x^2$	$28x$	48
	$\downarrow$	$-1\cdot2 = -2$	$-1\cdot(-6) = 6$	$-1\cdot(-20)=20$	$-1\cdot48 = -48$
$x = -1$	2	$-4+(-2)=-6$	$-26+6=-20$	$28+20=48$	$48+(-48)=0$

Unser neues Polynom ist dritten Grades, die Koeffizienten sind: 2, -6, -20 und 48
$\Rightarrow$ Das neue Ergebnis-Polynom lautet: $2x^3-6x^2-20x+48$

Dieses Polynom muss wieder =0 gesetzt werden und da wieder kein Ausklammern, keine Substitution funktioniert, ist Horner am Start. Vorher noch ein paar lustige x-Werte raten.

1 einsetzen:	$2\cdot1^3 - 6\cdot1^2 - 20\cdot1 + 48 = 48 \neq 0$	schlecht
-1 einsetzen:	$2\cdot(-1)^3 - 6\cdot(-1)^2 - 20\cdot(-1) + 48 = 60 \neq 0$	schlecht
2 einsetzen:	$2\cdot2^3 - 6\cdot2^2 - 20\cdot2 + 48 = 0$	sehr gut

Unsere nächste Nullstelle (mit der wird das Horner-Schema abermals starten) ist $x_2 = 2$

	$2x^3$	$-6x^2$	$-20x$	48
	$\downarrow$	$2\cdot2 = 4$	$2\cdot(-2) = -4$	$2\cdot(-24) = -48$
$x = 2$	2	$-6+4 = -2$	$-20+(-4)=-24$	$48+(-48) = 0$

Unser neues Polynom ist zweiten Grades, die Koeffizienten sind: 2, -2 und -24
$\Rightarrow$ Das neue Ergebnis-Polynom lautet: $2x^2-2x-24$

Dieses Polynom muss wieder =0 gesetzt werden und hier funktioniert Mitternachtsformel. Ich rechne es nicht im Detail aus, aber es möge Ihnen reichen, dass das Ergebnis $x_3=-3$ und $x_4=4$ sein wird.
Wir haben also vier Nullstellen: $\mathbf{x_1=-1}$ **,** $\mathbf{x_2=2}$ **,** $\mathbf{x_3=-3}$ und $\mathbf{x_4=4}$

A.46.03 Zerlegung in Linearfaktoren

Stellt Sie sich vor, Sie müssten mit dem Bruch $\frac{2x^3+x^2-5x+2}{x^3-x^2-4x+4}$ ein paar große Rechnungen veranstalten. Es wäre nun sicherlich praktisch, wenn man den Bruch vereinfachen könnte. Möglicherweise lautet sogar die Aufgabe dementsprechend: „Vereinfachen Sie !".
Nun kann man Brüche erst dann kürzen, wenn sie in Faktoren zerlegt sind.
[Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen (und pädagogisch ähnlich hochwertige Sprüche...)]
Dieses ist der Hauptgrund, wofür Sie auf den nächster Seiten Faktorenzerlegung brauchen.

A.46.03.a Faktorzerlegung durch Ausklammern und binomische Formeln

Aufgabe 7 Zerlegen Sie x^4-9x^2 in Linearfaktoren!

Aufgabe 8 Vereinfachen Sie den Term $\frac{4x^3-9x}{20x^2+30x+45}$!!

Lösung von Aufgabe 7:

$x^4 - 9x^2$ — x^2 ausklammern

$= x^2\cdot(x^2-9)$ — in der Klammer 3. bin. Formel anwenden

$= x^2\cdot(x-3)\cdot(x+3)$ [1] Fertig.

Binomische Formeln:

I $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

II $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

II $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

Lösung von Aufgabe 8:
Zuerst klammern wir oben und unten alles aus.
Danach schauen wir nach binomischen Formeln.

