

*Von diesem Kapitel existiert bisher leider nur eine veraltete Version.
Wir bitten um Entschuldigung, wir überarbeiten es schnellstmöglich.*

Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter
www.mathe-laden.de bestellen
(falls Sie das möchten).

Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht
aus dem Internet herunter geladen werden können.

Dazu gehören:

Inhaltsverzeichnis, Stichwortverzeichnis,
und viele **Aufgaben zum Selberrechnen.**



Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie
die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.

Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen
Erklärungen des Buches hin- und her springen.

Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

Sie können diese Datei gerne beliebig für den eigenen Gebrauch verwenden.
Nicht gestattet sind Änderungen sowie kommerzielle Nutzung.

mathe seite

Die gute Seite an Mathe.

Kap 08 Wurzelfunktionen

Ich denke `mal, dass es bei Wurzelfunktionen nur eine Sache gibt, die etwas ungewöhnlich ist, das ist das Kürzen bzw. Erweitern bei den Ableitungen. Rechnen wir ein paar hässliche Aufgaben.

Kap.08a) erste, hässliche Aufgabe

Es sei $f(x) = 0,5x \cdot \sqrt{16-x^2}$

- Kurvendiskussion und Zeichnung.
- Bestimmen Sie die Fläche, die $f(x)$ mit der x -Achse einschließt.
- Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch Drehung dieser Fläche um die x -Achse entsteht ! Zeigen Sie, dass dieser Körper nicht aus einer Kugel mit dem Durchmesser von 8(LE) herausgeschnitten werden kann.
- Der Punkt $P(u|v)$ mit $u > 0$ liegt auf der Kurve von $f(x)$. Prüfen Sie, ob es eine mögliche Lage für P gibt, so dass das Dreieck, welches von den Koordinatenachsen und der Tangente an $f(x)$ im Punkt P , einen extremalen Flächeninhalt hat. Geben Sie ggfs. die Koordinaten von P an.

Definitionsmenge:

$$16-x^2 > 0 \Rightarrow 16 > x^2 \Rightarrow -4 < x < 4$$

$$D = \{ x \mid -4 < x < 4 \}$$

Asymptoten:

keine senkrechten Asymptoten.

$$\text{für } x \rightarrow -4 \Rightarrow f(x) \rightarrow -2 \cdot 0 = 0$$

$$\text{für } x \rightarrow +4 \Rightarrow f(x) \rightarrow 2 \cdot 0 = 0$$

\Rightarrow keine Asymptoten.

Symmetrie:

Wenn Ihr die Funktion vom Taschenrechner zeichnen lasst, könnt Ihr anhand vom Schaubild eine Symmetrie zum Ursprung vermuten.

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) \\ 0,5x \cdot \sqrt{16-x^2} &= -(0,5 \cdot (-x) \cdot \sqrt{16-(-x)^2}) \\ 0,5x \cdot \sqrt{16-x^2} &= -(-0,5x \cdot \sqrt{16-x^2}) \\ 0,5x \cdot \sqrt{16-x^2} &= 0,5x \cdot \sqrt{16-x^2} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow Symmetrie zum Ursprung

Ableitungen:

$$f(x) = 0,5x \cdot \sqrt{16-x^2}$$

$$f'(x) = 0,5 \cdot \sqrt{16-x^2} + 0,5x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{16-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16-x^2} - \frac{x^2}{2 \cdot \sqrt{16-x^2}} = \text{ (1) } =$$

1 Den ersten Bruch mit $\sqrt{16-x^2}$ erweitern.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(16-x^2)}{2 \cdot \sqrt{16-x^2}} - \frac{x^2}{2 \cdot \sqrt{16-x^2}} = \frac{16-x^2-x^2}{2 \cdot \sqrt{16-x^2}} = \frac{16-2x^2}{2 \cdot \sqrt{16-x^2}} = \frac{2 \cdot (8-x^2)}{2 \cdot \sqrt{16-x^2}} = \frac{8-x^2}{\sqrt{16-x^2}} \\
 f''(x) &= \frac{-2x \cdot \sqrt{16-x^2} - (8-x^2) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{16-x^2}} \cdot (-2x)}{(16-x^2)} = \frac{-2x \cdot \sqrt{16-x^2} + \frac{8x-x^3}{\sqrt{16-x^2}}}{(16-x^2)} = \text{Bruch mit } \sqrt{16-x^2} \text{ erweitern} = \\
 &= \frac{-2x \cdot (16-x^2) + (8x-x^3)}{(16-x^2) \cdot \sqrt{16-x^2}} = \frac{-32x+2x^3+8x-x^3}{\sqrt{(16-x^2)^3}} = \frac{x^3-24x}{(16-x^2)^{1,5}} \\
 f'''(x) &= \frac{(3x^2-24) \cdot (16-x^2)^{1,5} - (x^3-24x) \cdot 1,5 \cdot (16-x^2)^{0,5} \cdot (-2x)}{(16-x^2)^3} = (16-x^2)^{0,5} \text{ ausklammern} = \\
 &= \frac{(16-x^2)^{0,5} \cdot [(3x^2-24) \cdot (16-x^2)^1 - (x^3-24x) \cdot 1,5 \cdot (-2x)]}{(16-x^2)^3} = \frac{(3x^2-24) \cdot (16-x^2) - (x^3-24x) \cdot (-3x)}{(16-x^2)^{2,5}} = \\
 &= \frac{48x^2-3x^4-384+24x^2+3x^4-72x^2}{(16-x^2)^{2,5}} = \frac{-384}{(16-x^2)^{2,5}}
 \end{aligned}$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 \\
 0,5x \cdot \sqrt{16-x^2} &= 0 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 x_1 &= 0 & \sqrt{16-x^2} &= 0 & | \cdot ()^2 \\
 & & 16-x^2 &= 0 & \\
 & & x_{2,3} &= \pm 4 & \\
 & & & & N_1(0 | 0) \\
 & & & & N_2(4 | 0) \\
 & & & & N_3(-4 | 0)
 \end{aligned}$$

