Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter **www.mathe-laden.de** bestellen (falls Sie das möchten).
Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht aus dem Internet herunter geladen werden können.
Dazu gehören:
Inhaltsverzeichnis, **Stichwortverzeichnis**, und viele **Aufgaben zum Selberrechnen**.

Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.
Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

h[x]=
MatheSeite

A.30 Wachstum

Es gibt unendlich viele Sorten von Wachstum. Fast alle davon haben keinen Namen und sind absolut unwichtig.

Es gibt vier wichtige Sorten von Wachstum, die in der Mathematik wichtig sind.
→ **Lineares Wachstum**: Es kommt in der gleichen Zeit immer die gleiche Menge zum vorhandenen Bestand dazu. Im Prinzip eine Gerade und recht einfach.
→ **Exponentielles Wachstum**: In der gleichen Zeit kommt immer der gleiche prozentuale Anteil dazu. Typische Beispiele sind: Zinsrechnung, radioaktiver Zerfall, Bakterienwachstum, … .
→ **Begrenztes Wachstum** bzw. **beschränktes Wachstum**. Wächst am Anfang relativ schnell, danach langsamer. Irgendwann kommt eine Schranke in Spiel, die nicht überschritten werden kann. Typische Beispiele sind: Temperaturzu- oder -abnahmen, Vermischung von Flüssigkeiten, … .
→ **Logistisches Wachstum**. Wächst am Anfang langsam, dann allmählich immer schneller, zum Schluss wieder langsam und nähert sich einer Grenze an. Durch logistisches Wachstum wird sehr vieles beschrieben, was mit Lebewesen zusammenhängt: Wachstum von Populationen, Ausbreitung von Krankheiten, Wachstum von Pflanzen, … .

Alle Wachstumssorten werden von bestimmten Funktionstypen beschrieben. Der Sinn einer Wachstums-Aufgabe besteht normalerweise darin, diese Funktion (die das Wachstum beschreibt) zu bestimmen.

Der absolut ultimative Beweis, ob eine Funktion ein bestimmtes Wachstum erfüllt, geht über die Differentialgleichung. Da also Wachstum derart eng mit dem Begriff „Differentialgleichung“ verbunden ist, müssen wir wohl oder übel erst Differentialgleichungen äklärän.

Nicht alle Schulentypen, an denen Wachstum gelehrt wird, haben auch „Differenzialgleichungen“ als Thema. Falls Sie also den Begriff „Differentialgleichung“ nicht kennen, dürfen Sie die entsprechenden Kapitel natürlich überspringen.

A.30.01 Lineares Wachstum ($\oint$)

Lineares Wachstum wird durch die Funktionsgleichung

$$\mathbf{B(t) = B(0)+m\cdot t}$$ beschrieben.

B(t) ist der Bestand zum Zeitpunkt t, B(0) ist der Anfangsbestand,
m ist die Menge, um die sich der Bestand erhöht und t ist natürlich die Zeit.

Aufgabe 1
In einem Reissack befinden sich 250.000 Reiskörner. Jede Minute fallen 50 Körner aus einem Loch, was natürlich ziemlich blöd ist.
a) Wieviel Reiskörner befinden sich nach einer Stunde im Sack?
b) Wann ist nur noch die Hälfte der Körner im Sack?
c) Wann ist der Sack leer?

Lösung:
Bevor wir überhaupt mit den Fragen anfangen, stellen wir die Funktionsgleichung auf. Der Ansatz ist: $B(t) = B(0)+m\cdot t$.
Der Anfangsbestand ist 250.000 ⇒ $B(0) = 250.000$.
Die Änderung [pro Minute] des Bestands beträgt 50 ⇒ $m=-50$.
[Das negative Vorzeichen kommt daher, da es eine *Abnahme* ist, keine Zunahme.]

Die Funktionsgleichung lautet: $\mathbf{B(t) = 250000-50\cdot t}$.

a) Nach einer Stunde sind 60 Minuten vergangen.
Wir setzen also t=60 in die Funktionsgleichung ein:
$B(60) = 250.000-50\cdot 60 = \mathbf{247.000}$.

b) Wenn nur noch die Hälfte der Körner im Sack ist, ist der Bestand $B(t)=125000$
⇒ $125000 = 250000-50\cdot t$ ⇒ $-125000 = -50\cdot t$ ⇒ $\mathbf{t=2.500}$ (min).
Nach 2500 Minuten, d.h. nach 41Std. und 40 Minuten ist nur noch die Hälfte der Reiskörner im Sack.

c) Wann ist der Sack leer?
Na ja... Wenn der Sack nach 2500 Minuten nur noch zur Hälfte gefüllt ist, ist er nach $2\cdot 2500=5000$ Minuten ganz leer ⇒ $\mathbf{t=5.000}$ (min).

Aufgabe 2

Eine Autovermietung berechnet für die Vermietung eines Fahrzeugs eine Pauschale von 20€ sowie ein Kilometergeld von 10Cent.
a) Wie teuer ist eine 150km lange Autofahrt?
b) Wie weit kommt man mit 100€?

Lösung:
Unser Ansatz: $B(t) = B(0)+m\cdot t$. Der Buchstabe „t" ist nicht so passend. Da unsere Variable die Kilometeranzahl beschreibt, ist vielleicht „x" passender.
Der Anfangsbestand ist 20€, denn bei einer Kilometeranzahl von „0km" zahlt man einen Betrag von 20€ ⇒ $B(0)=20$.
Pro Kilometer, also pro Einheit, zahlt man 10Ct=0,1€ ⇒ $m=0{,}1$.

Damit haben wir die Funktionsgleichung: $\mathbf{B(x) = 20+0{,}1\cdot x}$.

a) Bei einer 150km langen Autofahrt gilt: $x=150$ ⇒ $B(150)=20+0{,}1\cdot 150=$**35€**.
b) Ein Betrag 100€ bedeutet, dass $B(x)=100$.
⇒ $100 = 20+0{,}1\cdot x$ ⇒ $80 = 0{,}1\cdot x$ ⇒ $800=x$
Mit 100€ kommt man **800km** weit.

A.30.02 Differenzialgleichung (∯)

Eine Differentialgleichung ist eigentlich nur eine Gleichung, in der f(x) und irgendeine Ableitung davon vorkommt. Z.Bsp:

$f'(x) = 0{,}3\cdot f(x)$ oder $4\cdot f''(x)-9\cdot f(x) = 0$ sind Differentialgleichungen.

Zum Erklären machen wir `mal ein paar Anwendungsbeispiele:

Aufgabe 3
Bestimmen Sie den Parameter „k" so, dass $f(x) = 2e^{k\cdot x}$ die Differentialgleichung $f'(x) = 0{,}3\cdot f(x)$ erfüllt.

Aufgabe 4
Bestimmen Sie den Parameter „k" so, dass $f(x) = 2e^{k\cdot x}$ die Differentialgleichung $4\cdot f''(x)-9\cdot f(x) = 0$ erfüllt.

Aufgabe 5
Bestimmen Sie möglichst viele Parameter der Funktion $f(t) = a+b\cdot e^{kt}$, wenn f(t) die Differentialgleichung $f'(t) = 16-2\cdot f(t)$ erfüllt.

Lösung von Aufgabe 3:
In der Differentialgleichung tauchen f(x) und f'(x) auf.
Wir werden sowohl f(x) als auch f'(x) in die Differenzialgleichung einsetzen.
Vorher müssen wir aber zuerst f'(x) bestimmen: $f'(x) = 2\cdot k\cdot e^{k\cdot x}$.

$f'(x) = 0{,}3\cdot f(x)$ f(x) und f'(x) einsetzen
$2\cdot k\cdot e^{k\cdot x} = 0{,}3\cdot 2\cdot e^{k\cdot x}$ $\mid : 2e^{k\cdot x}$
$k = 0{,}3$

Das war's. Übrigens kennen wir nun k und damit auch $f(x) = 2\cdot e^{0{,}3\cdot x}$.

Lösung von Aufgabe 4:
Wir werden wieder f(x) und f''(x) in die Differentialgleichung einsetzen.
f'(x) bestimmen: $f(x) = 2e^{kx} \Rightarrow f'(x) = 2ke^{kx} \Rightarrow f''(x) = 2k^2e^{kx}$.

$4 \cdot f''(x)-9\cdot f(x) = 0$
$4\cdot 2k^2\cdot e^{kx}-9\cdot 2e^{kx} = 0$ $\mid : 2e^{kx}$
$4k^2-9 = 0$ $\mid +9 \quad \mid :4$
$k^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow k = \pm\frac{3}{2} = \pm 1{,}5$

Damit haben wir k bestimmt und auch die beiden möglichen Funktionen:
$f(x) = 2e^{\pm 1{,}5\cdot x}$.

Sie sehen also, dass wir nie einen x-Wert als Lösung erhalten haben, sondern Parameter und damit eine Funktion.
Im Unterschied zu „normalen" Gleichungen sind bei Differentialgleichungen die Lösungen keine x-Werte sondern Funktionen [bzw. die Parameter dieser Funktionen]. Weil die Differentialgleichung für *alle* x-Werte stimmen muss, müssen deswegen auch in der Differentialgleichung immer *alle* Terme, die

ein x enthalten, wegfallen.

Lösung von Aufgabe 5:
In der Differentialgleichung tauchen f(t) und f'(t) auf. Wir berechnen die Ableitung und setzen dann beide in die Differentialgleichung ein.