$\frac{4x^3-9x}{20x^2+30x+45}$ ausklammern

$= \frac{x\cdot(4x^2-9)}{5\cdot(4x^2+6x+9)}$ binomische Formeln anwenden [falls möglich]

$= \frac{x\cdot\cancel{(2x+3)}(2x-3)}{5\cdot(2x+3)^{\cancel{2}}}$ kürzen

$= \frac{x\cdot(2x-3)}{5\cdot(2x+3)}$ Fertig.

1 Übrigens kann man an dieser zerlegten Form sofort die Nullstellen erkennen (jeden Faktor für sich anschauen): $x_{1,2}=0$ $x_3=3$ $x_4=-3$

A.46.03.b Faktorzerlegung durch Berechnung der Nullstellen (∯)

Natürlich wird nicht alles im Leben nur aus binomischen Formeln und Zuckerwatte bestehen.
Zum Beispiel kann man $2x^2-4x-16$ in $2\cdot(x+2)\cdot(x-4)$ zerlegen, und da Sie nichts dringender interessiert, als wie ich das hingekriegt habe, verrate ich Ihnen jetzt mein geheimstes Geheimnis.

Um einen Term in Faktoren zu zerlegen, berechnet man erst alle Nullstellen.
Nehmen wir `mal an, für die Nullstellen von irgendeinem Term erhält man $x_1=-3$, $x_2=5$, $x_{3,4}=2$ und $x_5=-1$.
Die Zahl vor der höchsten Potenz des Terms ist ebenfalls wichtig. Annahme sie sei „4".
Nun rechnet man immer „Zahl vor der höchsten Potenz" mal „x minus Nullstelle".
Der Term hätte in Faktoren zerlegt also die Form:

$$\text{Term} = 4\cdot(x-(-3))\cdot(x-5)\cdot(x-2)\cdot(x-2)\cdot(x-(-1)) = 4\cdot(x+3)\cdot(x-5)\cdot(x-2)^2\cdot(x+1)$$

Aufgabe 9 Zerlegen Sie $2x^2-4x-16$ in Faktoren.

Aufgabe 10 Zerlegen Sie $-3x^5+21x^3-36x$ in Faktoren.

Aufgabe 11 Vereinfachen Sie den Term $\frac{-4u^2+4}{-4u^2-8u+12}$!!

Lösung von Aufgabe 9:
Erst `mal die Nullstellen berechnen:

$2x^2-4x-16 = 0 \quad | :2$ (p-q-Formel oder a-b-c-Formel)

$x^2-2x-8 = 0$

$x_{1,2} = -1\pm\sqrt{(-1)^2+8} = -1\pm3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \quad x_2 = -4$

Die Zahl vor der höchsten Potenz, ist die „2".
Deswegen zerlegt man $2x^2-4x-16$ in: $2\cdot(x-2)\cdot(x-(-4))$ = $\mathbf{2\cdot(x-2)\cdot(x+4)}$

Lösung von Aufgabe 10:
Erst Nullstellen berechnen:

$-3x^5+21x^3-36x = 0$ „-3x" ausklammern

$-3x\cdot(x^4-7x^2+12) = 0$

$x_1=0 \qquad x^4-7x^2+12 = 0$ Substitution $x^2=u$

$u^2-7u+12 = 0$ (p-q-Formel oder a-b-c-Formel)

$u_{1,2} = 3{,}5\pm\sqrt{3{,}5^2-12}$

$= 3{,}5\pm0{,}5$

$u_1=3 \quad\Rightarrow\quad x^2\Rightarrow3 \quad\Rightarrow\quad x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$

$u_2=4 \quad\Rightarrow\quad x^2=4 \quad\Rightarrow\quad x_{4,5} = \pm2$

Die Zahl vor der höchsten Potenz ist „-3“,
die Nullstellen sind: $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$, $x_4=2$, $x_5=-2$.
Deswegen gilt: $-3x^5+21x^3-36x \;=\; -3\cdot(x-0)\cdot(x-\sqrt{3})\cdot(x+\sqrt{3})\cdot(x-2)\cdot(x+2)$