Extremstellen:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 \frac{8-x^2}{\sqrt{16-x^2}} &= 0 & | \cdot \sqrt{16-x^2} \\
 8-x^2 &= 0 & | +x^2 \quad | \sqrt{} \\
 x_{1,2} &= \pm \sqrt{8}
 \end{aligned}$$

$$f''(+\sqrt{8}) = \frac{\sqrt{8}^3 - 24 \cdot \sqrt{8}}{(16 - \sqrt{8}^2)^{1,5}} = \frac{\sqrt{8} \cdot (\sqrt{8}^2 - 24)}{8^{1,5}} = \frac{-16 \cdot \sqrt{8}}{8^1 \cdot 8^{0,5}} = -2 < 0 \Rightarrow H(\sqrt{8} | ?)$$

$$f(+\sqrt{8}) = 0,5 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{16 - \sqrt{8}^2} = 0,5 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} = 4 \Rightarrow H(\sqrt{8} | 4)$$

aus Symmetriegründen gibt es (am Ursprung gespiegelt) einen Tiefpunkt

$$T(-\sqrt{8} | -4)$$

Wendepunkte:

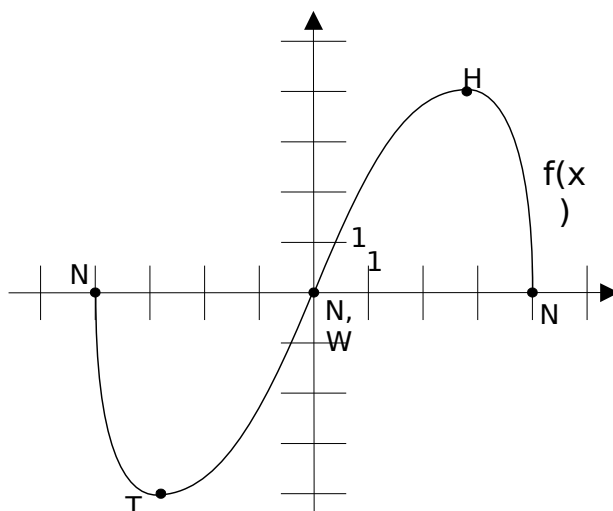
$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 0 \\
 \frac{x^3-24x}{(16-x^2)^{1,5}} &= 0 & | \cdot (16-x^2)^{1,5} \\
 x^3 - 24x &= 0 \\
 x \cdot (x^2-24) &= 0 \\
 \swarrow \quad \searrow
 \end{aligned}$$

$$x_1=0 \quad x^2-24 = 0 \\ x_{2,3} \approx \pm 4,89 \notin D$$

$$f'''(0) = \frac{-384}{(16-0^2)^{2,5}} = \frac{-384}{1024} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W(0|?)$$

$$f(0) = 0,5 \cdot 0 \cdot \sqrt{16-0^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad W(0|0)$$

Zeichnung:



Fläche mit der x-Achse:

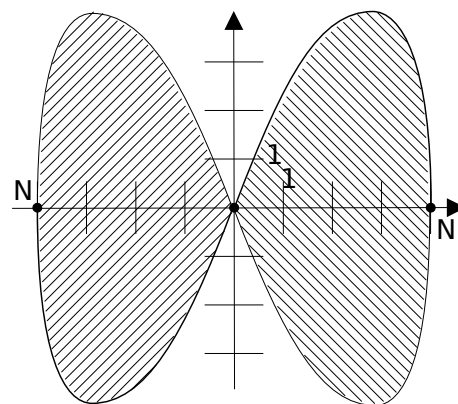
Es gibt zwei Teilflächen, jedoch sind beide aus Symmetriegründen gleich. $dx = \frac{du}{u'}$