$f(t) = a+b\cdot e^{kt} \quad \Rightarrow \quad f'(t) = b\cdot k\cdot e^{kt}$
$f'(t) = 16-2\cdot f(t)$
$b\cdot k\cdot e^{kt} = 16-2\cdot(a+be^{kt})$
$bk\cdot e^{kt} = 16-2a-2be^{kt}$
$bk\cdot e^{kt}+2be^{kt}-16+2a = 0$
$(bk+2b)\cdot e^{kt}-16+2a = 0$

Damit die Gleichung für *alle* t-Werte stimmt, muss eine wahre Aussage \`rauskommen. Also 0=0:

$\Rightarrow\ bk+2b = 0 \qquad$ und $\qquad -16+2a = 0$
$b\cdot(k+2)=0 \qquad\qquad a=8$
$b=0 \ \vee \ k=-2$

b=0 macht keinen Sinn, sonst hätte f(t) die Form: $f(t) = a+0\cdot e^{kt} = a$.
(f(t) wäre nicht mehr von „t" abhängig!)

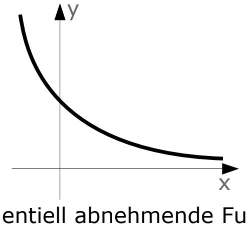
Also bleibt übrig: $k=-2$ und $a=8$.
b lässt sich aus den bisherigen Angaben nicht bestimmen $\Rightarrow f(t)=8+b\cdot e^{-2t}$.

A.30.03 Exponentielles Wachstum (∰)

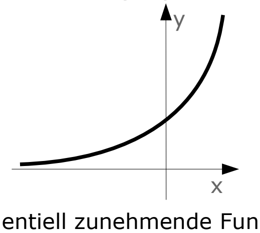
Eigentlich könnte man alle Aufgaben zum exponentiellen Wachstum auch mit dem Stoff der Mittelstufe rechnen, also mit der Zinseszins-Formel: $K_n = K_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$.
Aber jetzt stellen Sie sich \`mal vor, Sie müssten einem Mittelstufen-Schüler erzählen was Sie in der Schule machen und der behauptet: „Das kann ich auch!" oder noch schlimmer: - Er *kann* es tatsächlich auch –.

Das ist für einen Mathematiker natürlich extrem frustrierend. Also rechnen wir beim exponentiellen Wachstum mit e-Termen. [Das beeindruckt kleine Schüler eher.]

Funktionen, die exponentielles Wachstum beschreiben, sind im Prinzip sehr einfache e-Funktionen, die die x-Achse als waagerechte Asymptote haben.



exponentiell abnehmende Funktion



exponentiell zunehmende Funktion

Typisch für exponentielles Wachstum sind Prozesse, die immer um den gleichen prozentualen Anteil zu- oder abnehmen.

Z.B. -Geld auf der Bank, für welches man jährlich 5% dazu bekommt (Zinsen).
-Radioaktive Stoffe, deren Menge sich nach einer bestimmten Zeit halbieren.
-Blablablah

Jede Funktion, die exponentielles Wachstum beschreibt, hat die Form:

$$\boxed{f(t) = a\cdot e^{kt}}$$

Aufgabe 6

Ich habe 5000,-€ in Aktien eines großen Unternehmens investiert [war ein todsicherer Tip]. Nun wird jedoch bekannt, dass das Unternehmen ein kleines bisschen bei der Steuer geschummelt hat und deswegen riesige Steuernachzahlungen leisten muss. Und schon verliert mein todsicherer Tip täglich 15% seines Börsenwertes. Da ich ja ein absoluter Blitzmerker bin, kriege ich das immerhin bereits nach 2 Wochen mit.

a) Wieviel sind die Aktien jetzt, nach zwei Wochen, noch wert, wenn man für den Kursverlauf exponentielles Wachstum voraussetzen kann?
b) Wann kann ich mir von den Aktien noch 2 Kugeln Eis (≙1,80€) leisten?

Aufgabe 7

Ein russischer Plutoniumschmuggler hat dummerweise das Päckchen mit seiner radioaktiven Probe verschluckt. Gehen wir mal von einer optimistischen Ausganglage aus und nehmen wir an, dieser junge Mann hätte nur das 100-fache der tödlichen Dosis [1] geschluckt.

Wenn Plutonium eine Halbwertszeit von 24.110 Jahren hat, wie lange dauert es, bis so viel Plutonium zerfallen ist, dass sich weniger als die tödliche Dosis im Körper befindet?

Lösung von Aufgabe 6:
Egal was gefragt ist - Zuerst braucht man die Funktion.
Da der Aktienwert sich täglich immer um den gleichen prozentualen Anteil verringert, handelt es sich um exponentielles Wachstum.
Unser Ansatz ist also: $f(t) = a\cdot e^{kt}$.
Wir müssen dabei die Parameter „a" und „k" bestimmen.

Was ist gegeben?

Zur Zeit t=0: $f(0)=5000$ [Anfangswert] $\Rightarrow\ 5000=a\cdot e^{k\cdot 0}\ \Rightarrow\ 5000=a\cdot 1\ \Rightarrow\ 5000=a$.
Zur Zeit t=1: Nach einem Tag ist der Wert um 15% geringer

$$\Rightarrow\ f(1) = 5000-\frac{15}{100}\cdot 5000 = 4250€\ \Rightarrow\ 4250=a\cdot e^{k\cdot 1}.$$

In diese Gleichung $4250=a\cdot e^{k\cdot 1}$ setzen wir a=5000 ein und erhalten:

$4250 = 5000\cdot e^{k}$ | : 5000
$0{,}85 = e^{k}$ | ln( )
$\Rightarrow\ k = \ln(0{,}85) \approx -0{,}163\qquad\Rightarrow\qquad f(t) = 5000\cdot e^{-0{,}163\cdot t}$.

1 Bei Plutonium wirkt bereits weit weniger als ein Gramm absolut tödlich!

a) Der Aktienwert nach zwei Wochen: $f(14) = 5000\cdot e^{-0{,}163\cdot 14} \approx 510{,}40$ €.

b) Wann sind die Aktien nur noch 2 Kugeln Eis (≙1,80€) wert ?

$1{,}80 = 5000\cdot e^{-0{,}163\cdot t}$ | : 5000

$0{,}00036 = e^{-0{,}163\cdot t}$ | ln( )

$-7{,}929 = -0{,}163\cdot t$ | : (-0,163)

$\Rightarrow\ t \approx 48{,}6$ (Tage)

Lösung von Aufgabe 7:

Unser Ansatz ist wieder $f(t)=a\cdot e^{kt}$ [wobei f(t) die Plutoniummenge beschreibt].
Für den Anfangsbestand kennen wir keine Zahlen, wir wissen nur: $f(0) = a\cdot e^{k\cdot 0} = a$.
Wir kennen jedoch die Halbwertszeit[1]. Wenn die Halbwertszeit 24.110 Jahre beträgt und der Anfangsbestand „a" ist, dann ist nach 24.110 Jahren noch die Hälfte übrig, also ½·a. Bei t=24110 gilt: f(24110)=½·a.

$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\cdot a=a\cdot e^{k\cdot 24110}$ | : a

$\frac{1}{2} = e^{k\cdot 24110}$ | ln( )

$\ln(\frac{1}{2}) = k\cdot 24110$ |:24110

$\Rightarrow\ k = -2{,}87\cdot 10^{-5} = -0{,}0000287$

Unsere Funktion lautet also: $f(t) = a\cdot e^{-0{,}0000287\cdot t}$.
Nun widmen wir uns der eigentlichen Fragestellung in der Aufgabe.
Unser freundlicher Plutonium-Mitarbeiter hat anfangs die 100-fache Dosis im Körper. Gefragt ist, wann er nur noch die „normale" Dosis hat. Wir müssen also herausfinden, wann nur noch ein Hundertstel des Anfangsbestandes vorhanden ist, wann also nur noch 0,01·a vorhanden ist.

$0{,}01\cdot a = f(t)$

$0{,}01\cdot a = a\cdot e^{-0{,}0000287\cdot t}$ | : a

$0{,}01 = e^{-0{,}0000287\cdot t}$ | ln( )

$\ln(0{,}01)=-0{,}0000287\cdot t$ | : (-0,0000287)

$$t = \frac{\ln(0{,}01)}{-0{,}0000287} \approx 160458{,}9$$

Antwort: Der Schmuggler muss noch ca. 160.459 Jahre warten.
Dann ist die Plutoniumdosis nicht mehr tödlich. Na, welch Glück.

---

1 Für die, die es nicht wissen: Eine Halbwertszeit ist diejenige Zeit, die nötig ist, bis nur noch die Hälfte der ursprünglichen Menge vorhanden ist.

A.30.04 Exponentielles Wachstum (mit DGL) (∰)

Jede exponentiell wachsende Funktion muss die folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$\mathbf{f'(t) = k \cdot f(t)}$$

Was ist überhaupt der Sinn einer Differentialgleichung beim Wachstum?
f(t) steht für den Bestand, f'(t) gibt die Änderung des Bestandes an.

Die Differenzialgleichung beschreibt demnach den Zusammenhang zwischen einem Bestand und der Zunahme/Abnahme davon.

Aufgabe 8

Eine Kolonie von 150 Nasenbären vermehrt sich jährlich um 6%.
a) Bestimmen Sie eine Differenzial- und eine Funktionsgleichung.
b) Wann ist der Bestand auf 300 Nasenbären angewachsen?
c) In welchem Jahr nimmt der Bestand um 12 Nasenbären zu?

Aufgabe 9

Von einem Medikament ist bekannt, dass es Krankheitserreger im Blut innerhalb von acht Stunden halbiert. Um 6^{00} werden 12Mio. Erreger je mm³ Blut gemessen.
a) Bestimmen Sie eine Funktions- und eine Differenzialgleichung mit deren Hilfe ein Maß für die Anzahl der Krankheitserreger bestimmt werden kann.
b) Welcher prozentuale Anteil der Erreger wird stündlich abgebaut?
c) Ab einer Anzahl von unter 0,3Mio. Erreger spricht man von einem geheilten Patienten. Um wieviel Uhr trifft das ein?
d) Um wieviel Uhr nimmt die Anzahl der Erreger um 0,1Mio. stündlich ab?