Lösung von Aufgabe 11:
Zuerst zerlegen wir der Zähler in Faktoren:
$-4u^2 + 4 =$ [ausklammern] $= -4\cdot(u^2-1) =$ [3.bin.Formel] $= -4\cdot(u-1)\cdot(u+1)$

Nenner in Faktoren zerlegen: [der Nenner ist keine bin. Formel, also Nullstellen berechnen]
$-4u^2-8u+12 = 0 \qquad |:(-4)$
$u^2 + 2u-3 = 0$
$u_{1,2} = -1\pm\sqrt{1^2-(-3)} = -1\pm2 \quad \Rightarrow u_1 = 1,\; u_2 = -3$
$\Rightarrow$ Den Nenner kann man also zerlegen in:
$-4u^2-8u+12 = -4\cdot(u-1)\cdot(u+3)$

Somit kann man den ganzen Bruch folgendermaßen vereinfachen:

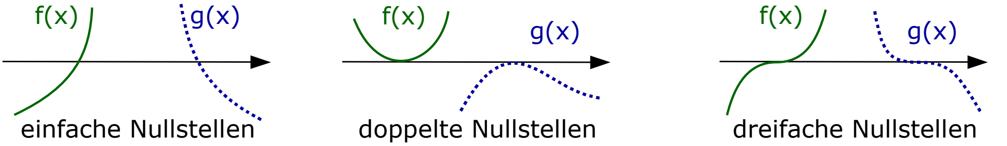
$$\frac{-4u^2+4}{-4u^2-8u+12} = \frac{\cancel{-4}\cdot\cancel{(u-1)}\cdot(u+1)}{\cancel{-4}\cdot\cancel{(u-1)}\cdot(u+3)} = \frac{u+1}{u+3}$$

A.46.04 Polynome über die Nullstellen aufstellen (∰)

Es gibt eine recht einfache Methode, die Gleichung von Polynomen anzugeben, wenn man alle Nullstellen gegeben hat.
Dazu braucht man aber doppelte Nullstellen und dreifache Nullstellen!

Eine **einfache** (=normale) **Nullstelle** sieht so aus:
Die Funktion f(x) schneidet die x-Achse und läuft irgendwie durch.

Bei mehrfachen Nullstellen schmiegt sich f(x) an die x-Achse an,
es wird also ein Berührpunkt.
Eine doppelte, vierfache, sechsfache, ... Nullstelle ist gleichzeitig ein Extrempunkt,
eine dreifache, fünffache, ... Nullstelle ist gleichzeitig ein Sattelpunkt[1].

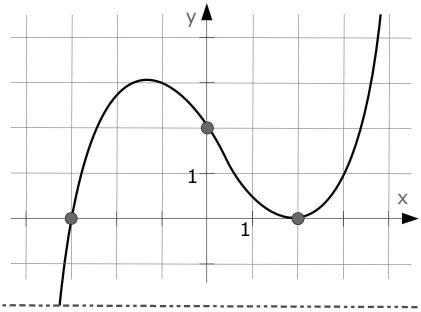


einfache Nullstellen doppelte Nullstellen dreifache Nullstellen

1 Statt: „Sattelpunkt“ verwendet man auch die Begriffe: „Terassenpunkt“ oder auch „Treppenpunkt“

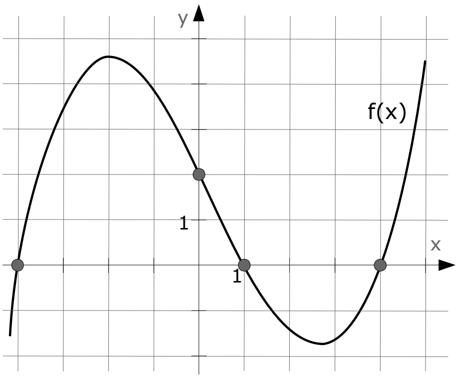
Aufgabe 12

Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion dritten Grades, die nebenstehendes Schaubild besitzt!