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \int_0^4 0,5x \cdot \sqrt{16-x^2} dx = \text{Substitution } u=16-x^2 = 2 \cdot \int_{x_1=0}^{x_2=4} 0,5x \cdot \sqrt{u} dx = \\ &= 2 \cdot 0,5 \cdot \int_{u_1=16}^{u_2=0} x \cdot \sqrt{u} \frac{du}{u'} = u'=-2x = 1 \cdot \int_{16}^0 x \cdot \sqrt{u} \frac{du}{-2x} = -\frac{1}{2} \cdot \int_{16}^0 \sqrt{u} du = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \int_{16}^0 u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{16}^0 = -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} 0^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} 16^{\frac{3}{2}} \right] = [0] + \left[\frac{64}{3} \right] = \\ &\frac{64}{3} \end{aligned}$$

Rotation der Fläche um die x-Achse:

Es gibt auch hier zwei symmetrische Teilkörper. Wir berechnen das Volumen vom rechten und verdoppeln es.

$$\begin{aligned} V_{\text{Rot}} &= 2 \cdot \pi \cdot \int_0^4 [f(x)]^2 dx = 2\pi \cdot \int_0^4 0,25x^2 \cdot (16-x^2) dx = \\ &= 2\pi \cdot \int_0^4 4x^2 - 0,25x^4 dx = \pi \cdot \int_0^4 8x^2 - 0,5x^4 dx = \\ &= \pi \cdot \left[\frac{8}{3} x^3 - \frac{1}{10} x^5 \right]_0^4 = \pi \cdot \left[\frac{1024}{15} \right] - \pi \cdot [0] = \frac{1024}{15} \pi \end{aligned}$$



Entlang der x-Achse hat dieser Körper eine Ausdehnung von 8 (LE), das entspricht genau dem Durchmesser der gewünschten Kugel. Wir können also davon ausgehen, dass die Kugel, um die es geht, ihren Mittelpunkt im Ursprung hat.

Also dürfte jeder Punkt des Rotationskörpers vom Ursprung höchstens einen Abstand von $d=4$ (=Radius) haben. Jedoch hat schon der Hochpunkt von $f(x)$ vom Ursprung einen Abstand von:

$$d = \sqrt{(x_H - x_0)^2 + (y_H - y_0)^2} = \sqrt{(\sqrt{8} - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{24} > 4$$

Extremale Dreiecksfläche ...

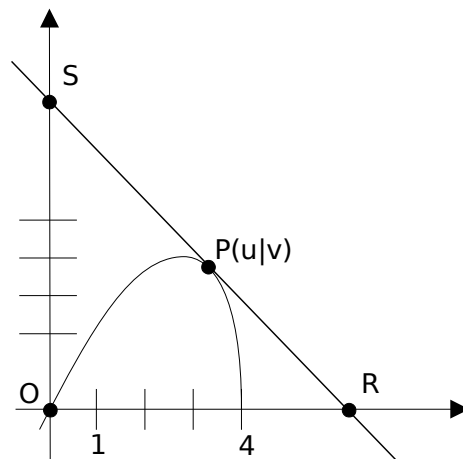
Es geht offensichtlich um einen Punkt P, der irgendwo auf der Funktion $f(x)$ liegt. Da er auf der Funktion liegt, hat er den y-Wert $f(u)$. P hat also die Koordinaten:

$$P(u|f(u)) = P(u|0,5u\sqrt{16-u^2})$$

Durch diesen Punkt P geht eine Tangente, die mit den Koordinatenachsen ein Dreieck bildet. Die Fläche von diesem Dreieck soll extremal werden.

Wenn wir den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse „R“ nennen und den mit der y-Achse „S“, gilt für die Dreiecksfläche:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot x_R \cdot y_S \quad (\text{wobei } x_R \text{ natürlich der x-Wert von R und } y_S \text{ natürlich der y-Wert von S ist})$$



Wir stellen also zuerst die Tangentengleichung an $f(x)$ in P auf, schneiden die Tangente dann mit den Koordinatenachsen und berechnen den Flächeninhalt der Dreiecks.

Anschließend leiten wir den Flächeninhalt ab und setzen $A'=0$, da die Dreiecksfläche ja extremal werden soll. Das war's auch schon. (Klingt nicht so wild, oder ??)

Tangentengleichung:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

← Ihr könnt hier mit der Punkt-Steigungs-Formel anfangen.

$$f'(u) = \frac{y - f(u)}{x - u} \quad | \cdot (x - u)$$

$$f'(u) \cdot (x - u) = y - f(u)$$

$$y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

← Ihr könnt auch erst hier mit der Tangenten-Formel anfangen.

$$y = \frac{8 - u^2}{\sqrt{16 - u^2}} \cdot (x - u) + 0,5u \cdot \sqrt{16 - u^2}$$

