Von diesem Kapitel existiert bisher leider nur eine veraltete Version.
Wir bitten um Entschuldigung, wir überarbeiten es schnellstmöglich.

Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter **www.mathe-laden.de** bestellen (falls Sie das möchten).
Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht aus dem Internet herunter geladen werden können.
Dazu gehören:
Inhaltsverzeichnis, **Stichwortverzeichnis**,
und viele **Aufgaben zum Selberrechnen**.

Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.
Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

matheseite

Die gute Seite an Mathe.

6 Gebrochen-Rationale Funktionen

6.1 Besonderheiten (∰)

Gebrochen-rationale Funktionen sind Funktionen, die ein „x" im Nenner haben. Typisch für gebrochen-rationale Funktionen sind die verschiedenen Asymptoten, hauptsächlich senkrechte Asymptoten [auch „Polstellen" oder „Definitionslücken" genannt], aber es gibt meist auch waagerechte Asymptoten oder schiefe Asymptoten.
Für die Ableitungen benötigt man meistens die Quotientenregel.

Im Schaubild erkennt man gebrochen-rationalen Funktionen üblicherweise daran, dass senkrechte Asymptote(n) die Funktion in mehrere Teile aufteilt.

6.2 Nullstellen (∰)

Man setzt die Gleichung Null und multipliziert mit dem Nenner. Man erhält sofort eine Gleichung vom ganzrationalen Typ. [Also: Ausklammern, Mitternachtsformel, Substitution, etc..] [siehe Kap. „1.4 Nullstellen"]

Hat eine Gleichung ein „x" im Nenner, so multipliziert man die Gleichung immer mit diesem Nenner !

Bsp.1
Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f(x) mit:

$$f(x) = \frac{6x}{x^2-4}$$

Lösung:

$f(x) = 0$

$\frac{6x}{x^2-4} = 0$ $\quad | \cdot (x^2-4)$

$6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad$ **N(0 | 0)**

Bsp.2
Löse die Gleichung: $\frac{-2x^2+6x}{(x+1)^2} = 0$

Lösung:

$\frac{-2x^2+6x}{(x+1)^2} = 0$ $\quad | \cdot (x+1)^2$

$-2x^2 + 6x = 0$ Ausklammern oder p-q-Formel.

$x \cdot (-2x+6) = 0$

$x_1=0 \quad x_2=3 \quad \Rightarrow \quad$ $\mathbf{x_1=0, \quad x_2=3}$

Bsp.3
Löse die Gleichung: $3-\frac{2}{x^2-4} = 0$

Wenn es in einer Gleichung einen Nenner gibt, multipliziert man **immer** mit diesem Nenner.

Lösung:

$3-\frac{2}{x^2-4}=0$ $\quad | \cdot (x^2-4)$

$3\cdot(x^2-4)-2=0$

$3x^2-12-2=0$ $\quad |+14 \quad |:3$

$x^2=\frac{14}{3}$ $\quad \Rightarrow \quad$ $\mathbf{x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{14}{3}}}$

Bsp.4

Bestimme die Nullstellen von $f(x)=\frac{6-4x}{(x+2)^2}$

Lösung:

$\frac{6-4x}{(x+2)^2}=0$ $\quad |\cdot(x+2)^2$

$6-4x=0\cdot(x+2)^2$

$6-4x=0$ $\quad |-6 \quad |:(-4)$

$x=1{,}5$ $\quad \Rightarrow \quad$ **N(1,5 | 0)**

Bsp.5

Bestimme die Nullstellen von $g(x)=\frac{6-4x}{(x+2)^2}+\frac{1}{8}$

Lösung:

$\frac{6-4x}{(x+2)^2}+\frac{1}{8}=0$ $\quad |\cdot 8\cdot(x+2)^2$

$(6-4x)\cdot 8+1\cdot(x+2)^2=0$ ausmultiplizieren bzw. bin. Formel

$48-32x+x^2+4x+4=0$ zusammenfassen

$x^2-28x+52=0$

(p-q-Formel) (a-b-c-Formel)

$x^2-28x+52=0$

$x_{1,2}=14\pm\sqrt{14^2-52}$

$= x_{1,2}=14\pm\sqrt{144}$

$=14\pm 12$

$x^2-28x+52=0$

$x_{1,2}=\frac{28\pm\sqrt{28^2-4\cdot1\cdot52}}{2\cdot1}$

$=\frac{28\pm\sqrt{576}}{2}$

$=\frac{28\pm24}{2}$

$\Rightarrow$

$x_1=26 \quad \Rightarrow \quad$ $\mathbf{N_1(26 | 0)}$

$x_2=2 \quad \Rightarrow \quad$ $\mathbf{N_2(2 | 0)}$

6.3 Ableitungen (∰)

Brüche werden mit der Quotientenregel abgeleitet.
Diese kennen wir bereits seit Kap. 1.5.4

$$f(x)=\frac{u}{v} \quad \Downarrow \quad f'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

Bsp.6 (erster Lösungsweg)

Bestimmen Sie zwei Ableitungen von: $g(x)=\frac{3x-8}{2x^2}$

$u=3x-8 \;\Rightarrow\; u'=3$
$v=2x^2 \;\Rightarrow\; v'=4x$

Lösung:

$$g'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}=\frac{3\cdot 2x^2-(3x-8)\cdot 4x}{(2x^2)^2}=\frac{6x^2-12x^2+32x}{4x^4}=$$
$$=\frac{-6x^2+32x}{4x^4}=\text{(ausklammern und kürzen)}=\frac{2x\cdot[-3x+16]}{4x^4}=\frac{-3x+16}{2x^3}$$

$u=-3x+16 \;\Rightarrow\; u'=-3$
$v=2x^3 \;\Rightarrow\; v'=6x^2$

$$g''(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}=\frac{-3\cdot 2x^3-(-3x+16)\cdot 6x^2}{(2x^3)^2}=$$
$$=\frac{-6x^3+18x^3-96x^2}{4x^6}=\frac{12x^3-96x^2}{4x^6}=$$
$$=\text{(ausklammern und kürzen)}=\frac{4x^2\cdot[3x-24]}{4x^6}=\frac{3x-24}{x^4}$$

Nun ist es allerdings so, dass man Brüche, die im Nenner kein „+" oder „-" haben, viel einfacher als mit der Quotientenregel ableiten kann.
Man spaltet den Bruch dazu auf.

Gibt es unten, im Nenner, **kein „+" oder „–"** spaltet man den Bruch immer auf.

Steht ein „x", „x²", ... im Nenner, kommt es hoch, indem das Vorzeichen der Hochzahl verändert wird.