Lösung von Aufgabe 8:

a) Die Zunahme des Bestandes beträgt 6% des Bestandes.

$$\Rightarrow \quad f'(t) \quad = \quad 0{,}06 \quad \cdot \quad f(t)$$

[Die Zunahme ist f'(t), der Bestand ist f(t). Diese Satz kann man ins Mathematische übersetzen.]

Welch Überraschung: Wir haben eine Differenzialgleichung (=DGL) erhalten! Und zwar eine DGL des exponenziellen Wachstums. Ein Vergleich mit der normalen Formel des exponenziellen Wachstums zeigt: k=0,06.

Nun wechseln wir zur Funktionsgleichung: $f(t)=a\cdot e^{k\cdot t}$ [mit k=0,06] $\Rightarrow f(t)=a\cdot e^{0{,}06\cdot t}$.
Der Anfangsbestand beträgt 150 Stück. D.h. zum Zeitpunkt t=0 gilt f(0)=150
$\Rightarrow a\cdot e^{0{,}06\cdot 0}=150 \quad \Rightarrow \quad a\cdot 1=150 \quad \Rightarrow \quad a=150 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f(t) = 150\cdot e^{0{,}06\cdot t}}$.

b) Der Bestand ist f(t).
Wenn der Bestand auf 300 Nasenbären steigt, wissen wir also: f(t)=300.

$300 = 150\cdot e^{0{,}06\cdot t}$ | : 150
$2 = e^{0{,}06\cdot t}$ | ln( )
$0{,}693 = 0{,}06\cdot t$ | : 0,06
$11{,}55 \approx t$ Nach ca. 11½ Jahren gibt es 300 Nasenbären.

c) Eine Zunahme ist f'(t). Nimmt der Bestand um 12 Nasenbären zu, gilt f'(t)=12.
$f(t)=150\cdot e^{0{,}06t} \quad \Rightarrow \quad f'(t)=150\cdot e^{0{,}06\cdot t}\cdot 0{,}06 \quad \Rightarrow \quad f'(t)=9\cdot e^{0{,}06\cdot t}$

$f'(t)=12 \Rightarrow 9\cdot e^{0{,}06\cdot t}=12 \Rightarrow e^{0{,}06\cdot t}=1{,}33 \Rightarrow 0{,}06\cdot t=\ln(1{,}33) \Rightarrow t=\frac{\ln(1{,}33)}{0{,}06}\approx 4{,}75$

Nach ca. 4,75 Jahren erhöht sich der Bestand um 12 Stück jährlich.

Lösung von Aufgabe 9:

a) Es handelt sich um exponentielles Wachstum, da der Bestand innerhalb einer bestimmten Zeit immer um den gleichen prozentualen Anteil abnimmt. [Alle 8 Stunden um die Hälfte.] Daher hat die Funktionsgleichung die Form: $f(t) = a\cdot e^{kt}$ und die Differenzialgleichung hat die Form: $f'(t) = k\cdot f(t)$.
Betrachten wir die Uhrzeit 6^{00} Uhr als t=0. Damit gilt: f(0)=12.
Acht Stunden später wird der Bestand halbiert, also gilt: f(8)=6.
$f(0)=12 \;\Rightarrow\; 12=a\cdot e^{k\cdot 0} \;\Rightarrow\; 12=a\cdot 1 \;\Rightarrow\; a=12$
$f(8)=6 \Rightarrow 6=a\cdot e^{k\cdot 8} \Rightarrow 6=12\cdot e^{k\cdot 8} \Rightarrow 0{,}5=e^{k\cdot 8} \Rightarrow \ln(0{,}5)=k\cdot 8 \Rightarrow k=\frac{\ln(0{,}5)}{8}\approx -0{,}0866$
$\Rightarrow$ Die Funktionsgleichung lautet: $f(t) = 12\cdot e^{-0{,}0866\cdot t}$.
$\Rightarrow$ Die Differenzialgleichung lautet: $f'(t) = -0{,}0866\cdot f(t)$.
[In f'(t)=k·f(t) einfach nur den Wert für „k" eingesetzt.]

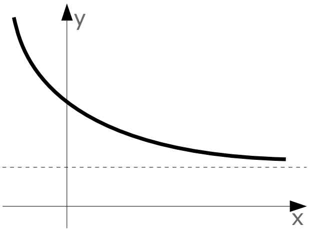
b) Man betrachtet am einfachsten die Differenzialgleichung:
„f'(t)=-0,0866·f(t)" bedeutet in Worten:
„Die Abnahme/Zunahme ist -0,0866 vom Bestand" [f'(t) steht ja für die Abnahme bzw. Zunahme einer Funktion und f(t) für den Bestand einer Funktion. Natürlich handelt es sich um eine Abnahme und nicht um eine Zunahme, da die rechte Seite negativ ist!]
bzw. „Die Abnahme ist 8,66% vom Bestand". Fertig!

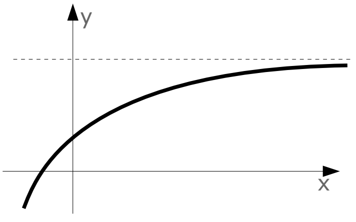
c) Der Bestand soll 0,3Mio. Erreger unterschreiten. Also sollte f(t)=0,3 sein.
$0{,}3=12\cdot e^{-0{,}0866\cdot t}$ | : 12
$0{,}025 = e^{-0{,}0866\cdot t}$ | ln( )
$-3{,}689 = -0{,}0866\cdot t$ | :(-0,0866)
$t \approx 42{,}6$
16 Stunden nach Beginn, also um ungefähr 22^{00} Uhr, gilt der Patient als geheilt.

d) Diesmal geht es um die *Abnahme*. Eine Abnahme wird immer durch die Ableitung beschrieben. Also muss die Ableitung „-0,1" betragen.
Bestimmung der Ableitung:
$f(t) = 12\cdot e^{-0{,}0866\cdot t} \;\Rightarrow\; f'(t) = 12\cdot e^{-0{,}0866\cdot t}\cdot(-0{,}0866) = -1{,}039\cdot e^{-0{,}0866\cdot t}$.
$-0{,}1 = f'(t) \;\Rightarrow\; -0{,}1 = -1{,}039\cdot e^{-0{,}0866\cdot t} \;\Rightarrow\; 0{,}096 = e^{-0{,}0866\cdot t}$
$\Rightarrow \ln(0{,}096) = -0{,}0866\cdot t \;\Rightarrow\; -2{,}343 = -0{,}0866\cdot t \;\Rightarrow\; t\approx 27$
27 Stunden nach Beginn, also um 9^{00} Uhr des nächsten Tages nimmt die Anzahl der Erreger um 0,1 (Millionen) stündlich ab.

A.30.05 Begrenztes Wachstum (∰)

Begrenztes Wachstum wird durch e-Funktionen beschrieben, die zwar auch wieder eine waagerechte Asymptote haben, allerdings nicht mehr bei der x-Achse sondern bei irgendeiner Parallelen zur x-Achse.





So könnte das Schaubild von begrenztem Wachstum aussehen.
[Links: abnehmende Funktion, rechts zunehmende Funktion]

Typische Beispiele für begrenztes Wachstum sind:
Temperaturabnahmen und Temperaturzunahmen, sowie Konzentrationen von löslichen Stoffen in Flüssigkeiten [z.Aufgabe Salz in Wasser].

Typische Formulierung in den Aufgaben ist der Ausdruck:
Die Zunahme des Bestandes / das Wachstum / blablah ist *proportional zur Differenz* von Sättigungsgrenze und Bestand.

Die Sättigungsgrenze [oder kurz: Grenze] ist die waagerechte Asymptote der Funktion. Die Grenze ist der Wert, gegen den die Funktion geht, während t [=die Zeit] gegen Unendlich geht.

Für jede Funktion, die begrenztes Wachstum beschreibt, gilt der Ansatz:

$$f(t) = G+a\cdot e^{-k\cdot t}$$

G ist die Grenze, sie kann auch S heißen.
a und k haben keine wichtige Bedeutung.
Die Funktionsgleichung kann auch $f(t)=G-a\cdot e^{-k\cdot t}$ lauten.

Wie verwendet man diese wunderbare Information?

Aufgabe 10

Betrachten wir `mal eine typische Prüfungssituation. Gemäß dem wissenschaftlichen Fachblatt: „BildDirDeineMeinung" pendelt sich ein Adrenalinspiegel in unendlich-langen Prüfungen bei 3% ein.
Bereits vor Anfang der Prüfung erzeugt der Körper ein bisschen Adrenalin, so dass wir am Anfang unserer schriftlichen Prüfung im Blut bereits eine Adrenalinkonzentration von 98% haben. Nun lesen wir uns die gegebenen Aufgaben durch. Diese Beschäftigungstherapie sorgt dafür, dass der Adrenalinspiegel bereits nach einer einzigen Minute auf 77% fällt.
Tja... liebe Prüflinge... wie hoch ist der Adrenalinspiegel nach 15 Minuten?

Aufgabe 11

In einer Kleinstadt mit 40.000 Einwohnern bricht eine Seuche aus, so dass bereits nach einem Monat 2.000 Einwohner infiziert sind. Es kann davon ausgegangen werden, dass die gesamte Bevölkerung erkranken kann.

a) Bestimmen Sie eine Funktion, die die Anzahl der Erkrankten beschreibt.
b) Mit wieviel Erkrankten muss man nach einem halben Jahr rechnen?
c) Wann sind 95% der Stadt erkrankt?