Schnittpunkt der Tangente mit der y-Achse:

$$x = 0$$

$$y = \frac{8 - u^2}{\sqrt{16 - u^2}} \cdot (0 - u) + 0,5u \cdot \sqrt{16 - u^2} = \frac{-8u + u^3}{\sqrt{16 - u^2}} + 0,5u \cdot \sqrt{16 - u^2} =$$

$$= \text{zweiten Bruch mit } \sqrt{16 - u^2} \text{ erweitern} = \frac{-8u + u^3}{\sqrt{16 - u^2}} + \frac{0,5u \cdot (16 - u^2)}{\sqrt{16 - u^2}} =$$

$$= \frac{-8u+u^3+0,5u \cdot (16-u^2)}{\sqrt{16-u^2}} = \frac{-8u+u^3+8u-0,5u^3}{\sqrt{16-u^2}} =$$

$$\Rightarrow y_s = \frac{0,5u^3}{\sqrt{16-u^2}}$$

Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse:

$$y = 0$$

$$0 = \frac{8-u^2}{\sqrt{16-u^2}} \cdot (x-u) + 0,5u \cdot \sqrt{16-u^2} \quad | \cdot \sqrt{16-u^2}$$

$$0 = (8-u^2) \cdot (x-u) + 0,5u \cdot (16-u^2) \quad | - 0,5u \cdot (16-u^2)$$

$$-0,5u \cdot (16-u^2) = (8-u^2) \cdot (x-u)$$

$$-8u + 0,5u^3 = (8-u^2) \cdot (x-u) \quad | : (8-u^2)$$

$$\frac{-8u+0,5u^3}{8-u^2} = x-u \quad | + u$$

$$x = \frac{-8u+0,5u^3}{8-u^2} + u$$

$$x = \frac{-8u+0,5u^3}{8-u^2} + \frac{u \cdot (8-u^2)}{8-u^2}$$

$$x = \frac{-8u+0,5u^3+8u-u^3}{8-u^2}$$

$$\Rightarrow x_R = \frac{-0,5u^3}{8-u^2} = \frac{0,5u^3}{u^2-8}$$

Flächeninhalt des Dreiecks bestimmen:

$$A_{\Delta}(u) = \frac{1}{2} \cdot x_R \cdot y_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,5u^3}{u^2-8} \cdot \frac{0,5u^3}{\sqrt{16-u^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4}u^6}{(u^2-8) \cdot \sqrt{16-u^2}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{u^6}{(u^2-8) \cdot \sqrt{16-u^2}}$$

Flächeninhaltsformel ableiten ⁽²⁾

$$A'(u) = \frac{1}{8} \cdot \frac{6u^5 \cdot (u^2-8) \cdot \sqrt{16-u^2} - u^6 \cdot [2u \cdot \sqrt{16-u^2} + (u^2-8) \cdot \frac{1}{2\sqrt{16-u^2}} \cdot (-2u)]}{(u^2-8)^2 \cdot (16-u^2)} = \text{mit } \sqrt{16-u^2} \text{ erweitern} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{6u^5 \cdot (u^2-8) \cdot (16-u^2) - u^6 \cdot [2u \cdot (16-u^2) + (u^2-8) \cdot 1 \cdot (-u)]}{(u^2-8)^2 \cdot (16-u^2) \cdot \sqrt{16-u^2}} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{6u^5 \cdot (16u^2 - u^4 - 128 + 8u^2) - u^6 \cdot [32u - 2u^3 - u^3 + 8u]}{(u^2-8)^2 \cdot \sqrt{(16-u^2)^3}} =$$

2 Das $\frac{1}{8}$ vor dem Bruch bleibt einfach unbeachtet stehen, da man Zahlen, die mit „mal“ verbunden sind, ignoriert. Den Bruch selber leitet man natürlich mit Quotientenregel ab, wobei der Nenner selber ein Produkt ist, also mit Produktregel abgeleitet werden muss.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \cdot \frac{6u^5 \cdot (-u^4 + 24u^2 - 128) - u^6 \cdot [-3u^3 + 40u]}{(u^2 - 8)^2 \cdot \sqrt{(16 - u^2)^3}} = \\
&= \frac{1}{8} \cdot \frac{-6u^9 + 144u^7 - 768u^5 + 3u^9 - 40u^7}{(u^2 - 8)^2 \cdot \sqrt{(16 - u^2)^3}} = \\
&= \frac{1}{8} \cdot \frac{-3u^9 + 104u^7 - 768u^5}{(u^2 - 8)^2 \cdot \sqrt{(16 - u^2)^3}}
\end{aligned}$$

Extremwerte ausrechnen:

$$A'(u) = 0$$

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{-3u^9 + 104u^7 - 768u^5}{(u^2 - 8)^2 \cdot \sqrt{(16 - u^2)^3}} = 0 \quad | \cdot 8 \cdot (u^2 - 8)^2 \cdot \sqrt{(16 - u^2)^3}$$

$$-3u^9 + 104u^7 - 768u^5 = 0$$

$$u^5 \cdot (-3u^4 + 104u^2 - 768) = 0 \quad u \neq 0$$

$$-3u^4 + 104u^2 - 768 = 0 \quad | : (-3) \quad \text{Substitution: } z = u^2$$

$$z^2 - \frac{104}{3}z + 256 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{52}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{52}{3}\right)^2 - 256} = \frac{52}{3} \pm \frac{20}{3}$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{72}{3} = 24 \quad z_2 = \frac{32}{3}$$