Bsp.6 (zweiter Lösungsweg)

Bestimmen Sie zwei Ableitungen von: $g(x)=\frac{3x-8}{2x^2}$

Lösung:

$$g(x)=\frac{3x-8}{2x^2}=\text{[aufspalten]}=\frac{3x}{2x^2}-\frac{8}{2x^2}=\text{[kürzen]}=\frac{3}{2x}-\frac{4}{x^2}$$

Jetzt bringen wir alle „x" aus dem Nenner hoch, indem wir das Vorzeichen der Hochzahl ändern.

$$g(x)=\frac{3}{2x^1}-\frac{4}{x^2}=\frac{3}{2}x^{-1}-4x^{-2} \quad \text{[ab jetzt „normal" ableiten...]}$$
$$g'(x)=-\frac{3}{2}\cdot x^{-2}+8\cdot x^{-3}$$
$$g''(x)=-\frac{3}{2}\cdot(-2)\cdot x^{-3}+8\cdot(-3)\cdot x^{-4}=3x^{-3}-24x^{-4}$$

Wenn man das unaussprechliche Verlangen danach hat, kann man die „x" wieder in den Nenner schreiben. Also so:

$$g'(x) = -\frac{3}{2}\cdot x^{-2}+8\cdot x^{-3} = -\frac{3}{2x^2}+\frac{8}{x^3}$$

$$g''(x) = 3x^{-3}-24x^{-4} = \frac{3}{x^3}-\frac{24}{x^4}$$

Bsp.7

Bestimmen Sie zwei Ableitungen von: $h(x) = \frac{4}{(2x-3)^5}$

Lösung:
Man könnte h(x) mit der Quotientenregel ableiten.
Das wäre jedoch ziemlich umständlich.
Es geht einfacher, wenn man h(x) umschreibt und dann mit der Kettenregel ableitet.

$$h(x) = \frac{4}{(2x-3)^5} = 4\cdot(2x-3)^{-5}$$

$$h'(x) = 4\cdot(-5)\cdot(2x-3)^{-6}\cdot 2 = -40\cdot(2x-3)^{-6} = \frac{-40}{(2x-3)^6}$$

$$h''(x) = -40\cdot(-6)\cdot(2x-3)^{-7}\cdot 2 = 480\cdot(2x-3)^{-7} = \frac{480}{(2x-3)^7}$$

Bsp.8

Bestimmen Sie die Ableitung von: $f_t(x) = \frac{2x+t^2}{(x+3t^2)^3}$

Lösung:
Bei dieser Funktion gibt es keinen Sonderfall. Man kann nicht wie in Bsp.6, Weg2 aufspalten und die Klammer „$(x+3t^2)^{2}$" hochzuschreiben nützt auch nichts, da oben ein „x" vorkommt.
Leider geht nur die Quotientenregel.

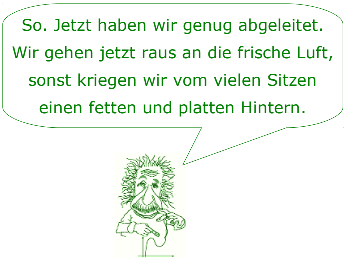
$u=2x+t^2 \quad v=(x+3t^2)^3$

$u'=2 \quad v'=3\cdot(x+3t^2)^2\cdot 1 = 3\cdot(x+3t^2)^2$

$$f_t'(x) = \frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2} = \frac{2\cdot(x+3t^2)^3-(2x+t^2)\cdot 3(x+3t^2)^2}{\left((x+3t^2)^3\right)^2} =$$

$$= \underset{\text{ausklammern}}{(x+3t^2)^2} = \frac{\cancel{(x+3t^2)^2}\cdot\left[2\cdot(x+3t^2)-(2x+t^2)\cdot 3\right]}{(x+3t^2)^{\cancel{6}}} =$$

$$= \frac{2\cdot(x+3t^2)-(2x+t^2)\cdot 3}{(x+3t^2)^4} = \frac{2x+6t^2-6x-3t^2}{(x+3t^2)^4} = \frac{-4x+3t^2}{(x+3t^2)^4}$$



6.4 Stammfunktionen ($\oint$)

Im Normalfall kann man Brüche nicht integrieren!! Es gibt zwei Ausnahmen:

Ausnahme 1)
Im Nenner gibt's keine Strichrechnungen, also kein „+“ und kein „-“.
→ siehe Bsp.9 und Bsp.10

Ausnahme 2)
Im Zähler steht nur eine Zahl, der Nenner besteht nur aus einer Klammer mit Hochzahl. → siehe Bsp.11 und Bsp.12

Bsp.9

$$f(x) = \frac{x^3+3x^2-4}{2x^2} = \frac{x^3}{2x^2}+\frac{3x^2}{2x^2}-\frac{4}{2x^2} = \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-2x^{-2}$$

aufspalten kürzen, dann „x“ hoch schreiben

ab jetzt kann man integrieren ..

$$F(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{3}{2}x-2\cdot\frac{1}{-1}\cdot x^{-1} = \frac{1}{4}\cdot x^2+\frac{3}{2}x+\frac{2}{x}$$

Bsp.10

$$g(x) = \frac{4x^4+3x^3-x+6}{tx^3} = \frac{4x^4}{tx^3}+\frac{3x^3}{tx^3}-\frac{x}{tx^3}+\frac{6}{tx^3} = \frac{4}{t}x+\frac{3}{t}-\frac{1}{t}x^{-2}+\frac{6}{t}x^{-3}$$

aufspalten kürzen, dann „x“ hoch schreiben

ab jetzt kann man integrieren ..

$$G(x) = \frac{4}{2t}\cdot x^2+\frac{3}{t}x-\frac{1}{-1\cdot t}x^{-1}+\frac{6}{-2\cdot t}x^{-2} = \frac{2}{t}\cdot x^2+\frac{3}{t}x+\frac{1}{tx}-\frac{3}{tx^2}$$

Bsp.11

$$h(x) = \frac{3}{(5-4x)^3} = \text{[umschreiben]} = 3\cdot(5-4x)^{-3}$$

$$H(x) = \frac{3}{-2}\cdot(5-4x)^{-2}\cdot\frac{1}{-4} = \frac{3}{8}\cdot(5-4x)^{-2} = \frac{3}{8(5-4x)^2}$$

Bsp.12

$$k(x) = \frac{5}{(2x-6)^4} = \text{[umschreiben]} = 5\cdot(2x-6)^{-4}$$

$$K(x) = \frac{5}{-3}\cdot(2x-6)^{-3}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{5}{6}\cdot(2x-6)^{-3} = \frac{-5}{6(2x-6)^3}$$

6.5 Asymptoten (∰)

Sicherlich hoffen manche von Ihnen jetzt, das ganze Leben wäre so billig wie die Asymptoten von trigonometrischen Funktionen aus dem letzten Hauptkapitel und hoffen, jetzt käme etwas inder Art wie:
„Es gibt keine Asymptoten, und falls doch, sind sie furchtbar einfach usw..“
Denkste. So einfach machen wir Mathematiker es Ihnen nicht. Wenn nämlich Alle gleich Alles kapieren würden, müssten wir uns einen neuen Job suchen !