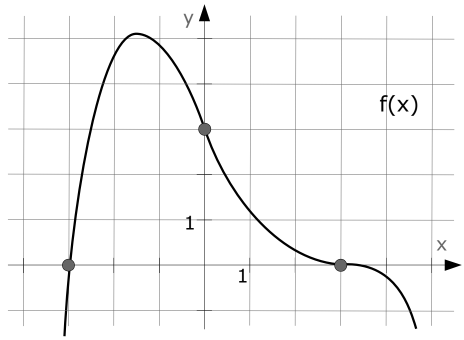
Aufgabe 13

In der Zeichnung links ist der Graph der Funktion f(x) gegeben. Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift!



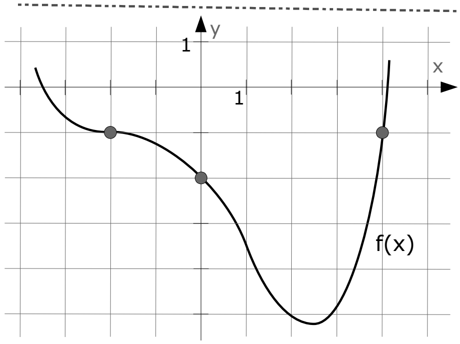
Aufgabe 14

Sagä dem Funkzion vun de rächtä Zeiknung.



Aufgabe 15

Geben Sie die Gleichung dieser wunderschönen Kurve an!



Lösung von Aufgabe 12:

Nun, zum einen hätte man nicht angeben müssen, dass es sich um eine Funktion dritten Grades handelt. Da die Funktion zwei Extrempunkte hat, muss sie 3. Grades sein [oder 5. oder 7. Grades, man nimmt aber natürlich immer den kleinsten Grad, von allen denen, die in Frage kommen].

Man könnte nun hergehen, aus dem Schaubild ein paar Punkte herauslesen, z.Bsp: $N_1(-3|0)$, $N_2=T(2|0)$, $P(0|2)$, …

Anschließend könnte man für die Funktion den Ansatz $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ machen, dann Bedingungen aufstellen und damit die Parameter a,b,c,d bestimmen. [siehe →Kap.A.46.05]

Hier gibt es jedoch eine viel einfachere Methode, da man von der Funktion genauso viele Nullstellen kennt, wie der Grad der Funktion ist. Wir kennen nämlich die Nullstelle $N_1(-3|0)$ und die doppelte! Nullstelle $N_2(2|0)$. Die gesuchte Funktion kann also nur die Form $f(x) = a\cdot(x+3)\cdot(x-2)^2$ haben. [(1)]

Um „a" zu bestimmen macht man eine Punktprobe. Man sucht sich irgendeinen

1 f(x) besteht immer aus Klammern. In jeder Klammer steht: (x minus Nullstelle), bei doppelten Nullstellen hat man natürlich $(\ \ )^2$, bei dreifachen Nullstellen $(\ \ )^3$, … Vor den Klammern steht immer ein Parameter (hier: a) den man durch irgendeine Punktprobe bestimmen kann.

beliebigen Punkt aus, dessen Koordinaten gut abzulesen sind [z.B. P(0|2)] und setzt diesen in f(x) ein.