$$u^2 = 24 \quad u^2 = \frac{32}{3}$$

$$u_{1,2} \approx \pm 4,90 \quad u_{3,4} \approx \pm 3,27$$

Da die Definitionsmenge von $f(x)$ überhaupt nur zwischen „-4“ und „+4“ liegt, fällt u_1 und u_2 weg. Da $u > 0$, fällt auch $u_4 = -3,27$ weg, einzige Lösung ist also $u_3 = +3,27$

$$\Rightarrow u = 3,27 \quad \Rightarrow \mathbf{P(3,27 | f(3,27))}$$

Kap.08b) zweite, hässliche Aufgabe

Es sei $f_t(x) = \frac{t^2}{\sqrt{2tx - x^2}} \quad t > 0$

- Kurvendiskussion und Zeichnung von $f_1(x)$ und $f_2(x)$.
- Zeigen Sie, dass $f_t(x)$ eine Symmetrieachse besitzt.
- Bestimmen Sie die Ortskurve aller Extrema !
- Bestimmen Sie diejenigen Bereiche, in denen $f_t(x)$ umkehrbar ist, sowie Defintions- und Wertemenge der Umkehrfunktion.

-Bestimmen Sie für $t < x < 2t$ eine Umkehrfunktion $f_t^{-1}(x)$ von $f_t(x)$.

-Für jedes u mit $t < u < 1,5t$ bildet der Punkt $P(u|f(u))$ mit $T(t|t)$ und dem Punkt $R(u|0)$ ein Dreieck. Geben Sie den durchschnittlichen Flächeninhalt von allen dabei entstehenden Dreiecken an !

Definitionsmenge:

$$2tx - x^2 > 0 \quad (^3)$$

$$x \cdot (2t - x) > 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{I.Fall: } \begin{array}{l} x > 0 \wedge 2t - x > 0 \\ x > 0 \wedge x < 2t \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{II.Fall: } \begin{array}{l} x < 0 \wedge 2t - x < 0 \\ x < 0 \wedge x > 2t \end{array}$$

(Der II.Fall liefert gar keine Lösung. Da $t > 0$, hieße das nämlich, dass $x < 0$, allerdings größer als $2t$, also größer als irgendein positiver Wert. Das ist natürlich ein Widerspruch. Es bleibt also nur Fall I übrig.)

$$D = \{ x \mid 0 < x < 2t \}$$

2t }

Asymptoten:

Senkrechte Asymptoten gibt's bei ln-Funktionen und bei Brüchen, wenn der Nenner Null wird.

$$\text{Nenner} = \text{Null} \Leftrightarrow 2tx - x^2 = 0 \Leftrightarrow x \cdot (2t - x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2t$$

Es gibt also vermutlich zwei senkrechte Asymptoten, bei $x_1 = 0$ und bei $x_2 = 2t$.

(Beides sind auch die Ränder der Definitionsmenge, daher können wir uns nachher das Verhalten von $f(x)$ am Rand der Definitionsmenge sparen.)

$$\text{für } x \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f_t(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t^2}{\sqrt{2tx - x^2}} = +\infty$$

$$\text{für } x \rightarrow 2t \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2t} f_t(x) = \lim_{x \rightarrow 2t} \frac{t^2}{\sqrt{2tx - x^2}} = +\infty$$

**zwei senkrechte Asymptoten.
bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2t$**

Symmetrie:

Die Definitionsmenge ist weder zum Ursprung noch zur y-Achse symmetrisch, also kann es auch die Funktion nicht sein. (Symmetrie zu anderen Achsen oder Punkten ist deswegen immer noch möglich. Das müssen wir nach der Kurvendiskussion sowieso machen)

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{t^2}{\sqrt{2tx - x^2}} = \frac{t^2}{(2tx - x^2)^{0,5}}$$

$$f'(x) = \frac{-0,5 \cdot (2tx - x^2)^{-0,5} - t^2 \cdot 0,5 \cdot (2tx - x^2)^{-0,5} \cdot (2t - 2x)}{(2tx - x^2)^1} = \frac{-0,5t^2 \cdot (2tx - x^2)^{-0,5} \cdot (2t - 2x)}{(2tx - x^2)^1} = \text{mit } (2tx - x^2)^{0,5} \text{ erweitern}$$

=

$$= \frac{-0,5t^2 \cdot 1 \cdot (2t - 2x)}{(2tx - x^2)^1 \cdot (2tx - x^2)^{0,5}} = \frac{-0,5t^2 \cdot (2t - 2x)}{(2tx - x^2)^{1,5}} = \frac{-t^3 + t^2x}{(2tx - x^2)^{1,5}}$$