Also `ran an die Bouletten[1]

Es zwei grundlegende Typen von Asymptoten.
1. senkrechte Asymptoten erhält man, indem man den Nenner Null setzt.
2. waagerechte oder schiefe Asymptoten erhält man, indem man x gegen ±∞ laufen lässt.

Kurzübersicht:

Senkrechte Asymptoten erhält man, indem man den Nenner Null setzt.
[Senkrechte Asymptoten heißen auch „***Pole***“, „***Polstellen***“ oder „***Definitionslücken***“. Zwar gibt es geringe Unterschiede, die vernachlässigen wir hier jedoch.]

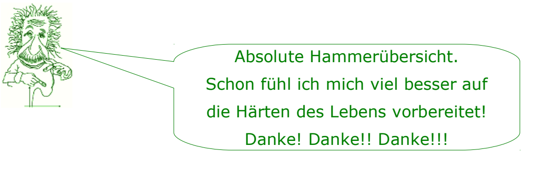
Waagerechte oder schiefe Asymptoten erhält man, indem man $x \to \pm\infty$ laufen lässt. Im Detail bedeutet das:
Für den mathematischen Beweis, teilt man Zähler und Nenner durch die höchste Potenz, kürzt und guckt was übrig bleibt.
Im Schnellverfahren erkennt man das asymptotische Verhalten, indem man vier Fälle unterscheidet:

Fall 1: Potenz oben kleiner als unten:
Es gibt eine **waagerechte Asymptote** bei der x-Achse.

Fall 2: Potenz oben und unten gleich:
Man betrachtet die Vorzahlen der höchsten Potenzen.
Deren Quotient ergibt die **waagerechte Asymptote.**

Fall 3: Potenz oben ist genau eins größer als unten:
Es gibt eine **schiefe Asymptote**,
[die man mit Polynomdivision erhält].

Fall 4: Potenz oben ist mehr als eins größer als unten.
Keine Asymptote (es existiert nur eine Näherungskurve).



1 In diesem Fall: Bouletten = Asymptoten

Bsp.13 Bestimmung der Asymptoten von $\frac{12x}{x^2+2x-3}$:

Senkrechte Asymptoten:
Wir setzen den Nenner Null, also $x^2+2x-3 = 0$.
p-q-Formel oder a-b-c-Formel liefert: $x_1=1$, $x_2=-3$
Es gibt also zwei senkrechte Asymptoten bei: **$x_1=1$, $x_2=-3$**

Waagerechte und schiefe Asymptoten:
Schnellverfahren: Die Potenz oben [ist „1"] ist kleiner als die Potenz unten [die ist „2"]. Die x-Achse ist daher waagerechte Asymptote (y=0).
Beweis: Die höchste auftretende Potenz des Nenners ist „x^2", die höchste des Zählers ist „x". Es ist egal durch welche man teilt. Wir entscheiden uns für „x^2" und teilen Zähler und Nenner durch „x^2".

$$\frac{12x}{x^2+2x-3} = \frac{\frac{12x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}} = [\text{kürzen}] = \frac{\frac{12}{x}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}} \rightarrow \text{(alle Brüche gehen gegen 0)}$$

$$\rightarrow \frac{0}{1+0-0} \rightarrow 0$$

waag.Asy. bei y = 0

Bsp.14 Bestimmung der Asymptoten von $\frac{3x^3-2x}{4+0{,}5x^3}$:

Senkrechte Asymptoten:
Wir setzen den Nenner Null, also $4+0{,}5x^3 = 0$.
$4+0{,}5x^3=0 \;\Rightarrow\; 0{,}5x^3=-4 \;\Rightarrow\; x^3=-8 \;\Rightarrow\; x=-2$ **senkr. Asy. bei x=-2**

Waagerechte und schiefe Asymptoten:
Schnellverfahren: Die Potenzen oben und unten sind gleich [jeweils „3"]. In dem Fall betrachtet man den Quotienten der Vorzahlen. Es gibt eine waagerechte Asymptote bei $y=\frac{3}{0{,}5}=6$.
Beweis: Die höchste auftretende Potenz ist „x^3". Wir teilen jeden Term von oben und unten durch „x^3".

$$\frac{3x^3-2x}{4+0{,}5x^3} = \frac{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{2x}{x^3}}{\frac{4}{x^3}+\frac{0{,}5x^3}{x^3}} = [\text{kürzen}] = \frac{3-\frac{2}{x^2}}{\frac{4}{x^3}+0{,}5} \rightarrow \text{(alle Brüche gehen gegen 0)}$$

$$\rightarrow \frac{3-0}{0+0{,}5} = \frac{3}{0{,}5} = 6$$

waag.Asy. bei y = 6

Bsp.15 Bestimmung der Asymptoten von $\frac{x^2}{5x^2-20}$:

Senkrechte Asymptoten:
Wir setzen den Nenner Null, also $5x^2-20 = 0$.
$5x^2-20=0 \Rightarrow 5x^2=20 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$ **senkr. Asy: $x_1=-2$, $x_2=2$**

Waagerechte und schiefe Asymptoten:
Schnellverfahren: Die Potenzen oben und unten sind gleich [jeweils „2"]. In dem Fall betrachtet man den Quotienten der Vorzahlen. Es gibt eine waagerechte Asymptote bei $y=\frac{1}{5}$.
Beweis: Die höchste auftretende Potenz ist „x^2". Wir teilen jeden Term von oben und unten durch „x^2".

$$\frac{x^2}{5x^2-20} = \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{20}{x^2}} = \text{[kürzen]} = \frac{1}{5+\frac{20}{x^2}} \xrightarrow{\text{(alle Brüche gehen gegen 0)}} \frac{1}{5+0} = \frac{1}{5}$$

waag.Asy. bei $y = \frac{1}{5}$

Bsp.16 Bestimmung der Asymptoten von $\frac{2x^3-4x^2+5x}{x^2-1}$:

Senkrechte Asymptoten:
$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$ **senkr. Asy: $x_1=-1$, $x_2=1$**

Waagerechte und schiefe Asymptoten:
Schnellverfahren: Die Potenzen oben [ist „3"] ist um eins größer als unten [ist „2"]. In dem Fall gibt es eine schiefe Asymptote. *Wo* diese ist, erhält man nur mit Polynomdivision [→siehe Kap 7.1, Bsp.3].
Beweis: Die höchste auftretende Potenz des Nenners ist „x^2", die höchste des Zählers ist „x^3". Wir entscheiden uns willkürlich für „x^2" und teilen Zähler und Nenner durch „x^2".