P(0|2) in f(x): $2 = a\cdot(0+3)\cdot(0-2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = a\cdot3\cdot4 \quad \Leftrightarrow \quad a=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow \; f(x)=\frac{1}{6}\cdot(x+3)\cdot(x-2)^2$

Lösung von Aufgabe 13:
Es handelt sich natürlich wieder um eine Funktion dritten Grades.
Die Nullstellen sind bei $N_1(-4|0)$, $N_2(1|0)$, $N_3(4|0)$.
f(x) hat also die Form: $\Rightarrow \quad f(x)=a\cdot(x+4)\cdot(x-1)\cdot(x-4)$
Punktprobe P(0|2) [oder mit P(-3|3,5)]: $2 = a\cdot(0+4)\cdot(0-1)\cdot(0-4)$

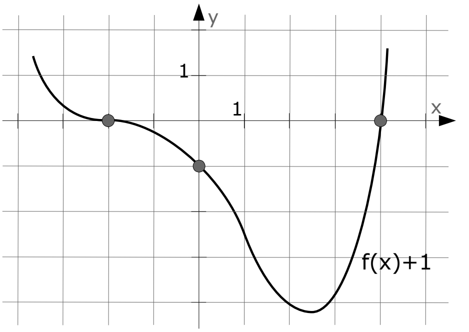
$2 = a\cdot16 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{2}{16}=\frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad f(x)=\frac{1}{8}\cdot(x+4)\cdot(x-1)\cdot(x-4)$

Lösung von Aufgabe 14
Mit unserem Super-Hirn erkennen wir eine einfache Nullstelle bei $N_1(-3|0)$ und eine dreifache bei $N_2(3|0)$. Daher kommen wir mit kaum vorstellbarer Genialität auf den Ansatz: $f(x) = a\cdot(x+3)\cdot(x-3)^3$ [Wir sind wirklich gut.]
Auch die Punktprobe mit P(0|3) hat keine Chance uns zu entkommen.

P(0|3) in f(x): $\Rightarrow \quad 3=a\cdot(0+3)\cdot(0-3)^3 \quad \Rightarrow \quad 3=a\cdot(-81) \quad \Rightarrow \quad a=-\frac{3}{81}=-\frac{1}{27}$

$f(x)=-\frac{1}{27}\cdot(x+3)\cdot(x-3)^3 \quad \leftarrow$ Yo, Mann! Diese Funktion haben wir platt gemacht!!!

Lösung von Aufgabe 15 [siehe →Aufgabe 19]



Wir kennen leider die Nullstellen der Funktion nicht. [Bzw. man könnte zwei Nullstellen als hässliche Kommazahlen angeben, aber nur *zwei* Nullstellen nutzen uns nichts, denn das ergäbe eine Gleichung zweiten Grades. Und unsere Funktion ist sicherlich *keine* Funktion zweiten Grades].
Wir wenden aber einen kleinen Trick an: wir verschieben die Funktion um 1 nach oben, dann ist es ein ähnlicher Fall wie Aufgabe 14. Die verschobene Funktion nennen wir f*(x).

Nun haben wir eine dreifache Nullstelle bei x=-2, eine einfache Nullstelle bei x=4 und einen Punkt bei P(0|-1).

$\Rightarrow \; f^*(x)=a\cdot(x+2)^3\cdot(x-4)$. Einsetzen von P(0|-1)

$\Rightarrow \; -1=a\cdot(0+2)^3\cdot(0-4) \quad \Rightarrow \quad -1=a\cdot(-32) \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{32}$

$\Rightarrow \; f^*(x)=-\frac{1}{32}\cdot(x+2)^2\cdot(x-4)$

Die richtige, nicht verschobene Funktion erhält man, indem man f*(x) wieder um 1 nach unten zurück verschiebt.

$\Rightarrow \; f(x)=-\frac{1}{32}\cdot(x+2)^2\cdot(x-4)-1$

A.46.05 Aufstellen von Funktionen (∰)

(heißt auch „Funktionsanpassung") (siehe auch Kap.A.31.02)

Es gibt recht viele Möglichkeiten Funktionen aufzustellen.
An dieser Stelle befassen wir uns nur mit einer davon:
Es ist eine ganzrationale Funktion gesucht, von der einige Informationen bekannt sind.