Lösung von Aufgabe 10:
Zuerst brauchen wir unsere Funktionsgleichung, d.h. die Parameter G, a und k.
Wenn sich der Adrenalinspiegel langfristig bei 3% einpendelt, heißt das:
Die Grenze ist $G=3$.
Also wissen wir von unserer Funktion bisher: $f(t) = 3+a\cdot e^{-k\cdot t}$.
Der Anfangsbestand des Adrenalinspiegels liegt bei 98%, das heißt $f(0)=98$.

$f(0) = 98 \quad \Rightarrow \quad 98 = 3+a\cdot e^{-k\cdot 0} \quad \Rightarrow \quad 98 = 3+a\cdot 1 \Rightarrow \quad a = 95$

Also wissen wir von unserer Funktion bisher: $f(t) = 3+95\cdot e^{-k\cdot t}$.
Nach einer Minute hat sich der Adrenalinspiegel bei 77% eingependelt. Damit gilt:

$f(1) = 77 \quad \Rightarrow \quad 77 = 3+95\cdot e^{-k\cdot 1} \quad \Rightarrow \quad 74 = 95\cdot e^{-k} \quad \Rightarrow \quad e^{-k} = \frac{74}{95} = 0{,}779$

$\Rightarrow \quad k = -\ln(0{,}779) \approx 0{,}25.$

Also kennen wir nun endlich unsere Funktion: $f(t)=3+95\cdot e^{-0{,}25\cdot t}$.

Nun, da wir die Funktion komplett haben, ist der Rest nur Kinderkacke.

Antwort: Nach 15min haben wir eine Adrenalinkonzentration von $f(15)=3+95\cdot e^{-0{,}25\cdot 15} \approx 5{,}23\%$.

Lösung von Aufgabe 11:

a) Da die Einwohnerzahl eine Grenze der Infizierten ist (es kann nicht mehr Infizierte geben, als es Leute in der Stadt gibt), *muss* es sich um begrenztes Wachstum handeln.
Die Grenze ist G=40.000. Also wissen wir: $f(t) = 40000+a\cdot e^{-k\cdot t}$.
Anfangs befinden sich 0 Infizierte in der Stadt (die Seuche bricht ja gerade erst aus).
$\Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow 0=40000+a\cdot e^{-k\cdot 0} \Rightarrow 0=40000+a\cdot 1 \Rightarrow a=-40000$
$\Rightarrow f(t)=40000-40000\cdot e^{-k\cdot t}$
Nach einem Monat gibt es 2.000 Infizierte. $\Rightarrow f(1)=2000$

$\Rightarrow \quad 2000=40000-40000\cdot e^{-k\cdot 1} \quad |-40000$

$-38000=-40000\cdot e^{-k} \quad |:(-40000)$

$0{,}95=e^{-k} \quad |\ln(\ )$

$\ln(0{,}95)=-k \quad \Rightarrow \quad k=-\ln(0{,}95)\approx 0{,}051 \quad \Rightarrow f(t)=40000-40000\cdot e^{-0{,}051\cdot t}.$

b) Nach einen halben Jahr sind sechs Monate vergangen [d.h. t=6]
t=6 in f(t) einsetzen. $\Rightarrow f(6) = 40000-40000\cdot e^{-0{,}051\cdot 6} \approx 10544.$

c) 95% der Stadtbewohner sind $0{,}95\cdot 40000 = 38.000$ Einwohner

$\Rightarrow 38000 = f(t)$

$38000 = 40000-40000\cdot e^{-0{,}051\cdot t} \quad | -40000$

$-2000 = -40000\cdot e^{-0{,}051\cdot t} \quad |:(-40000)$

$0{,}05 = e^{-0{,}051\cdot t} \quad | \ln(\ )$

$-2{,}996 = -0{,}051\cdot t \quad \Rightarrow \quad t=\frac{-2{,}996}{-0{,}051}\approx 58{,}75.$

Nach knapp 59 Monaten sind 95% der Stadt infiziert.

A.30.06 Beschränktes (begrenztes) Wachstum (mit DGL) (∰)

Jede Funktion des begrenztes Wachstums, erfüllt die Differenzialgleichung:

$$f'(t) = k\cdot[G-f(t)]$$

G ist die Grenze, sie kann auch S heißen.
f(t) ist der Bestand.
f'(t) ist die Zu- oder Abnahme des Bestands.

Aufgabe 12

Geile Idee, um später `mal viel Geld mit wenig Arbeit zu verdienen:
Wir verkaufen Hausschuhe für Vogelscheuchen (15,- € pro Stück).
Da in Europa vermutlich noch niemand so etwas hat und sicherlich absolut jeder haben will, steht uns der ganze Markt, also 160Mio. Haushalte in Europa zur Verfügung. Auch der Berater von der Bank ist von unserer Idee begeistert und bewilligt sofort einen Kleinkredit über 4,3 Trillionen Euro für eine gigantische Werbekampagne. Er rechnet damit, dass unsere monatlichen Verkaufszahlen proportional zu der Anzahl der Haushalte ist, die wir noch nicht mit unserem Produkt versorgt haben. Um genau zu sein, geht er davon aus, dass wir immer ein Hundertstel der Leute, Haushalte die noch keine Vogelscheuchenschuhe haben, zum Kauf überreden können.

a) Stellen Sie die Differentialgleichung für das Wachstum auf!
   Um was für eine Wachstumsart handelt es sich?
b) Wieviel Geld haben wir nach einem Jahr gescheffelt?
c) Wann haben 75% der Europäer Hausschuhe für Vogelscheuchen?

Lösung von Aufgabe 12:

a) Die Anzahl der verkauften Hausschuhe und damit die Anzahl der Haushalte, die unsere Schuhe erworben haben, ist unser Bestand f(t). Maximal können natürlich 160Mio. Schuhpaare verkauft werden, also ist unsere Grenze G=160. Anfangs haben wir logischerweise noch keinen einzigen Vogelscheuchenschuh verkauft, also gilt f(0)=0. Soviel wissen wir.
   Der entscheidende Satz für die Differentialgleichung ist: „... wir können ein Hundertstel der Leute, die noch keine Vogelscheuchenschuhe haben, zum Kauf überreden...".
   Zerlegen wir diesen Satz einmal:
   Die Anzahl der Leute, die noch keinen Vogelscheuchenschuh haben ist:
   Alle Haushalte Europas abzüglich derjenigen, die schon einen haben.
   Also: $160-f(t)$.
   Und davon überreden wir ein Hundertstel, das sind $0{,}01\cdot(160-f(t))$.
   Diesen Anteil der Leute [also $0{,}01\cdot(160-f(t))$] überreden wir zum Kauf unseres Produkts. Dieser Anteil der Leute erhöht also unsere Verkaufszahlen, ist also die Änderung unseres Bestands f(t).

Die Zunahme eines Bestands oder Abnahme eines Bestands ist immer die Ableitung der Funktion.

Damit wissen wir: $f'(t) = 0{,}01\cdot[160 - f(t)]$ ist die Differentialgleichung!

Ich gehe mal davon aus, dass nicht jeder von Ihnen das vollständig verstanden hat. Daher probier ich sicherheitshalber noch eine zweite Erklärung:
Den Satzteil: „... wir können ein Hundertstel der Leute, die noch keine Vogelscheuchenschuhe haben, zum Kauf überreden" formuliere ich um in:

$$\underbrace{\text{„Die Zunahme der Verkäufe}}_{f'(t)}\ \underbrace{\text{ist}}_{=}\ \underbrace{\text{ein Hundertstel}}_{0{,}01}\ \underbrace{\text{der}}_{\cdot}\ \underbrace{\text{Leute, die noch nichts kauften.“}}_{[\,160-f(t)\,]}$$

[Und diesen letzten Satz übersetzen wir jetzt ins Mathematische]

Damit haben wir die Differentialgleichung.
Als erstes erkennen wir durch unsere unendliche Genialität, dass es sich um die Differentialgleichung (=DGL) vom begrenzten Wachstum handelt.
Damit handelt es sich auch tatsächlich um begrenztes Wachstum.
Wenn man nun unsere DGL mit der „normalen" DGL vom begrenzten Wachstum vergleicht, kann man die Werte für k und G ablesen.

$$\left.\begin{array}{l} f'(t) = 0{,}01\cdot[160-f(t)] \\ f'(t) = \ \ k \ \cdot[G - f(t)] \end{array}\right\} \Rightarrow \quad k=0{,}01 \quad G=160$$

Nun, da wir wissen, dass es sich um begrenztes Wachstum handelt, können wir auch mit einem geeigneten Ansatz für die Funktion loslegen: $f(t) = G-a\cdot e^{-k\cdot t}$.
Da wir „k" und „G" bereits kennen, wissen wir, dass unsere Funktion so aussieht: $f(t) = 160-a\cdot e^{-0{,}01\cdot t}$.
Haben wir nun noch eine klizekleine problema di matematica! Uns fehle „a".[1]
Wie berechnen wir a? Wir haben noch eine Angabe, die wir noch nicht verwendet haben: Der Anfangsbestand ist Null $\Rightarrow$ $f(0) = 0$.

$$f(0) = 0$$
$$0 = 160-a\cdot e^{-0{,}01\cdot 0}$$
$$0 = 160-a\cdot 1 \quad\Rightarrow\quad a=160 \quad\Rightarrow\quad f(t) = 160-160\cdot e^{-0{,}01\cdot t}$$

b) Die Zeit „t" wird in Monaten gerechnet [„...monatliche Verkaufszahlen..."].
Erst rechnen wir aus, wieviele Geräte wir in einem Jahr verkauft haben.

$$f(12) = 160-160\cdot e^{-0{,}01\cdot 12} = \ldots = 18{,}0$$

Wir haben im ersten Jahr ca. 18Mio. Geräte verkauft, das entspricht einem Umsatz von: 18,0Mio. · 15,- € = 270.000.000 €.
[Man kann also mit Vogelscheuchenschuhen wirklich einen Haufen Kohle machen!]

c) 75% der Europäer sind $\frac{75}{100}\cdot 160\text{Mio} = 120\text{Mio}$.

$$\Rightarrow \quad 120 = f(t)$$
$$120 = 160-160\cdot e^{-0{,}01\cdot t} \quad | -160$$
$$-40 = -160e^{-0{,}01\cdot t} \quad | : (-160)$$
$$0{,}25 = e^{-0{,}01t} \quad | \ln(\ )$$
$$-1{,}386 = -0{,}01t \quad\Rightarrow\quad t = 138{,}6$$

Nach ca. 139 Monaten haben wir 75% des Marktes fest in unserer Hand. Geil!