$$\frac{2x^3-4x^2+5x}{x^2-1} = \frac{\frac{2x^3}{x^2}-\frac{4x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \text{[kürzen]} = \frac{2x-4+\frac{5}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} \rightarrow \xrightarrow{\text{(alle Brüche gehen gegen 0)}} \frac{2x-4+0}{1-0} = 2x-4$$

schiefe Asy.: $y=2x-4$

Diese Methode des „durch höchste Potenz teilen" hat leider den Nachteil, dass sie die schiefe Asymptote *nicht immer* richtig liefert.
Um die schiefen Asymptoten zu erhalten, muss man normalerweise den Zähler durch den Nenner mittels Polynomdivision teilen. [→siehe Kap 7.1, Bsp3]
[Also: $(2x^3-4x^2+5x):(x^2-1)=\ldots$]

Bsp.17
Bestimmung der Asymptoten von $f(x) = \frac{x^5+3x^3-2x+4}{2x^2+4}$

Senkrechte Asymptoten:

$2x^2+4=0 \;\Rightarrow\; 2x^2=-4 \;\Rightarrow\; x^2=-2 \;\Rightarrow$ keine Lösung $\Rightarrow$ keine senkr. Asy.:

waagerechte / schiefe Asymptoten:

Die Potenz oben ist mehr als 1 größer als unten, daher gibt es keine schiefen und keine waagerechten Asymptoten.

$\Rightarrow$ **keine Asymptoten**

Bsp.18

Bestimmen Sie ohne Verwendung eines GTR die Nullstellen und Asymptoten der Funktion $f(x)=\frac{3x^2-9x}{x^2-4}$

Skizzen Sie f(x).

Lösung:

Nullstellen:

$\frac{3x^2-9x}{x^2-4} = 0 \qquad | \cdot (x^2-4)$

$3x^2 - 9x = 0 \qquad$ „x" ausklammern

$x\cdot(3x-9) = 0$

$x_1=0 \qquad 3x-9=0 \;\Rightarrow\; 3x=9 \;\Rightarrow\; x_2=3$ **$N_1(0|0)$ $N_2(3|0)$**

Senkrechte Asymptoten:

$x^2-4=0 \;\Rightarrow\; x^2=4 \;\Rightarrow\; x=\pm2$ **senkr.Asy.: $x_{1,2}=\pm2$**

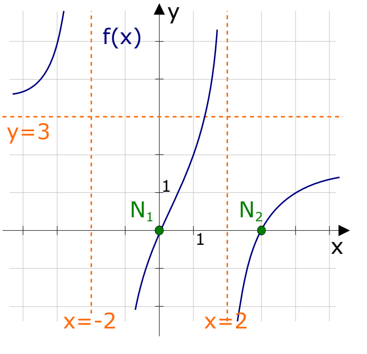
Zur Skizze:

Zwei senkrechte Asymptoten teilen eine Funktion in drei Bereiche auf.

Im ersten Bereich [links von x=-2] nähert sich f(x) der waagerechten Asymptote y=3 *und* der senkrechten Asymptote. Es gibt jedoch *keine* Nullstelle in diesem Bereich. f(x) muss also oberhalb der waagerechten Asymptote verlaufen.

Im mittleren Bereich nähert sich die Funktion beiden senkrechten Asymptoten, man weiß jedoch nicht, ob die Funktion an diesen hoch nach +∞ oder runter nach -∞ geht. Die Nullstelle bei $N_1(0|0)$ hilft auch nicht wirklich weiter. Eine Möglichkeit, das Problem u lösen, wäre, zwei Punkte u berechnen. Man berechnet z.B. die y-Werte bei x=1 und bei x=-1. f(1)=...=2 f(-1)=...=-4 Diese beiden Punkte A(1|2) und B(-1|-4) zeichnet man ein, dann passt´s.

Im rechten Bereich nähert sich f(x) der waagerechten und der senkrechten Asymptote an, es gibt jedoch die Nullstelle $N_2(3|0)$ Deswegen muss f(x) in diesem Bereich unterhalb y=3 liegen.



Bsp.19

Bestimmen Sie die Asymptoten von $g(x)=\frac{x^3+3x^2-4}{2x^2}$

Skizzieren Sie g(x) ohne Verwendung eines GTR.

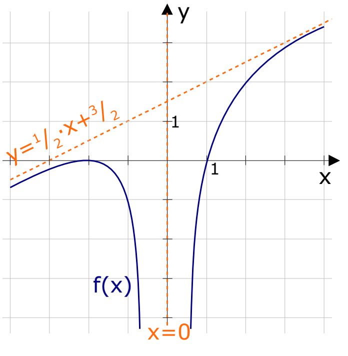
Taucht im Nenner einer Funktion **kein „+" und kein „–" auf,** spaltet man den Bruch auf, um ganz einfach waagerechte oder schiefe Asymptoten zu erhalten. (siehe Bsp.19 und Bsp.21)

Senkrechte Asymptoten:

$2x^2=0 \Rightarrow x=0$

hier gibt es eine kleine Besonderheit:
Die Hochzahl von „x" ist gerade. Daher gibt es eine senkrechte Asymptote *ohne Vorzeichenwechsel*!
[Bedeutet, dass an der Asymptote *beide* Funktionsteile nach unten oder beide nach oben laufen.]

senkr.Asy.: x = 0 ohne VZW



waagerechte / schiefe Asymptoten:

Da die Potenz oben ist genau eins größer als unten ist, gibt es eine schiefe Asymptote.
Da im Nenner kein „+" und kein „–" auftaucht, darf man f(x) einfach aufspalten.

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2-4}{2x^2}\underset{\text{aufspalten}}{=}\frac{x^3}{2x^2}+\frac{3x^2}{2x^2}-\frac{4}{2x^2}\underset{\text{kürzen}}{=}\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-\frac{2}{x^2}\rightarrow$$

$\rightarrow$ (der letzte Bruch geht gegen 0) $\rightarrow \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-0$ [das ist eine Geradengleichung]

$\Rightarrow$ **schiefe Asy.:** $\mathbf{y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

Eine kleine Wertetabelle hilft, die Zeichnung schöner zu gestalten ...

Bsp.20

Bestimmen Sie die Asymptoten von $g(x)=\frac{6x}{x^2+1}$

Skizzieren Sie g(x) ohne Verwendung eines GTR.

Lösung:

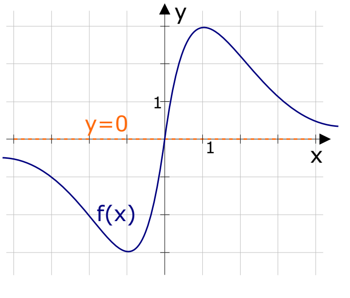
Senkrechte Asymptoten: $x^2+1 = 0$.