Es gibt nur **drei Typen von Informationen**, die gegeben sein können:
[Die x-Werte, wo sich dieses Ganze abspielt, sind (fast) immer gegeben]

1) **y-Werte**: z.Bsp. P(2|4) oder N(-3|0)
   Die y-Werte erhält man aus f(x).
   Der Ansatz wäre also hier: f(2)=4 oder f(-3)=0

2) **H/T/W**: z.Bsp. H(2|..) oder T(-4|..) oder W(1|..)
   Hoch- Tief- bzw. Wendepunkte erhält man, indem man f'(x)=0 bzw. f''(x)=0 setzt.
   Der Ansatz wäre hier: f'(2)=0 oder f'(-4)=0 oder f''(1)=0

3) **Steigungen**: z.Bsp. „ ... f(x) hat bei x=4 die Steigung von m=6 ... "
   Die Steigung einer Funktion ist immer die erste Ableitung f'(x).
   Der Ansatz wäre also: f'(4)=6

> Zum Aufstellen von Funktionen gibt es **drei Info-Typen:**
>
> - y–Werte sind gegeben
>   Man braucht f(x)
> - Hoch oder Tiefpunkte
>   f'(x)=0 setzen
>   Wendepunkte:
>   f''(x)=0 setzen
> - Steigungen gegeben
>   f'(x)=m setzen

Aufgabe 16

Eine ganzrationale Funktion 4.Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt mit der Steigung m=4 und im Punkt T(2|4) einen Tiefpunkt.
Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion.

Aufgabe 17

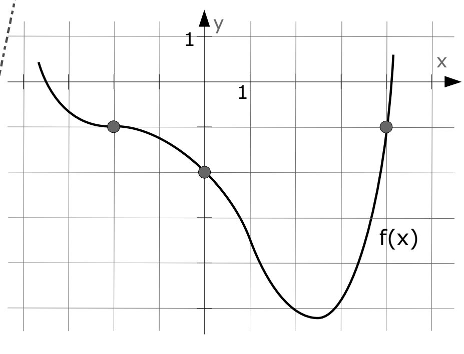
Eine ganzrationale Funktion 3.Grades ist symmetrisch zum Ursprung und hat im Punkt P(1|3) eine Tangente, die parallel zu y=-2x–77 ist.
Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion.

Aufgabe 18

Eine ganzrationale Funktion 3.Grades berührt die Gerade y=2x+1 an der y-Achse und hat bei W(1|2) einen Wendepunkt. Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion.

Aufgabe 19

Geben Sie die Gleichung dieser wunderschönen Kurve an! [siehe →Aufgabe 15]



Lösung von Aufgabe 16:
Für eine Funktion 4. Grades braucht man den Ansatz:
$f(x) = a\cdot x^4 + b\cdot x^3 + c\cdot x^2 + d\cdot x + e$
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

Die Funktion geht durch den *Ursprung*

$\Rightarrow$ $f(0) = 0$ $\quad a\cdot 0^4 + b\cdot 0^3 + c\cdot 0^2 + d\cdot 0 + e = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{e = 0}$

Im Ursprung ist ein *Wendepunkt:*

$\Rightarrow$ $f''(0) = 0$ $\quad 12a\cdot 0^2 + 6b\cdot 0 + 2c = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{c = 0}$

Im Ursprung [bei x=0] ist die *Steigung* m=4:

$\Rightarrow$ $f'(0) = 4$ $\quad 4a\cdot 0^3 + 3b\cdot 0^2 + 2c\cdot 0 + d = 4$ $\Rightarrow$ $\boxed{d = 4}$

Ein *Tiefpunkt* bei T(2|..)
$\Rightarrow$ $f'(2) = 0$ $\quad 4a\cdot 2^3 + 3b\cdot 2^2 + 2c\cdot 2 + d = 0$
[c=0 und d=4 einsetzen]
$32a + 12b + 4\cdot 0 + 4 = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{32a+12b = -4}$