3 Nur wegen der Wurzel müsste man den Ansatz „ $2tx - x^2 \geq 0$ “ machen. Da der Term im Nenner steht, darf er nicht *genau* Null werden. Deswegen muss es statt „ \geq “ einfach nur „ $>$ “ heißen.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{t^2 \cdot (2tx - x^2)^{1,5} - (-t^3 + t^2x) \cdot 1,5(2tx - x^2)^{0,5} \cdot (2t - 2x)}{(2tx - x^2)^3} = \text{oben } (2tx - x^2)^{0,5} \text{ ausklammern} = \\
 &= \frac{(2tx - x^2)^{0,5} \cdot [t^2 \cdot (2tx - x^2)^1 - (-t^3 + t^2x) \cdot 1,5 \cdot 1 \cdot (2t - 2x)]}{(2tx - x^2)^3} = \frac{t^2 \cdot (2tx - x^2) - (-t^3 + t^2x) \cdot (3t - 3x)}{(2tx - x^2)^{2,5}} = \\
 &= \frac{2t^3x - t^2x^2 - (-3t^4 + 3t^3x + 3t^3x - 3t^2x^2)}{(2tx - x^2)^{2,5}} = \frac{2t^3x - t^2x^2 + 3t^4 - 6t^3x + 3t^2x^2}{(2tx - x^2)^{2,5}} = \frac{2t^2x^2 - 4t^3x + 3t^4}{(2tx - x^2)^{2,5}}
 \end{aligned}$$

$f'''(x)$ Die dritte Ableitung spare ich mir, da es (laut Taschenrechner-Zeichnung) wahrscheinlich gar keine Wendestellen hat. Wenn's doch welche hat, müssen wir $f'''(x)$ gegebenenfalls später noch ausrechnen.

Nullstellen:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 \\
 \frac{t^2}{\sqrt{2tx - x^2}} &= 0 && | \cdot \sqrt{2tx - x^2} \\
 t^2 &= 0 && \text{keine Nullstellen}
 \end{aligned}$$

Extremstellen:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 \frac{-t^3 + t^2x}{(2tx - x^2)^{1,5}} &= 0 && | \cdot \sqrt{2tx - x^2} \\
 -t^3 + t^2x &= 0 && | +t^3 \quad | : t^2 \\
 \Rightarrow x &= t
 \end{aligned}$$

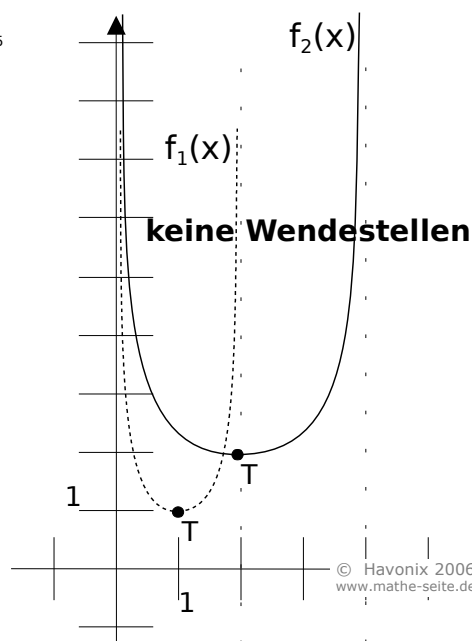
$$f''(t) = \frac{2t^2 \cdot t^2 - 4t^3 \cdot t + 3t^4}{(2t \cdot t - t^2)^{2,5}} = \frac{2t^4 - 4t^4 + 3t^4}{(t^2)^{2,5}} = \frac{t^4}{t^5} = \frac{1}{t} > 0 \Rightarrow T(t | ?)$$

$$f(t) = \frac{t^2}{\sqrt{2t \cdot t - t^2}} = \frac{t^2}{\sqrt{t^2}} = t \Rightarrow T(t | t)$$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 0 \\
 \frac{2t^2x^2 - 4t^3x + 3t^4}{(2tx - x^2)^{2,5}} &= 0 && | \cdot (2tx - x^2)^{2,5} \\
 2t^2x^2 - 4t^3x + 3t^4 &= 0 && | : 2t^2 \\
 x^2 - 2tx + 1,5t^2 &= 0 \\
 x_{1,2} &= t^2 \pm \sqrt{t^2 - 1,5t^2} = t^2 - \sqrt{-0,5t^2} && \Rightarrow \text{keine Wendestellen}
 \end{aligned}$$

Zeichnung:



Symmetrieachse:

Wenn man sich die Zeichnung anschaut, sieht man, es gibt nur eine Möglichkeit für eine Symmetrieachse: *Wenn* es eine Symmetrieachse gibt, dann muss sie senkrecht durch den Tiefpunkt gehen. Da der Tiefpunkt den x-Wert $x=t$ hat, ist „ $x=t$ “ auch unsere (senkrechte) Symmetrieachse.