Keine Lösung $\Rightarrow$ keine senkrechte Asymptote.

Zählerpotenz kleiner als Nennerpotenz

$\Rightarrow$ waagerechte Asymptote bei x-Achse.

[Nur anhand dieser Asymptoten könnte man die Funktion jetzt noch nicht skizzieren. $\Rightarrow$ man erstellt noch eine Wertetabelle.]



Bsp.21

Bestimmen Sie ohne Verwendung eines GTR die Nullstellen und Asymptoten der Funktion $f(x)=\frac{3x^2+6x}{(x+1)^2}$

Skizzen Sie f(x).

Lösung:

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$

$$\frac{3x^2+6x}{(x+1)^2} = 0 \qquad |\cdot(x+1)^2$$

$$3x^2+6x = 0 \qquad \text{„x" ausklammern}$$

$$x\cdot(3x+6) = 0$$

$$x_1=0 \qquad 3x+6 = 0 \qquad |-6 \quad |:3$$

$$x_2 = -2 \qquad \Rightarrow$$

$N_1(0|0)$ $N_2(-2|0)$

Senkrechte Asymptoten:

$(x+1)^2=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$

Da x=-1 von einer Klammer mit einer geraden Hochzahl stammt, handelt es sich um eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel.

senkr.Asymp: x=-1
ohne VZW

Waagerechte / schiefe Asymptoten:

Schnellverfahren: Die Potenzen oben und unten sind gleich, zumindest wenn man unten ausbinomieren würde [sie sind jeweils „2"]. In dem Fall betrachtet man den Quotienten der Vorzahlen.

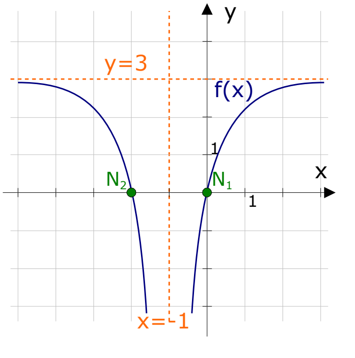
$$f(x) = \frac{3x^2+6x}{(x+1)^2} = \frac{3x^2+6x}{x^2+2x+1}$$

Es gibt eine waagerechte Asymptote bei $y=\frac{3}{1}=3$

Beweis: Die höchste auftretende Potenz ist „x^2". Wir teilen jeden Term von oben und unten durch „x^2".

$$\frac{3x^2+6x}{x^2+2x+1} = \frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{6x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = [\text{kürzen}] = \frac{3+\frac{6}{x}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} \rightarrow$$ (alle Brüche gehen gegen 0)

$$\rightarrow \frac{3+0}{1+0+0} = \frac{3}{1} = 3$$



$\Rightarrow$ **waag.Asy. bei y = 3**

6.6 erste ausführliche Beispielaufgabe

a) Führen Sie von $f(x) = \frac{x^2}{8-2x^2}$ eine vollständige Funktionsanalyse durch!
[Nullstellen, Ableitungen, Symmetrie, Asymptoten, Zeichnung,...]
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an f(x) in P(1|ö).
c) Die Geraden x=u und x=-u schneiden f(x) in den Punkten A und B und die x-Achse in C und D. Bestimmen Sie u>2 so, dass die Fläche des Rechtecks ABCD maximalen Inhalt annimmt.

Lösung:
a)
<u>Ableitungen</u>:

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(8-2x^2)-x^2\cdot(-4x)}{(8-2x^2)^2} = ... = \frac{16x}{(8-2x^2)^2} \quad \leftarrow \quad \begin{array}{ll} u=x^2 & v=8-2x^2 \\ u'=2x & v'=-4x \end{array}$$

$$f''(x) = \frac{16\cdot(8-2x^2)^2-16x\cdot(-8x)\cdot(8-2x^2)}{(8-2x^2)^4} = \quad \leftarrow \quad \begin{array}{ll} u=16x & v=(8-2x^2)^2 \\ u'=16 & v'=2\cdot(8-2x^2)\cdot(-4x) \\ & \quad =-8x\cdot(8-2x^2) \end{array}$$

[$(8-2x)^2$ ausklammern]

$$= \frac{\cancel{(8-2x^2)}\cdot[16\cdot(8-2x^2)-16x\cdot(-8x)]}{(8-2x^2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

[mit unten kürzen, eckige Klammern ausrechnen]

$$= ... = \frac{96x^2+128}{(8-2x^2)^3}$$

<u>Symmetrie</u>:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{8-2(-x)^2} = \frac{x^2}{8-2x^2} = f(x) \qquad f(-x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \textbf{Symmetrie zur y-Achse}$$

<u>Asymptoten</u>:
senkrechte: Nenner= 0

$8-2x^2 = 0 \qquad |-8 \quad |:(-2) \quad |\sqrt{\ }$

$x_{1,2} = \pm 2 \qquad \Rightarrow$ zwei **senkrechte Asympt.** bei $x_1 = -2$ und $x_2 = +2$

waagerechte / schiefe:
Zähler- und Nennerpotenzen sind gleich groß, die Vorzahlen der höchsten Potenzen entscheiden darüber, wo die waagrechte Asymptote ist: **waag. Asymp**: $\mathbf{y=-\frac{1}{2}}$

<u>Nullstellen</u>:

$f(x) = 0$

$\frac{x^2}{8-2x^2} = 0 \qquad | \cdot (8-2x^2)$

$x^2 = 0 \qquad \Rightarrow$ **N (0 | 0)**

<u>Extremstellen</u>:

$f'(x) = 0$

$\frac{16x}{(8-2x^2)^2} = 0 \qquad | \cdot (8-2x^2)^2$

$16x = 0 \qquad \Rightarrow x = 0$

Überprüfen von x=0 in f''(x): $f''(0) = 0{,}25 > 0 \quad \Rightarrow$ TP

y-Wert: $f(0) = \frac{16 \cdot 0}{(8-2 \cdot 0^2)^2} = 0 \qquad \Rightarrow$ **T (0 | 0)**

<u>Wendepunkte</u>:

$f''(x) = 0$

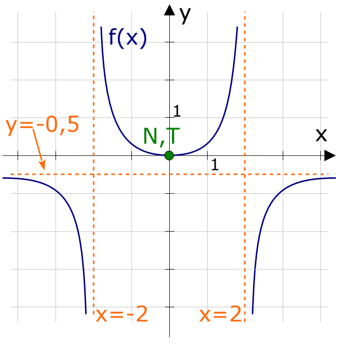
$\frac{96x^2+128}{(8-2x^2)^3} = 0 \qquad | \cdot (8-2x^2)^3$

$96x^2+128 = 0 \qquad | -128 \quad |:96 \quad | \sqrt{\ }$

$x^2 = \frac{-128}{96}$ k.Lös.

keine Wendepunkte

<u>Zeichnung</u>: →



b)
Die Gleichung der Tangente kann man entweder über y=mx+c oder über die Tangentenformel berechnen. Ohne besonderen Grund nehmen wir die Formel.