Ein Punkt mit gegebenen *y-Wert* bei (2|4)
$\Rightarrow$ $f(2) = 4$ $\quad a\cdot 2^4 + b\cdot 2^3 + c\cdot 2^2 + d\cdot 2 + e = 4$
[c=0, d=4 und e=0 einsetzen]
$16a + 8b + 4\cdot 0 + 8 + 0 = 4$ $\Rightarrow$ $\boxed{16a+8b = -4}$

Lösen der erhaltenen Gleichungen:
Es sind nur zwei Gleichungen übrig geblieben:
① $32a+12b = -4$ und
② $16a+ 8b = -4$

In der ersten Gleichung könnte man beispielsweise nach a auflösen und in die zweite einsetzen!
① $32a + 12b = -4 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{4}{32}-\frac{12}{32}\cdot b$

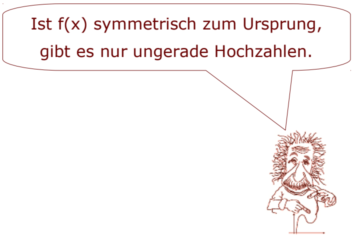
② $\Rightarrow$ $16\cdot\left(-\frac{4}{32}-\frac{12}{32}\cdot b\right)+ 8b = -4$ [vereinfachen...]

$\Rightarrow$ $-2 - 6b + 8b = -4$ $\Rightarrow$ $2b = -2$ $\Rightarrow$ $\boxed{b = -1}$

Mit $a = -\frac{4}{32}-\frac{12}{32}\cdot b$ ergibt sich ... $\boxed{a = ¼}$

Die Funktionsgleichung lautet also: $f(x) = ¼\cdot x^4 - x^3 + 4x$

Lösung von Aufgabe 17:
Für eine Funktion 3. Grades braucht man den Ansatz:
$f(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$



Wenn die Funktion symmetrisch zum Ursprung ist, hat sie *nur* ungerade Hochzahlen.

$\Rightarrow f(x) = a\cdot x^3 + c\cdot x$
$f'(x) = 3ax^2 + c$
$f''(x) = 6ax$

Der *y-Wert* bei x=1 ist gegeben:

$\Rightarrow f(1) = 3 \qquad a\cdot 1^3 + c\cdot 1 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a+c = 3}$

Wenn die Funktion parallel zu y=-2x–77 ist, müssen die Funktion und Gerade die gleiche *Steigung* haben. Es muss also gelten f'(x) = -2. Da das Ganze sich beim x-Wert x=1 abspielt, gilt:

$\Rightarrow f'(1) = -2 \qquad 3a\cdot 1^2 + c = -2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{3a+c = -2}$

Lösen der beiden erhaltenen Gleichungen:

① $a + c = 3$ – [Gleichungen voneinander abziehen]
② $3a + c = -2$

$-2a = +5 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a = -2{,}5}$

a in ① einsetzen: $-2{,}5 + c = 3 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{c = 5{,}5}$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet also: $f(x) = -2{,}5x^3 + 5{,}5x$

Lösung von Aufgabe 18:
Für eine Funktion 3. Grades braucht man den Ansatz:
$f(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

Die Funktion f(x) berührt die Gerade y=2x+1 bei der y-Achse. Bei der y-Achse gilt für den x-Wert x=0. Wenn sich Funktion und Gerade berühren, müssen sowohl ihre Steigungen als auch y-Werte gleich sein.

Der y-Wert bei x=0 kann über die Gerade ausgerechnet werden: $y = 2\cdot 0+1 = 1$
Die Gerade und die Funktion berühren sich demnach in $S_y(0|1)$.
Von diesem erhaltenen Punkt verwenden wir den *y-Wert*.

$\Rightarrow f(0) = 1 \qquad a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{d = 1}$

Die *Steigung* der Funktion muss gleich der Steigung der Geraden sein [beim x-Wert 0]:

$\Rightarrow$ f'(0) = 2 $\quad$ $3a\cdot 0^2 + c = 2$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\boxed{c = 2}$

Ein *Wendepunkt* bei W(1|..)