1 Übersetzung: Wir haben noch ein klitzekleines mathematisches Problem! Uns fehlt „a".

Aufgabe 13

Wir liegen in der Sommersonne, haben nichts zu tun und lassen uns braten.
Unsere Körperkerntemperatur beträgt 36,0°C, die Temperatur in der Sonne beträgt 48,0°C. Anhand eines Fieberthermometers stellen wir fest, dass der Temperaturanstieg unseres Körperinneren jede Minute ein Fünfzigstel der Differenz zwischen Außentemperatur und Körperinnentemperatur beträgt [die Methode und die Stelle an der die Körpertemperatur gemessen wird, bleibt jedem selbst überlassen.]

a) Wie hoch ist unsere Temperatur nach einer Viertelstunde?
b) Wann erliegen wir dem Hitzschlag (42°C)?

Lösung:
Was hoffentlich klar ist: Es handelt sich um begrenztes Wachstum, wir haben ja schließlich eine Grenze (die Außentemperatur!) $\Rightarrow$ $G = 48°C$.
Der Anfangstemperatur liegt bei 36°, $\Rightarrow$ $f(0) = 36°C$.
Der Temperaturanstieg ist die Veränderung der Temperatur und ist somit $f'(t)$.
Der Temperaturanstieg unseres Körperinneren liegt bei einem Fünfzigstel der Differenz zwischen Außentemperatur und Körperinnentemperatur. In Worten:
Der Anstieg ist ein Fünfzigstel der Differenz von Körpertemp. und Außentemp.

[Diesen letzten Satz ins Mathematische übersetzen.]

$$f'(t) \quad = \quad 0{,}02 \quad \cdot \quad [G-f(t)]$$

G=48 einsetzen: $\Rightarrow$ $f'(t) = 0{,}02 \cdot [48-f(t)]$.

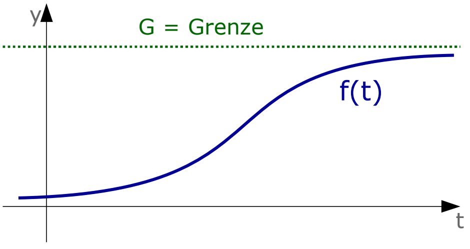
Spätestens jetzt sollte jedem klar sein, dass es sich um begrenztes Wachstum handelt, da es ja eine Differentialgleichung vom dementsprechenden Typ ist.

a) Aus der Differentialgleichung erkennt man $k=0{,}02$ und $G=48$.
Setzt man dieses in die Funktionsgleichung des begrenzten Wachstums ein, erhält man: $f(t) = 48-a\cdot e^{-0{,}02\cdot t}$.
Der Anfangswert beträgt 36° $\Rightarrow$ $f(0)=36$.
Einsetzen in die Funktionsgleichung liefert:
$36 = 48-a\cdot e^{-0{,}02\cdot 0} \Rightarrow 36 = 48-a\cdot 1 \Rightarrow -12 = -a\cdot 1 \Rightarrow 12 = a$
$\Rightarrow f(t) = 48-12\cdot e^{-0{,}02\cdot t}$.
Jetzt, da wir die Funktionsgleichung haben, ist die Berechnung der Körpertemperatur nur noch Kinderkram.
Die Körpertemperatur beträgt nach 15min $f(15) = 48-12\cdot e^{-0{,}02\cdot 15} = 39{,}1°C$.

b) $42 = f(t)$
$42 = 48-12\cdot e^{-0{,}02\cdot t}$ | -48
$-6 = -12\cdot e^{-0{,}02\cdot t}$ | $:(-12)$
$0{,}5 = e^{-0{,}02\cdot t}$ | ln( )
$\ln(0{,}5) = -0{,}02\cdot t \Rightarrow t = \frac{\ln(0{,}5)}{-0{,}02} \approx 35$
Antwort: Nach ca.35 min sind wir hinüber. [Schönen Urlaub!!]

A.30.07 Logistisches Wachstum (∰)

Logistisches Wachstum ist *das* Wachstum, mit dessen Hilfe die meisten realen Entwicklungen von Populationen beschrieben werden kann. Leider werden die Rechnungen häufig etwas kompliziert.
Logistisches Wachstum wird durch e-Funktionen beschrieben, die zwei waagerechte Asymptoten haben. Üblicherweise ist eine der Asymptoten die x-Achse, die andere Asymptote ist oberhalb der x-Achse.
Die Funktionen die logistisches Wachstum beschreiben, kommen von links, von der x-Achse und nähern sich rechts der oberen Asymptote. Hoch- oder Tiefpunkte gibt es keine.
Die *Sättigungsgrenze* [oder kurz: Grenze] ist die obere waagerechte Asymptoten, an die sich die Funktion für $x \to +\infty$ [rechts] nähert.
Genau auf halber Höhe zwischen den beiden waagerechten Asymptoten liegt ein Wendepunkt. Jede Funktion, die logistisches Wachstum beschreibt, ist punkt-symmetrisch zu diesem Wendepunkt. [Letzteres brauchen Sie vermutlich nie.]



So könnte das Schaubild von logistischem Wachstum aussehen.

Typische Beispiele für logistisches Wachstum sind alle Arten von Populationen, für die es eine Obergrenze gibt, z.B. Vermehrung von Kaninchen, Fischen, Menschen, Krankheiten, sogar Computerviren, usw...
Das logistische Wachstum ist darin typisch, dass es am Anfang sehr langsam zunimmt, [waagerechte Asymptote bei $x \to -\infty$], dann geht schneller und zum Schluss [waagerechte Asymptote bei $x \to +\infty$], geht's wieder langsamer.
Das macht Sinn, denn am Anfang sind in Populationen nur wenige Mitglieder, die sich natürlich auch nur sehr langsam vermehren. Allmählich werden es mehr Mitglieder, die sich dadurch auch stärker vermehren, bis zum Schluss die Höchstgrenze zum Zug kommt. [Zum Beispiel weil die Welt oder der Käfig zu klein wird und die Mitglieder sich nicht mehr fortpflanzen können, weil sie vom vielen „SichaufdieFüssetreten" abgelenkt sind (oder dergleichen)]

Funktionsgleichung:
Es gibt mehrere Ansätze für die Funktionsgleichung mit deren Hilfe man logistisches Wachstum beschreiben kann. Eine Möglichkeit ist:

$$f(t) = \frac{G \cdot a}{a + e^{-kGt}}$$

f(t) ist der Bestand
G ist die Grenze, sie kann auch S heißen
k ist der Wachstumsfaktor, nichts Anschauliches
a ist irgendeine bedeutungslose Zahl.

Aufgabe 14

Die Funktion $h(t)=2-\frac{2a}{e^{2t}+a}$; $t\geqslant 0$

beschreibt annähernd die von einer Schimmelpilzkultur bedeckte Fläche (in dm²) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen). 6 Tage nach Beobachtungsbeginn beträgt der Inhalt der bedeckten Fläche 0,50 dm².

a) Bestimmen sie den Wert von a.

b) Wann betrug der Inhalt der Fläche 0,05 dm² ?

Lösung:

a) Nach 6 Tagen beträgt der Flächeninhalt 0,5 dm². Also gilt:

$h(6) = 0{,}5$

$2-\frac{2a}{e^{2\cdot 6}+a} = 0{,}5 \qquad |-2$

$-\frac{2a}{e^{12}+a} = -1{,}5 \qquad |\cdot(e^{12}+a)$

$-2a = -1{,}5\cdot(e^{12}+a)$

$-2a = -1{,}5e^{12}-1{,}5a \qquad |+1{,}5a$

$-0{,}5a = -1{,}5e^{12} \qquad |:(-0{,}5)$

$a = 3\cdot e^{12}$

Somit lautet das Wachstumsgesetz: $h(t) = 2-\frac{2\cdot 3\cdot e^{12}}{e^{2t}+3e^{12}} = 2-\frac{6\cdot e^{12}}{e^{2t}+3e^{12}}$

b) Es soll gelten: $h(t)=0{,}05$

$2-\frac{6\cdot e^{12}}{e^{2t}+3e^{12}} = 0{,}05 \qquad |-2$

$-\frac{6\cdot e^{12}}{e^{2t}+3e^{12}} = -1{,}95 \qquad |\cdot(e^{2t}+3e^{12})$

$-6e^{12} = -1{,}95e^{2t}-5{,}85e^{12} \qquad |+5{,}85e^{12}$

$-0{,}15e^{12} = -1{,}95e^{2t} \qquad |:(-1{,}95)$

$0{,}0769\cdot e^{12} = e^{2t} \qquad |\ln(\ )$

$9{,}435 = 2t \qquad \Rightarrow \qquad t = 4{,}712$

Nach etwa 4,7 Tagen war die Fläche 0,05 dm² groß.