$y_{Tan} = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$

$\Rightarrow \quad y_{Tan} = \frac{4}{9} \cdot (x-1) + \frac{1}{6} = \ldots = \frac{4}{9}x - \frac{5}{18}$

u ist der x-Wert des Berührpunktes, also der x-Wert von P. Es gilt damit: u=1

$\Rightarrow f'(u) = f'(1) = \frac{16 \cdot 1}{(8-2 \cdot 1^2)^2} = \frac{4}{9}$

$\Rightarrow f(u) = f(1) = \frac{1^2}{8-2 \cdot 1^2} = \frac{1}{6}$

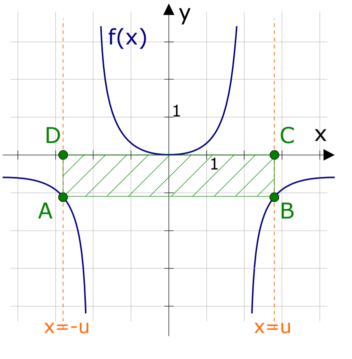
c)
Bei x=u und x=-u handelt es sich um senkrechte Geraden. Damit liegen die Punkte A, B, C und D in etwa so, wie in der Skizze dargestellt.
C und D liegen auf der x-Achse, und haben daher den y-Wert $y_C = y_D = 0$, A und B liegen auf f(x) und haben beide den y-Wert $y_A = y_B = f(u)$ [oder f(-u)].
Eine Rechteckfläche berechnet sich über: $A_R = a \cdot b$
In unserem Fall wäre das: $A_R = AB \cdot BC$
Die Strecke AB ist waagerecht, ihre Länge berechnet sich über die Differenz der x-Werte:

$AB = x_B - x_A = u - (-u) = 2u$

Die Strecke BC ist senkrecht, ihre Länge berechnet sich über die Differenz der y-Werte:

$BC = y_C - y_B = 0 - f(u) = -f(u)$

Der Flächeninhalt des Rechtecks ist also:



$A_R = 2u\cdot(-f(u))$ ←

$= 2u\cdot\left(-\frac{u^2}{8-2u^2}\right) = \frac{-2u^3}{8-2u^2}$

Sollte ein GTR erlaubt sein, könnte man ab dieser Stelle die Funktion: $y_2=2x\cdot(-y_1)$ eingeben und davon das Maximum bestimmen.

[Ich gehe davon aus, dass Sie unter y_1 die Funktion f(x) eingespeichert haben.]

Damit der Flächeninhalt maximal wird, muss die Ableitung Null werden.

$$A'_R = \frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2} = \frac{-6u^2\cdot(8-2u^2)-(-2u^3)\cdot(-4u)}{(8-2u^2)^2} =$$

$$= \frac{-48u^2+12u^4-8u^4}{(8-2u^2)^2} = \frac{4u^4-48u^2}{(8-2u^2)^2}$$

$A'_R = 0$

$\Rightarrow \frac{4u^4-48u^2}{(8-2u^2)^2} = 0$ $\quad |\cdot(8-2u^2)^2$

$4u^4-48u^2 = 0$ $\quad$ 4u² ausklammern

$4u^2\cdot(u^2-12) = 0$

$4u^2=0$ $\quad u^2-12 = 0$

$u_{1,2}=0$ $\quad u_{3,4}=\pm\sqrt{12}\approx\pm3{,}46$

Da laut Aufgabenstellung u>2, ist die einzige Lösung: $\mathbf{u=+\sqrt{12}}$

6.7 zweite ausführliche Beispielaufgabe

a) Führen Sie von $f(x)=\frac{-x^4+12x^2-4}{2x^2}$ eine vollständige Funktionsanalyse durch!

b) Für z>1 bilden die Geraden x=z und x=1 mit den Funktionen f(x) und $g(x)=-0{,}5x^2+6$ eine Fläche A(z). Bestimmen Sie A(z) sowie $\lim\limits_{z\to\infty} A(z)$.

Lösung:

a)

<u>Ableitungen</u>:

f(x) kann man aufspalten:

$$f(x) = \frac{-x^4}{2x^2}+\frac{12x^2}{2x^2}-\frac{4}{2x^2} = \frac{-x^2}{2}+\frac{12}{2}-\frac{4}{2x^2} = -\frac{1}{2}x^2+6-2\cdot x^{-2}$$

$$f'(x) = -x + 4x^{-3} = -x+\frac{4}{x^3}$$

$$f''(x) = -1 - 12x^{-4} = -1-\frac{12}{x^4}$$

$$f'''(x) = +48x^{-5} = \frac{48}{x^5}$$

<u>Symmetrie</u>:

$f(-x) = \frac{-(-x)^4+12(-x)^2-4}{2(-x)^2} = \frac{-x^4+12x^2-4}{2x^2} = f(x)$ $\Rightarrow$ **Symmetrie zur y-Achse**

Asymptoten:

für senkrechte Asy. den Nenner = 0 setzen

$2x^2 = 0$

$x = 0$

senkrechte Asymptote
bei x = 0 (y-Achse)

waagerechte / schiefe:

Zählerpotenz ist mehr als eins größer als Nennerpotenz, es gibt keine Asymptote. [Höchstens eine asymptotische Näherungskurve bei $y = -\frac{1}{2}\cdot x^2+6$, wie man an der aufgespalteten Version sehen kann]

Nullstellen:

$f(x) = 0$

$\frac{-x^4+12x^2-4}{2x^2} = 0 \qquad | \cdot 2x^2$

$-x^4+12x^2-4 = 0 \qquad$ Substitution $x^2 = u$

$-u^2+12u-4 = 0 \qquad | \cdot(-1)$

$u^2-12u+4 = 0 \qquad$ p-q-Formel (oder a-b-c-Formel)

$u_{1,2}=6\pm\sqrt{6^2-4} = 6\pm\sqrt{32}$

$\Rightarrow \quad u_1 \approx 11{,}66 \qquad u_2 \approx 0{,}34 \qquad$ Resubstitution: $x^2=u$

$x^2 = 11{,}66 \qquad x^2 = 0{,}34 \qquad | \sqrt{\ }$

$x_{1,2}=\pm3{,}41 \qquad x_{3,4}=\pm0{,}58$

$N_{1,2}(\pm3{,}41 | 0)$
$N_{3,4}(\pm0{,}58 | 0)$

Extrempunkte:

$f'(x) = 0$

$-x+\frac{4}{x^3} = 0 \qquad | \cdot(-x^3)$

$x^4 - 4 = 0 \qquad | +4 \quad | \sqrt[4]{\ }$

$x_{1,2} = \pm1{,}41$

Überprüfung von x=1,41 in f''(x):