Beweis der Symmetrieachse $x=t$!

$$\begin{aligned} f(t-x) &= f(t+x) \\ \frac{t^2}{\sqrt{2t \cdot (t-x) - (t-x)^2}} &= \frac{t^2}{\sqrt{2t \cdot (t+x) - (t+x)^2}} \\ \frac{t^2}{\sqrt{2t^2 - 2tx - (t^2 - 2tx + x^2)}} &= \frac{t^2}{\sqrt{2t^2 + 2tx - (t^2 + 2tx + x^2)}} \\ \frac{t^2}{\sqrt{2t^2 - 2tx - t^2 + 2tx - x^2}} &= \frac{t^2}{\sqrt{2t^2 + 2tx - t^2 - 2tx - x^2}} \\ \frac{t^2}{\sqrt{t^2 - x^2}} &= \frac{t^2}{\sqrt{t^2 - x^2}} \end{aligned}$$

Ortskurve aller Tiefpunkte:

Da der Tiefpunkt die Koordinaten $T(t|t)$ hat, gilt:

$$x_T = t \quad \text{und} \quad y_T = t \quad \Rightarrow \quad y = x$$

Die Ortskurve aller Tiefpunkte lautet: $y = x$ (die erste Winkelhalbierende)

Bereiche, in denen $f_t(x)$ umkehrbar ist:

Eine Funktion ist da umkehrbar, wo sie monoton fällt oder monoton wächst.

Wenn Ihr Euch nun die Zeichnung anschaut (und gleichzeitig die Ergebnisse der Kurvendiskussion vor Augen haltet), sieht man, dass die Funktion links, oben, bei $x=0$ beginnt und dann bis zum Tiefpunkt monoton fällt. Vom Tiefpunkt ($x=t$) steigt sie bis zur senkrechten Asymptote $x=2t$. Damit ist die Funktion im Bereich von $x=0$ bis $x=t$ und im Bereich $x=t$ bis $x=2t$ umkehrbar. (Man hat also die Umkehrbarkeit ganz einfach erkennen können, indem man sich Definitionsbereich, Asymptoten und Extrempunkte überlegt hat).

$$\Rightarrow f_t(x) \text{ ist umkehrbar in den beiden Intervallen: } I_1 =] 0 ; t [\quad \text{und} \quad I_2 =] t ; 2t [$$

Für die Defintions- und Wertemenge der Umkehrfunktion gilt:

$$D_{f^{-1}} = W_f \quad \text{und} \quad W_{f^{-1}} = D_f$$

Die Definitionsmenge der Funktion haben wir bereits berechnet,

$$D_f = \{ x \mid 0 < x < 2t \} \quad \Rightarrow \quad W_{f^{-1}} = \{ y \mid 0 < y < 2t \}$$

Die Wertemenge von $f_t(x)$ kann/muss man an der Zeichnung ablesen: Es kommen nur y -Werte vor, die größer als der y -Wert des Tiefpunktes sind $\Rightarrow y > y_T = t$

$$W_f = \{ y \mid y > t \} \quad \Rightarrow \quad D_{f^{-1}} = \{ x \mid x > t \}$$

Umkehrfunktion von $f_t(x)$ im Intervall $]t; 2t[$

In $f_t(x)$ nach „x“ auflösen, dann „x“ und „y“ vertauschen.

$$y = \frac{t^2}{\sqrt{2tx-x^2}} \quad | \cdot \sqrt{2tx-x^2}$$

$$y \cdot \sqrt{2tx-x^2} = t^2 \quad | ()^2$$

$$y^2 \cdot (2tx - x^2) = t^4 \quad | : y^2$$

$$2tx - x^2 = \frac{t^4}{y^2} \quad | - \frac{t^4}{y^2} \quad | : (-1)$$

$$x^2 - 2tx + \frac{t^4}{y^2} = 0$$

$$x_{1,2} = +t \pm \sqrt{t^2 - \frac{t^4}{y^2}}$$

\Rightarrow Umkehrfunktion $f_t^{-1}(x) = +t \pm \sqrt{t^2 - \frac{t^4}{x^2}}$

(Erläuterung: $f_t(x)$ ist in zwei Bereichen umkehrbar, wie wir in der letzten Fragestellung herausgefunden haben. Deswegen ist auch klar, dass wir zwei Umkehrfunktionen erhalten müssen [Für jeden Bereich eine]. Aus diesem Grund haben wir in der Umkehrfunktion auch das „±“: Die „+“-Lösung ist die eine Funktion, die „-“-Lösung ist die zweite Funktion.

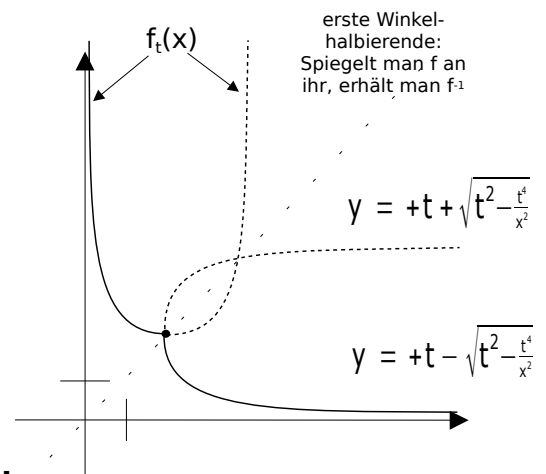
Nun muss man nur noch herausfinden, welche Umkehrfunktion zu welchem Bereich gehört. Wenn man von einer Funktion die Umkehrfunktion berechnet, vertauschen sich „x“ und „y“. Das heißt natürlich, dass zum größeren x-Wert aus der Funktion ein größerer y-Wert der Umkehrfunktion gehört. Schauen wir uns also die beiden Intervalle an, in denen $f_t(x)$ umkehrbar ist: $]0;t[$ und $]t;2t[$. Der Bereich $]t;2t[$ ist derjenige mit den größeren x-Werten. Aus diesem Bereich geht auch die Umkehrfunktion mit den größeren y-Werten hervor.)