Aufgabe 15

Nehmen wir an, der Verlauf einer typischen Grippeerkrankung lässt sich durch die Funktion $g(t)=\frac{3}{0{,}03+e^{-0{,}2\cdot t}}$ beschreiben. (t in Wochen, g(t) in Tausend Erkrankten)

Nehmen wir nun weiter an, dass in einem Herbst der Bundeszentrale für Seuchenbekämpfung folgende Zahlen gemeldet werden:

zwei Wochen nach Beginn: 4300 Infizierte
drei Wochen nach Beginn: 5400 Infizierte
vier Wochen nach Beginn: 6800 Infizierte

a) Bei welcher Anzahl von Infizierten rechnet man mit dem „Beginn“ der Seuche?

b) Mit welcher Anzahl von Infizierten rechnet man langfristig ?

c) Sollte das Bundesamt bei diesen berichteten Zahlen von einer besonders dramatischen Entwicklung der Grippeerkrankung ausgehen und mit Impfstoffen vorsorgen?

d) Wann sollte man mit der höchsten Anzahl von Neuerkrankungen rechnen?

Lösung:

a) Der Beginn einer Seuche ist natürlich zum Zeitpunkt t=0.

$g(0) = \frac{3}{0{,}03+e^{-0{,}2\cdot 0}} \approx 2{,}9.$

Ab einer Anzahl von ca 2900 Erkrankten spricht man vom Beginn der Infektion.

b) „Langfristig“ bedeutet $t\to\infty$, also die Grenze.
Man kann nun in der Funktion $t\to\infty$ laufen lassen, der e-Term geht gegen Null und es bleibt $^3/_{0{,}03}=100$ übrig. Die Grenze ist also G=100.
Sinnvoll ist aber auch ein anderer Lösungsweg, ein Vergleich mit der „normalen“ Funktionsgleichung des logistischen Wachstums.

Normal gilt: $f(t) = \frac{a\cdot G}{a+e^{-k\cdot G\cdot t}}$. Bei uns gilt: $g(t) = \frac{3}{0{,}03+e^{-0{,}2\cdot t}}$

Ein Vergleich liefert: $a\cdot G=3$; $a=0{,}03$; $-k\cdot G=-0{,}2$

Aus $a=0{,}03$ und $a\cdot G=3$ $\Rightarrow$ $0{,}03\cdot G=3$ $\Rightarrow$ $G=100$.

Aus $G=100$ und $-k\cdot G=-0{,}2$ $\Rightarrow$ $-k\cdot 100=-0{,}2$ $\Rightarrow$ $k=0{,}002$.

[k=0,002 braucht man in dieser Aufgabe nicht unbedingt.]

Die Grenze liegt bei 100, also 100000 infizierten Personen.

c) Wenn der „übliche“ Krankheitsverlauf durch g(t) beschrieben wird, können wir uns ausrechnen, wieviel Kranke „üblicherweise“ nach 2, 3 bzw. 4 Wochen sind.

$g(2) = \frac{3}{0{,}03+e^{-0{,}2\cdot 2}} \approx 4{,}28 \mathrel{\widehat{=}} 4280$ Infizierte

$g(3) = \frac{3}{0{,}03+e^{-0{,}2\cdot 3}} \approx 5{,}18 \mathrel{\widehat{=}} 5180$ Infizierte

$g(4) = \frac{3}{0{,}03+e^{-0{,}2\cdot 4}} \approx 6{,}26 \mathrel{\widehat{=}} 6260$ Infizierte

Ein Vergleich mit den Zahlen aus der Aufgabenstellung zeigt, dass die Zahlen in unserem Fall [mit der Funktion g(t)] zwar schon etwas höher sind als „üblicherweise“, aber nicht besonders dramatisch.

d) Die höchste Anzahl von Neuerkrankungen gibt es beim Wendepunkt.
Nun kann man zwar den Wendepunkt berechnen, jedoch ist die Berechnung von g''(t) recht aufwändig. Es wäre schlauer, die Idee zu verwenden, dass des y-Wert des Wendepunkts genau zwischen Asymptote und x-Achse liegt.

$\Rightarrow$ $y_W=50$ $\Rightarrow$ $g(t)=50$.

$\frac{3}{0{,}03+e^{-0{,}2\cdot t}} = 50 \quad | \cdot (0{,}03+e^{-0{,}2\cdot t})$

$3 = 50\cdot(0{,}03+e^{-0{,}2t}) \quad | : 50$

$0{,}06 = 0{,}03+e^{-0{,}02t} \quad | -0{,}03$

$0{,}03 = e^{-0{,}2\cdot t} \quad | \ln(\ )$

$\ln(0{,}03) = -0{,}2\cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln(0{,}03)}{-0{,}2} \approx 17{,}53$

Der x-Wert des Wendepunkts liegt bei t=17,53.
Die höchste Anzahl von Neuerkrankungen hat man nach ca. 17½ Wochen.

A.30.08 Logistisches Wachstum (mit DGL) (∰)

Natürlich gelten alle Regeln, die wir im letzten Kapitel behandelt haben [„logistisches Wachstum ohne DGL"]. Zusätzlich muss noch eine Differentialgleichung erfüllt werden, die wie immer einen Zusammenhang zwischen dem Zuwachs und dem Bestand der Funktion angibt.

Differentialgleichung:
Jede logistisch wachsende Funktion muss folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$\boxed{f'(t) = k \cdot f(t) \cdot [G - f(t)]}$$

Aufgabe 16

Das Wachstum von anfänglich 500 Küchenschaben in einer Wohnung kann durch die Differentialgleichung $s'(t) = 0{,}00025 \cdot s(t) \cdot [3000 - s(t)]$ beschrieben werden.

α) Um was für eine Wachtumsart handelt es sich ?
Geben Sie eine Gleichung für die Vermehrung der Schaben an !

β) Vor wieviel Tagen war nur ein einziges Küchenschabenpärchen in der Wohnung [also 2 Stück]?

γ) Die Funktion $g(t)=r \cdot s(t)$ beschreibe die Geruchsintensität, den die Schaben verbreiten, wobei „r" ein beliebiger Parameter ist. Zeigen Sie, dass g(t) ebenfalls logistisches Wachstum beschreibt.

δ) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für die Geruchsintensität, wenn aus irgendeinem Grund die Höchstgrenze für diesen Geruch bei 1200 liegen soll.

Lösung:

α) Die Differentialgleichung ist natürlich die vom logistischen Wachstum.
An der Stelle, an der üblicherweise die Grenze G steht, ist hier 3000 [⇒ G=3000].
An der Stelle vom Wachstumsfaktor k steht die Zahl 0,00025 [⇒ k=0,00025].
Also kann man für die Funktion den Ansatz machen:

$$s(t) = \frac{G \cdot a}{a+e^{-kGt}} = \frac{3000 \cdot a}{a+e^{-0{,}00025 \cdot 3000 \cdot t}} = \frac{3000 \cdot a}{a+e^{-0{,}5 \cdot t}}$$

Da am Anfang [zum Zeitpunkt t=0] 500 Viecher leben, gilt f(0)=500.

$$s(0) = 500$$

$$\frac{3000 \cdot a}{a+e^{-0{,}5 \cdot 0}} = 500$$

$$\frac{3000 \cdot a}{a+1} = 500 \qquad | \cdot (a+1)$$

$$3000a = 500 \cdot (a+1)$$

$$3000a = 500a+500 \qquad |-500a \quad | : 2500$$

$$a = 0{,}2 \qquad \Rightarrow \qquad s(t) = \frac{3000 \cdot 0{,}2}{0{,}2+e^{-0{,}5t}} = \frac{600}{0{,}2+e^{-0{,}5t}}$$

β)

$$s(t) = 2$$

$$\frac{600}{0{,}2+e^{-0{,}5t}} = 2 \qquad | \cdot (0{,}2+e^{-0{,}5t})$$

$$600 = 2 \cdot (0{,}2+e^{-0{,}5t})$$

$$600 = 0{,}4 + 2e^{-0{,}5t} \qquad |-0{,}4 \quad | : 2$$

$$299{,}8 = e^{-0{,}5t} \qquad | \ln(\ )$$

$$6{,}7 = -0{,}5t \qquad |:(-0{,}5)$$

$$-11{,}40 = t \qquad \Rightarrow \qquad t \approx -11{,}4$$

Vor ca. 11,4 Tagen kam das erste Küchenschabenpärchen.

γ) Man *zeigt*, dass irgendeine Funktion irgendeinen Wachstumstyp beschreibt, wenn die Funktion die Differentialgleichung von diesem Wachstumstyp erfüllt. Daher muss g(t) die DGL des logistischen Wachstums beschreiben.
Um das zu zeigen, wenden wir einen kleinen Trick an:
Wir wissen bereits, dass s(t) die DGL: $s'(t)=0{,}00025\cdot s(t)\cdot[3000-s(t)]$ erfüllt.
Nun gilt aber $g(t)=r\cdot s(t)$ und damit auch: $s(t)=\frac{1}{r}\cdot g(t)$ bzw. $s'(t)=\frac{1}{r}\cdot g'(t)$.
Einsetzen in die DGL von s(t) liefert:

$$s'(t)=0{,}00025\cdot s(t)\cdot[3000-s(t)]$$

$$\Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{r}}\cdot g'(t)=0{,}00025\cdot\cancel{\tfrac{1}{r}}\cdot g(t)\cdot\left[3000-\tfrac{1}{r}\cdot g(t)\right]$$ auf beiden Seiten $^1/_r$ kürzen

$$\Rightarrow g'(t)=0{,}00025\cdot g(t)\cdot\left[3000-\tfrac{1}{r}\cdot g(t)\right]$$

[In der eckigen Klammer steht vor dem „g(t)"-Term der Bruch „$^1/_r$". Der stört. Man bekommt ihn weg, indem man ihn ausklammert. Dadurch steht er bei der „3000" unten, im Nenner.]

$$g'(t)=0{,}00025\cdot g(t)\cdot\tfrac{1}{r}\cdot\left[\frac{3000}{\frac{1}{r}}-g(t)\right]$$

[In der Klammer den Doppelbruch auflösen, vor der Klammer umsortieren.]

$$\Rightarrow g'(t)=\frac{0{,}00025}{r}\cdot g(t)\cdot\left[3000\cdot\tfrac{r}{1}-g(t)\right] \quad\Leftrightarrow\quad g'(t)=\frac{0{,}00025}{r}\cdot g(t)\cdot[3000\cdot r-g(t)]$$

Ein Vergleich mit der normalen DGL des logistischen Wachstums:
$f'(t)=k\cdot f(t)\cdot[G-f(t)]$ zeigt, dass gilt: $k=\frac{0{,}00025}{r}$ und $G=3000\cdot r$.
Vor allem aber haben wir eine DGL des logistischen Wachstums erhalten, in welcher g'(t) und g(t) vorkommen. Daher *erfüllt* g(t) logistisches Wachstum!