$f''(+1{,}41) = -1-\frac{12}{1{,}41^4} = -4 < 0 \quad \Rightarrow \quad H$

y-Wert:

$f(+1{,}41) = \frac{-1{,}41^4+12\cdot1{,}41^2-4}{2\cdot1{,}41^2} = 4 \quad \Rightarrow$

H_1 (1,41 | 4)

aus Symmetriegründen gibt's noch einen zweiten Hochpunkt bei: **H_2 (-1,41 | 4)**

Wendepunkte:

$f''(x) = 0$

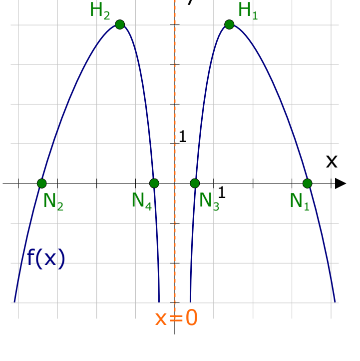
$-1-\frac{12}{x^4} = 0 \qquad | \cdot(-x^4)$

$x^4+12 = 0 \qquad | -12 \quad | \sqrt[4]{\ }$

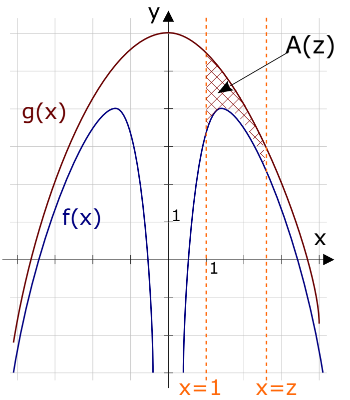
k.Lös.

keine Wendepunkte

Zeichnung: →



b)
Eine Fläche zwischen zwei Funktionen berechnet man natürlich mit dem Integral.
g(x) ist die obere, f(x) ist die untere Funktion
Die Integralgrenzen sind x=1 und x=z.



$$\Rightarrow\ A(z) = \int_1^z g(x)-f(x)\,dx =$$
$$= \int_1^z (-0{,}5x^2+6)-\left(-\frac{x^{\cancel{4}}}{2\cancel{x^2}}+\frac{12\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}}-\frac{4}{2x^2}\right)dx =$$
$$= \int_1^z (-0{,}5x^2+6)-\left(-\frac{1}{2}x^2+6-\frac{2}{x^2}\right)dx =$$
$$= \int_1^z \cancel{-0{,}5x^2}+\cancel{6}+\cancel{\tfrac{1}{2}x^2}-\cancel{6}+\frac{2}{x^2}\,dx =$$
$$= \int_1^z \frac{2}{x^2}\,dx = \int_1^z 2\cdot x^{-2}\,dx = \left[\frac{2}{-1}\cdot x^{-1}\right]_1^z =$$
$$= \left[-\frac{2}{x}\right]_1^z = \left[-\frac{2}{z}\right]-\left[-\frac{2}{1}\right] = -\frac{2}{z}+2 \qquad \Rightarrow \qquad A(z) = -\frac{2}{z}+2$$

$$\lim_{z\to\infty} A(z) = \lim_{z\to\infty} -\underbrace{\frac{2}{z}}_{0}+2 = 0+2 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{z\to\infty} A(z) = 2$$

6.8 dritte ausführliche Beispielaufgabe

a) Führen Sie von $f_t(x)=\frac{4tx-x^2}{(x-2t)^2}$ $(t\neq 0)$ eine vollständige Funktionsanalyse durch!

b) Die Punkte B(2|0), R(u|-1) und D(u|$f_1(u)$) bilden für u<1 ein Dreieck. Bestimmen Sie u so, dass die Fläche des Dreiecks 1FE groß wird.

c) Im Kurvenpunkt P(ä|f_1(ä)) wird eine Tangente an $f_1(x)$ gelegt, welche den Punkt Q(2|2) enthält. Bestimmen Sie die beiden möglichen Lagen von P.

Lösung:
a)
<u>Ableitungen</u>:

$$u=4tx-x^2 \qquad v=(x-2t)^2$$
$$u'=4t-2x \qquad v'=2\cdot(x-2t)\cdot 1 = 2\cdot(x-2t)$$

$$f_t'(x) = \frac{(4t-2x)\cdot(x-2t)^2-(4tx-x^2)\cdot 2(x-2t)}{\left((x-2t)^2\right)^2} =$$

oben (x-2t) ausklammern

$$= \frac{\cancel{(x-2t)}\cdot[(4t-2x)\cdot(x-2t)-(4tx-x^2)\cdot 2]}{(x-2t)^{\cancel{4}3}} =$$
$$= \frac{4tx-8t^2-2x^2+4tx-8tx+2x^2}{(x-2t)^3} = \frac{-8t^2}{(x-2t)^3} \quad (= -8t^2\cdot(x-2t)^{-3})$$

$$f_t''(x) = -8t^2\cdot(-3)\cdot(x-2t)^{-4}\cdot 1 = 24t^2\cdot(x-2t)^{-4} = \frac{24t^2}{(x-2t)^4}$$

$$f_t'''(x) = 24t^2\cdot(-4)\cdot(x-2t)^{-5}\cdot 1 = -96t^2\cdot(x-2t)^{-5} = \frac{-96t^2}{(x-2t)^5}$$

Symmetrie:
Im Zähler sind gemischte Hochzahlen
(im Nenner übrigens auch) ⇒ keine Symmetrie erkennbar

Asymptoten:
für senkrechte Asy. den Nenner = 0 setzen

$(x-2t)^2 = 0$

$x-2t = 0$

$x = 2t$ senkrechte Asymptote **bei x = 2t**

waagerechte / schiefe:
die höchste Potenz im Zähler ist: „$-x^2$"
die höchste Potenz im Nenner ist „x^2"
[man muss dazu $(x-2t)^2$ in Gedanken zu $x^2-\dots$ „ausbinomieren"]

Vorzahlen der Potenzen anschauen: $y=\frac{-1}{1}$ ⇒ waagerechte Asymptote **bei y = -1**

Nullstellen:

$f_t(x) = 0$

$\frac{4tx-x^2}{(x-2t)^2} = 0 \qquad | \cdot (x-2t)^2$

$4tx-x^2 = 0$

$x\cdot(4t-x) = 0 \qquad | \cdot(-1)$

$x_1=0 \quad \vee \quad 4t-x=0$

$x_2 = 4t$ ⇒ **N_1 (0 | 0)** **N_2 (4t | 0)**

Extrempunkte:

$f_t'(x) = 0$

$\frac{-8t^2}{(x-2t)^3} = 0 \qquad | \cdot (x-2t)^3$

$-8t^2 = 0$ ⇒ keine Lösung ⇒ keine Extrema

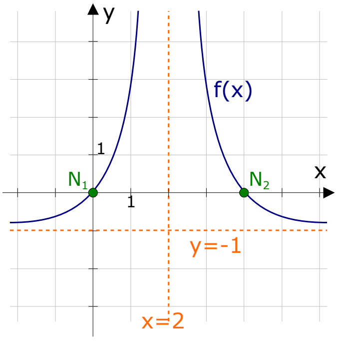
Wendepunkte:

$f_t''(x) = 0$

$\frac{24t^2}{(x-2t)^4} = 0 \qquad | \cdot (x-2t)^4$

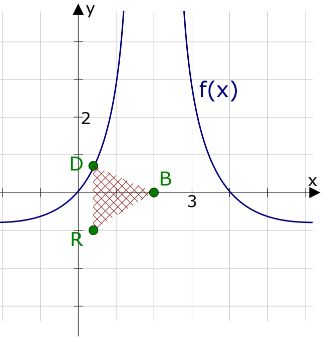
$24t^2 = 0$ ⇒ keine Lösung → keine Wendepunkte

Zeichnung für t=1: →



b)

Die Formel für eine Dreiecksfläche lautet: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$



Als Grundlinie des Dreiecks würde sich am besten die Strecke DR eignen, da diese die einzige Seite ist, die zu irgendeiner Koordinatenachse parallel ist.
DR ist eine senkrechte Strecke, die Länge berechnet sich über die Differenz der y-Werte.

$$g = DR = y_D - y_R = f_1(u) - (-1) = f_1(u) + 1$$

Die Höhe des Dreiecks BRD ist die (waagerechte) Entfernung vom Punkt B zur Seite DR. Die Länge der Höhe ist also die Differenz der x-Werte.

$$h = x_B - x_R = 2 - u$$

Nun kann man die Fläche des Dreiecks berechnen.

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (f_1(u) + 1) \cdot (2-u) \quad \leftarrow$$

Sollte ein GTR erlaubt sein, könnte man z.B. ab dieser Stelle $y_2 = \frac{1}{2} \cdot (y_1 + 1) \cdot (2 - x)$ als Funktion ins Grafikmenü des GTRs eingeben und die Schnittpunkte mit $y_3 = 1$ bestimmen.

[Ich gehe davon aus, dass Sie unter y_1 die Funktion f(x) eingespeichert haben.]

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4u - u^2}{(u-2)^2} + 1 \right) \cdot (2-u) =$$

[Hauptnenner in der ersten Klammer bilden]

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4u - u^2}{(u-2)^2} + \frac{(u-2)^2}{(u-2)^2} \right) \cdot (2-u) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4u - u^2 + (u-2)^2}{(u-2)^2} \right) \cdot (2-u) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\cancel{4u} \cancel{- u^2} + \cancel{u^2} \cancel{- 4u} + 4}{(u-2)^2} \right) \cdot (2-u) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \left(\frac{\cancel{4}}{(u-2)^2} \right) \cdot (2-u) =$$

[Trick: Wir klammern aus (2-u) eine „-1" aus, um zu kürzen]

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{(u-2)^{\cancel{2}}} \right) \cdot (-1) \cdot \cancel{(-2+u)} = -\frac{2}{u-2}$$

Nun soll diese Fläche einen Wert von 1 annehmen.

$$\Rightarrow \quad -\frac{2}{u-2} = 1 \qquad | \cdot (u-2)$$

$$-2 = u - 2 \qquad | + 2$$

$$0 = u \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{u = 0}$$

c)

Es geht um eine Tangente, deren Berührpunkt nicht gegeben ist, dafür jedoch ein anderer Punkt durch welchen sie geht. Dieses Problem [→siehe Kap 3.1.5] geht man am besten mit der Tangentengleichung an:

$$y_T = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

u ist der x-Wert des Berührpunkts, es gilt also u=ä,
Den Punkt Q(2|2) kann man für x und y_T einsetzen.

$$\Rightarrow \quad 2 = f'(ä) \cdot (2 - ä) + f(ä) \quad \leftarrow$$

Sollte ein GTR erlaubt sein, könnte man die Gleichung ab dieser Stelle vom GTR lösen lassen.

[Ich gehe davon aus, dass Sie unter y_1 die Funktion f(x) eingespeichert haben. Unter y_2 geben Sie die rechte Seite der Gleichung ein [$f(ä) = y_1$, $f'(ä)$ wird je nach GTR-Modell als $d/dx(y_1)$ oder $nderive(y_1, x, x)$ oder … eingegeben]. Danach berechnet man den Schnittpunkt von y_2 mit $y_3 = 1$.

Es gilt: $f'(ä) = \frac{-8}{(ä-2)^3}$ und $f_1(ä) = \frac{4ä - ä^2}{(ä-2)^2}$

$$\Rightarrow \quad y_T = \frac{-8}{(ä-2)^3} \cdot (x - ä) + \frac{4ä - ä^2}{(ä-2)^2} \qquad x_Q = 2 \text{ und } y_Q = 2 \text{ einsetzen}$$

$$2 = \frac{-8}{(ä-2)^3} \cdot (2 - ä) + \frac{4ä - ä^2}{(ä-2)^2}$$

[Trick: Wir klammern aus (2-ä) eine „-1" aus, um zu kürzen]

$$2 = \frac{-8}{(ä-2)^{\cancel{3}\,2}} \cdot (-1) \cdot \cancel{(-2+ä)} + \frac{4ä - ä^2}{(ä-2)^2}$$

$$2 = \frac{-8}{(ä-2)^2} \cdot (-1) + \frac{4ä - ä^2}{(ä-2)^2} \qquad | \cdot (ä-2)^2$$

$2\cdot(ä-2)^2 = (-8)\cdot(-1) + 4ä-ä^2$
$2\cdot(ä^2-4ä+4) = 8 + 4ä-ä^2$
$2ä^2-8ä+8 = 8 + 4ä-ä^2$ $\quad |+ä^2-4ä-8$
$3ä^2-12ä = 0$ $\quad$ ä ausklammern
$ä\cdot(3ä-12) = 0$

$ä_1=0$ $\qquad 3ä-12 = 0$
$\qquad 3ä=12$
$\qquad ä_2=4$

Damit haben wir die beiden möglichen x-Werte von P.
Die y-Werte erhält man durch Einsetzen in $f_1(x)$.

$ä_1=0 \Rightarrow y_1 = f_1(0) = \frac{4\cdot0-0^2}{(0-2)^2} = 0 \quad \Rightarrow$ **$P_1(0 | 0)$**

$ä_2=4 \Rightarrow y_1 = f_1(4) = \frac{4\cdot4-4^2}{(4-2)^2} = 0 \quad \Rightarrow$ **$P_2(4 | 0)$**