$\Rightarrow$ f''(1) = 0 $\quad$ $6a\cdot 1 + 2bc = 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\boxed{6a+2b = 2}$

y-Wert des Wendepunkts W(1|2)

$\Rightarrow$ f(1) = 2 $\quad$ $a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 + d = 2$

$a + b + 2 + 1 = 2$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\boxed{a+b = -1}$

Lösen der beiden erhaltenen Gleichungen:

① $\quad 6a + 2b = 2$

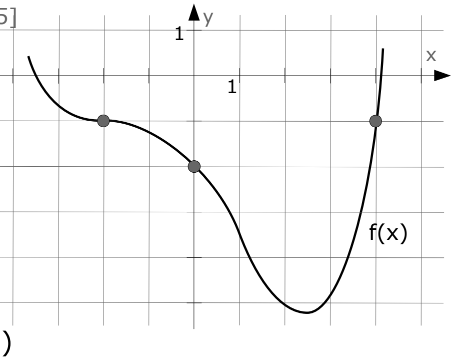
② $\quad a + b = -1 \quad |\cdot(-2)$ $\quad$ +

$4a = 4$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\boxed{a = 1}$

$a + b = -1$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\boxed{b = -2}$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet also: $\quad f(x) = x^3-2x^2+2x+1$

Lösung von Aufgabe 19: [siehe →Aufgabe 15]



Weil es eine Funktion 4. Grades ist, lautet unser Ansatz: $\quad f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

$f'(x) = 4ax^3+3bx^2+2cx+d$

$f''(x) = 12ax^2+6bx+2c$

Wir haben in der Skizze Folgendes:

→ W(-2|-1).
Es ist nicht nur ein popeliger Punkt, sondern sogar ein Wendepunkt mit der Steigung m=0, (also ein Sattelpunkt).

→ zwei weitere Punkte bei A(0|-2) und B(4|-1)

Wir haben also die Bedingungen:

①: $f(-2)=-1 \Leftrightarrow a\cdot(-2)^4+b\cdot(-2)^3+c\cdot(-2)^2+d\cdot(-2)+e=-1 \Leftrightarrow 16a-8b+4c-2d+e=-1$

②: $f''(-2)=0 \Leftrightarrow 12a\cdot(-2)^2+6b\cdot(-2)+2c = 0 \Leftrightarrow 48a-12b+2c = 0$

③: $f'(-2)=0 \Leftrightarrow 4a\cdot(-2)^3+3b\cdot(-2)^2+2c\cdot(-2)+d = 0 \Leftrightarrow -32a+12b-4c+d = 0$

④: $f(0) = -2 \Leftrightarrow a\cdot 0^4+b\cdot 0^3+c\cdot 0^2+d\cdot 0+e = -2 \Leftrightarrow e = -2$

⑤: $f(4) = -1 \Leftrightarrow a\cdot 4^4+b\cdot 4^3+c\cdot 4^2+d\cdot 4+e = -1 \quad \Leftrightarrow 256a+64b+16c+4d+e=-1$

Vereinfachen:
④: $e = -2$ (setzen wir gleich in alle anderen Gleichungen ein)
①: $16a-8b+4c-2d = +1$
②: $48a-12b+2c = 0$
③: $-32a+12b-4c+d = 0$
⑤: $256a+64b+16c+4d = +1$

Diese Gleichungen ①, ②, ③, ⑤ lösen wir mit dem Gauss-Verfahren (oder lassen sie vom Taschenrechner lösen, falls das möglich ist).

. . . .

Auf jeden Fall kommt raus: $a=\frac{1}{32}$, $b=\frac{1}{16}$, $c=-\frac{3}{8}$, $d=-\frac{5}{4}$ [und natürlich e=-2]

Die Funktion lautet also: $f(x) = \frac{1}{32}x^4+\frac{1}{16}x^3-\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{4}x-2$