δ) Die Höchstgrenze für die Geruchsintensität liegt bei 1200. Aus der letzten Teilaufgabe wissen wir, dass die Grenze von g(t) bei „3000·r" liegt.
$\Rightarrow 3000\cdot r=1200 \quad\Rightarrow\quad r=0{,}4$
Mehr brauchen wir nicht. Da ja gilt $g(t)=r\cdot s(t)$, haben wir die Funktion g(t):

$$g(t)=r\cdot s(t)=0{,}4\cdot\frac{600}{0{,}2+e^{-0{,}5\cdot t}}=\frac{240}{0{,}2+e^{-0{,}5\cdot t}}$$

Aufgabe 17

Der Fuß von Hans Klein hat eine Hautfläche von 520cm². Nun merkt Hänschen eines Tages merkwürdige Flecken an der Haut und erkennt „Aha - 20cm² vom feinsten Fußpilz". Da reagiert er sofort und misst genau sechs Wochen später die befallene Fläche erneut. Es sind jetzt 63,6cm².

a) Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung, die die Fußpilzfläche beschreibt.
b) Welche Fläche hätte der Pilz gehabt, wenn er 2 Tage nach Entdecken behandelt worden wäre?
c) Wann nimmt der der Pilz eine Fläche von 260cm² ein ?
d) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an welchem der Pilzbefall am stärksten zunimmt.
e) Beweisen Sie, dass die Hans-Klein-Aufgabe logistisches Wachstum beschreibt!

Lösung:
Nun, es ist klar, dass die Fußpilzfläche eine natürliche Höchstgrenze von 520cm² hat.
Es handelt sich um logistisches Wachstum, denn am Anfang wächst der Fußpilz nur langsam [solange nur wenige Pilzerreger da sind, können die sich auch nur dementsprechend langsam vermehren]. Allmählich wächst er immer schneller und zum Schluss, wenn er fast die Höchstgrenze erreicht hat, kann natürlich nicht mehr beliebig viel dazu kommen. Also können wir für den Fußpilzbefall logistisches Wachstum ansetzen. [Das Alles ist jedoch noch kein Beweis für Teilaufgabe f) !]
Nächstes Problem: Wir können in Tagen rechnen oder in Wochen. In dieser Aufgabe scheint es keinen großen Unterschied zu machen. Wir rechnen ohne besonderen Grund in Wochen.

a) $f(t) = \frac{G\cdot a}{a+e^{-kGt}}$ Die Grenze liegt bei 520cm² $\Rightarrow$ G=520

$\Rightarrow f(t) = \frac{520\cdot a}{a+e^{-k\cdot 520t}}$ Der Anfangsbestand beträgt 20cm² $\Rightarrow$ f(0)=20

$\Rightarrow 20 = \frac{520\cdot a}{a+e^{-k\cdot 520\cdot 0}}$ $e^{-k\cdot 520\cdot 0}=e^0=1$

$\Rightarrow 20 = \frac{520\cdot a}{a+1}$ $|\cdot(a+1)$

$20\cdot(a+1) = 520a$

$20a+20 = 520a \quad \Rightarrow \quad 20=500a \quad \Rightarrow \quad a=0{,}04$

Von unserer Funktion wissen wir bisher also: $f(t) = \frac{520\cdot a}{a+e^{-k\cdot 520t}} = \frac{20{,}8}{0{,}04+e^{-k\cdot 520t}}$

Um „k" zu bestimmen, setzen wir die letzte Angabe ein, die wir kennen: nach 6 Wochen ist die Fläche 63,6 cm² groß.

$f(6) = 63{,}6$

$\Rightarrow \frac{20{,}8}{0{,}04+e^{-k\cdot 520\cdot 6}} = 63{,}6$ $|\cdot(0{,}04+e^{-k\cdot 520\cdot 6})$ [520·6=3120]

$\Rightarrow 20{,}8 = 63{,}6\cdot(0{,}04+e^{-k\cdot 3120})$ $|:63{,}6$

$0{,}327 = 0{,}04+e^{-k\cdot 3120}$ $|-0{,}04$

$0{,}287 = e^{-k\cdot 3120}$ $|\ \ln(\ )$

$-1{,}248 = -k\cdot 3120 \quad \Rightarrow \quad k = 0{,}0004$

$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{20{,}8}{0{,}04+e^{-0{,}0004\cdot 520\cdot t}} = \frac{20{,}8}{0{,}04+e^{-0{,}208\cdot t}}$

[t in Wochen, f(t) in cm²]

b) Da wir in Wochen rechnen, sind zwei Tage: $t={}^2/_7$ Wochen.
Diesen Wert für „t" setzen wir einfach in die Funktion ein und sind glücklich.

$f\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{20{,}8}{0{,}04+e^{-0{,}208\cdot\frac{2}{7}}} \approx 21{,}17$ cm²

c) Der Bestand soll den Wert von 260 cm² annehmen $\Rightarrow$ f(t)=260.

$\frac{20{,}8}{0{,}04+e^{-0{,}208t}} = 260$ $|\cdot(0{,}04+e^{-0{,}208t})$

$20{,}8 = 260\cdot(0{,}04+e^{-0{,}208t})$ $|:260$

$0{,}08 = 0{,}04+e^{-0{,}208t}$ $|-0{,}04$

$0{,}04 = e^{-0{,}208t}$ $|\ \ln(\ )$

$-3{,}2188 = -0{,}208t \quad \Rightarrow \quad t \approx 15{,}475$

Nach ca. 15,5 Wochen nimmt Hans Kleins Fußpilz eine Fläche von 260cm² ein.

d) Die stärkste Zunahme ist bei *jeder* Funktion beim Wendepunkt.
Wir suchen also den Wendepunkt. Wir müssen also die zweite Ableitung Null setzen. Das ist recht mühsam, denn es gibt Schöneres als f(t) abzuleiten.
Es gibt ein Alternative. Der y-Wert eines Wendepunkt des logistischen Wachstums liegt immer auf halber Höhe der Grenze. Die Grenze liegt bei 520, der halbe Wert davon ist 260 – und welch' Zufall... in der letzten Teilaufgabe haben berechnet, dass nach 15,5 Wochen ein y-Wert von 260 angenommen wird.

Kurzum: Der Wendepunkt liegt bei W(15,5|260).
Nach 15,5 Wochen wird die stärkste Zunahme des Pilzbefalls verzeichnet.

e) Der *Beweis*, dass es sich um logistisches Wachstum handelt, ist der, dass f(t) die Differenzialgleichung $f'(t) = k\cdot f(t)\cdot[G-f(t)]$ erfüllt.
Mit k=0,0004 und G=520 [→ siehe Teilaufgabe a)], lautet die Differenzialgleichung in unserem Fall: $f'(t) = 0{,}0004\cdot f(t)\cdot[520-f(t)]$

f'(t) muss erst noch berechnet werden. Dazu wird f(t) erst umgeschrieben [*muss* man nicht – *kann* man aber]

$$f(t) = \frac{20{,}8}{0{,}04+e^{-0{,}208\cdot t}} = 20{,}8\cdot(0{,}04+e^{-0{,}208\cdot t})^{-1}$$

$$\Rightarrow f'(t) = 20{,}8\cdot(-1)\cdot(0{,}04+e^{-0{,}208\cdot t})^{-2}\cdot e^{-0{,}208\cdot t}\cdot(-0{,}208) =$$

$$= 4{,}326\cdot(0{,}04+e^{-0{,}208\cdot t})^{-2}\cdot e^{-0{,}208\cdot t} = \frac{4{,}326\cdot e^{-0{,}208t}}{(0{,}04+e^{-0{,}208\cdot t})^2}$$

Nun setzen wir f(t) und f'(t) in die Differenzialgleichung ein.

$$f'(t) = 0{,}0004\cdot f(t)\cdot[520-f(t)]$$

$$\frac{4{,}326\cdot e^{-0{,}208t}}{(0{,}04+e^{-0{,}208\cdot t})^2} = 0{,}0004\cdot\frac{20{,}8}{0{,}04+e^{-0{,}208\cdot t}}\cdot\left[520-\frac{20{,}8}{0{,}04+e^{-0{,}208\cdot t}}\right]$$

$$\frac{4{,}326\cdot e^{-0{,}208t}}{(0{,}04+e^{-0{,}208\cdot t})^2} = \frac{0{,}00832}{0{,}04+e^{-0{,}208\cdot t}}\cdot\left[520-\frac{20{,}8}{0{,}04+e^{-0{,}208\cdot t}}\right] \quad |\cdot(0{,}04+e^{-0{,}208t})$$

$$\frac{4{,}326\cdot e^{-0{,}208t}}{0{,}04+e^{-0{,}208\cdot t}} = 0{,}00832\cdot\left[520-\frac{20{,}8}{0{,}04+e^{-0{,}208\cdot t}}\right] \quad \text{rechts Klammer auflösen}$$

$$\frac{4{,}326\cdot e^{-0{,}208t}}{0{,}04+e^{-0{,}208\cdot t}} = 4{,}326-\frac{0{,}173}{0{,}04+e^{-0{,}208\cdot t}} \quad |\cdot(0{,}04+e^{-0{,}208t})$$

$$4{,}326\cdot e^{-0{,}208t} = 4{,}326\cdot(0{,}04+e^{-0{,}208t}) - 0{,}173 \quad \text{ausmultiplizieren}$$

$$\cancel{4{,}326\cdot e^{-0{,}208t}} = 0{,}173+\cancel{4{,}326\cdot e^{-0{,}208t}} - 0{,}173$$

$$0 = 0$$

Alles fällt weg, bis auf kleine Rundungsfehler.
f(t) erfüllt die Differenzialgleichung, es handelt sich um logistisches Wachstum!