Aus dem Intervall $]t; 2t[$ geht die

Umkehrfunktion $f_t^{-1}(x) = +t + \sqrt{t^2 - \frac{t^4}{x^2}}$ hervor,

(aus dem Intervall $]0; t[$ geht die

Umkehrfunktion $f_t^{-1}(x) = +t - \sqrt{t^2 - \frac{t^4}{x^2}}$ hervor.)



Durchschnittlicher Flächeninhalt von allen Dreiecken:

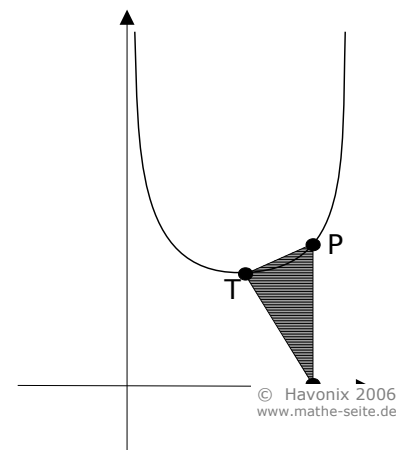
Wenn man PR als Grundlinie des Dreiecks wählt und den Abstand von T zur Seite PR als Höhe, erhält man:

$$g_{\Delta} = y_P - y_R = f(u) - 0 = f(u)$$

$$h_{\Delta} = x_P - x_T = u - t$$

Damit erhält man für den Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot f(u) \cdot (u-t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{\sqrt{2tu-u^2}} \cdot (u-t)$$



$$\Rightarrow A_t(u) = \frac{t^2(u-t)}{2\sqrt{2tu-u^2}}$$

Nun brauchen wir den Mittelwert von diesen Flächeninhalten,
und zwar für alle u-Werte zwischen $u_1=t$ und $u_2=1,5t$

(Für den durchschnittlichen Wert irgendeiner Funktion $h(x)$

innerhalb der Grenzen $x_1=a$ und $x_2=b$ gilt die Formel: $\frac{1}{b-a} \int_a^b h(x) dx$)

$$\Rightarrow \bar{A}_t(u) = \frac{1}{1,5t-t} \int_t^{1,5t} A_t(u) du = \frac{1}{0,5t} \int_t^{1,5t} \frac{t^2(u-t)}{2\sqrt{2tu-u^2}} du =$$

Wir substituieren: $z=2tu-u^2 \Rightarrow z'=2t-2u$

Im nächsten Schritt werden wir noch die Grenzen tauschen müssen.

$$x_2=1,5t \Rightarrow z_2 = 2t \cdot 1,5t - (1,5t)^2 = 3t^2 - 2,25t^2 = 0,75t^2 \quad x_1=t \Rightarrow z_1 = 2t \cdot t - t^2 = 2t^2 - t^2 = t^2$$

$$= \frac{1}{0,5t} \int_t^{1,5t} \frac{t^2(u-t)}{2\sqrt{z}} du = \left(du = \frac{dz}{z'} \right) = \frac{1}{0,5t} \int_{t^2}^{0,75t^2} \frac{t^2(u-t)}{2\sqrt{z}} \frac{dz}{z'} = z' = 2t - 2u =$$

$$= \frac{1}{0,5t} \int_{t^2}^{0,75t^2} \frac{t^2(u-t)}{2\sqrt{z}} \frac{dz}{2t-2u} = \frac{1}{0,5t} \int_{t^2}^{0,75t^2} \frac{t^2(u-t)}{2\sqrt{z}} \frac{dz}{-2 \cdot (u-t)} = \frac{1}{0,5t} \int_{t^2}^{0,75t^2} \frac{t^2}{-4\sqrt{z}} dz =$$

$$= \frac{1}{-2t} \int_{t^2}^{0,75t^2} \frac{t^2}{z^{0,5}} dz = -\frac{1}{2t} \int_{t^2}^{0,75t^2} t^2 \cdot z^{-0,5} dz = t^2 \text{ vors Integral ziehen} = -\frac{t}{2} \int_{t^2}^{0,75t^2} z^{-0,5} dz =$$

$$= -\frac{t}{2} \left[\frac{1}{0,5} z^{0,5} \right]_{t^2}^{0,75t^2} = -t \left[z^{0,5} \right]_{t^2}^{0,75t^2} = -t \left[\sqrt{0,75t^2} \right] + t \left[\sqrt{t^2} \right] = -t \left[t\sqrt{0,75} \right] + t \left[t \right] =$$

$$= t^2 - t^2 \cdot \sqrt{0,75} \approx t^2 \cdot 0,133$$

Ente-Banane !