A.30.09 Übungsaufgaben zu Wachstum (∮)

In den folgenden Aufgaben werdet Sie ziemlich viel Gelaber und viel Text finden. Das ist nur zum Teil Zufall. Ich denke, es ist nicht schlecht, wenn Sie aus vielen unwichtigem Gesülze die paar wichtigen Informationen rauspicken müssen!!

Aufgabe 18 Erste Willi-Aufgabe [exponentielles Wachstum]

Willi ist ein Kind der Fast-Food-Generation.
170 cm groß, 120kg schwer und mit einem IQ, der für diese Aufgabe nicht von Bedeutung ist. Jedenfalls bringt er erstaunlicherweise die Willensstärke auf, sein Gewicht drastisch zu reduzieren. Montag bis Samstag speckt er den zwölften Teil seines Gewichts ab, am Sonntag futtert er sich jedoch an einem einzigen Tag 8% seines Gewichts wieder zu.

a) Bestimmen Sie Willis Gewicht für die ersten drei Wochen.
b) Untersuchen Sie, ob Willis Gewicht durch eine Ihnen bekannte Wachstumssorte beschrieben werden kann. Geben Sie gegebenfalls eine Funktionsgleichung an.
c) Welches Gewicht wird sich bei Willi langfristig einstellen?
[Wenn er seine Ess- oder Abnehmgewohnheit nicht ändert.]
d) Nach einem Vierteljahr [12 Wochen] hat sich Willis Gewicht auf 106,5 kg reduziert. Ist unter diesen Umständen die Annahme mit dem gewählten

Wachstum noch sinnvoll?

Lösung auf Seite 27.

Aufgabe 19 Zweite Willi-Aufgabe [begrenztes/beschränktes Wachstum]

Willi ist ein Kind der Fast-Food-Generation. 170 cm groß, 36kg schwer. [Vor 10 Jahren, am Anfang seiner Diät noch 120kg!!!] und mit einem unveränderten IQ, sorgt sich allmählich wegen seines ständig abnehmenden Gewichts. [25 Jahre alt und nur 36kg Körpergewicht ist nur begrenzt sexy.] Er ändert also seine Diät etwas ab. Er verliert jetzt unter der Woche immer noch unverändert den zwölften Teil seines Gewichts, am Sonntag futtert er sich jedoch an einem einzigen Tag 7kg wieder an.

a) Bestimmen Sie Willis Gewicht für die ersten drei Wochen.
b) Beschreiben Sie Willis Gewichtänderung durch eine Differentialgleichung!
c) Beschreiben Sie Willis Gewicht durch eine Funktionsgleichung!
d) Weisen Sie nach, dass Willis Gewicht für alle $t \in \mathbb{R}^+$ monoton zunehmend ist.
e) Welches Gewicht wird sich bei Willi langfristig einstellen?
f) Wann wird Willi 60kg wiegen?
g) In welcher Woche erhöht sich Willis Gewicht um 1kg?
h) Wann erhöht es sich gar nicht mehr?

Lösung auf Seite 28.

Aufgabe 20 Organspende [begrenztes/beschränktes Wachstum]

Die Sonne scheint, es ist ein herrlich-warmer Samstag. Die Vögel zwitschern lustig und Bettina beschließt, sich eine Niere entfernen zu lassen. Die Krankenhaus-leitung ist sofort von der Idee begeistert und schaltet [aus Kostengründen] einen Metzger ein, der sich der Niere auch sofort meisterlich annimmt.

Die Sonne scheint immer noch, es ist ein herrlich-warmer Samstag und Bettina liegt mit der einen Niere, welche ihr noch übrig geblieben ist, auf der Intensivstation und freut sich auf die Morphiumspritze, durch welche man ja bekanntlich in ein herrlich-glückliches Stadium versetzt wird.

[Als Schüler vermisst man das ja gelegentlich.]

Der Anästhesist verabreicht Bettina erstmal intramuskulär eine Anfangsdosis von 10mg Morphium. [Das tut er sehr gerne, da Bettina einen wirklich hübschen Hintern hat.] Anschließend hängt er Bettina an eine Infusion, durch welche Bettina stündlich eine konstante Menge von 5mg Morphium verabreicht wird. Dieses ist auch notwendig, da Bettinas Körper [welcher auch besonders hübsch ist] stündlich 10% des im Körper befindlichen Morphiums wieder abbaut. Und wer ist schon als Schüler ohne Morphium lange glücklich?!

a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf, durch welche die Morphiummenge in Bettinas Körper beschrieben werden kann.
   Um was für eine Wachstumssorte handelt es sich?
b) Welche Morphiummenge wird sich langfristig in Bettinas Körper einpendeln?
   [Es darf vorausgesetzt werden, dass sie nicht gleich am Montag wieder in die Schule muss.]
c) Wann befinden sich 90% der Morphiummenge, die langfristig erwartet werden kann, in Bettinas (wirklich schönem) Körper?

Lösung auf Seite 29.

Aufgabe 21 Statistik [exponentielles Wachstum]

In den USA gibt es ca. 220 Mio. Weiße, ca. 36 Mio. Schwarze, ca. 35 Mio. Latinos und noch ein paar andere vernachlässigbare Bevölkerungsgruppen. Die Gesamtbevölkerung der USA nimmt jährlich um 0,9% zu, wobei die Anzahl der Schwarzen jährlich um 2,5% ansteigt. Die Anzahl der Latinos hat in den vergangenen 10 Jahren um 58% zugenommen.

a) Wie groß ist die jährliche Zuwachsrate der Latinos?
[Gleichmäßige Vermehrungsraten seien vorausgesetzt.]

b) Wie groß ist die jährliche Zuwachsrate der Weißen?
[Auch wieder gleichmäßige Vermehrungsraten.]

Ab jetzt gehen wir von folgenden jährlichen Zuwachsraten aus:
Weiße: 0,03%, Schwarze: 2,5%, Latinos: 4,7%.

c) Bestimmen Sie je eine Funktion, die die Bevölkerungszahl für die Gruppen der Weißen, Schwarzen und Latinos angibt!

d) In welchem Jahr wird es mehr Latinos als Schwarze geben?

Lösung auf Seite 30.

Aufgabe 22 Hirnabbau [exponentielles Wachstum]

Bei regelmäßigem Alkoholkonsum hat erlerntes Wissen eine Halbwertszeit von 0,8 Jahren. Wann wird unter diesen Bedingungen nur noch ein Prozent eines ursprünglichen Wissensstandes übrig sein?

Lösung auf Seite 33.

Aufgabe 23 Marmorkuchen [begrenztes/beschränktes Wachstum]

Andrea(s) holt einen Marmorkuchen aus dem 250°C heißen Backofen und stellt ihn in die Sommersonne. Durch die Sonnenstrahlung heizt sich der Kuchen jede Minute um 2°C auf, gibt aber gleichzeitig 5% seiner Temperatur an die kühlere Umgebung ab.

a) Zeigen Sie, dass der Abkühlungsvorgang durch begrenztes Wachstum beschrieben werden kann.

b) Stellen Sie eine Funktion auf, welche den Temperaturverlauf beschreibt!

c) Welche Temperatur wird der Kuchen langfristig annehmen?

d) Wann beträgt die Temperatur des Kuchen 50°C?

e) Wann kühlt der Kuchen um 0,5° pro Minute ab?

Lösung auf Seite 33.

Aufgabe 24 Käseschimmel [exponentielles Wachstum]

Eine Bakterienkolonie besiedelt mit 8.000 Mann (und Frauen) ein neues Stück (Käse)Land. Da Verhütungsmittel unter Bakterien nicht sehr verbreitet sind, sind's nach 2 Stunden bereits 11.935 Stück.

a) Bestimmen Sie eine Funktion, die das Wachstum der Bakterien beschreibt, unter der Annahme, dass es sich um exponentielles Wachstum handelt.

b) Wieviel Bakterien sind's nach einer Woche?

c) Wieviel würde die komplette Bakterienkolonie nach dieser Zeit wiegen, wenn für eine Bakterie ca. $2 \cdot 10^{-13}$ g angesetzt werden kann?

Lösung auf Seite 34.

Aufgabe 25 Endorphine [begrenztes/beschränktes Wachstum]

Ein Leistungssportler nimmt kurz vor dem Wettkampf 200g eines Energiedrinks zu sich, welcher zu 0,03% aus Aufputschmitteln besteht. Zusätzlich produziert sein Körper noch [körpereigene] Opiate, welche auch eine aufputschende Wirkung haben. Da das Steißbein während der ganzen Zeit kontinuierlich beide Sorten der Drogen abbaut(†), ergibt sich im Körper eine Drogenmenge (M(t) in Milligramm, t in Stunden), welche durch die Differentialgleichung:

$M'(t) = 0{,}6\cdot[10+M(t)]$ beschrieben werden kann.

a) Welche Drogenmenge wird langfristig im Körper des Sportlers zu erwarten sein?
b) Geben Sie eine Funktion an, die die Drogenmenge im Körper beschreibt.
c) Zeigen Sie, dass es sich um eine monoton fallende Funktion handelt!
d) Wann werden nur noch 16mg der Stoffe im Körper vorhanden sein, so dass die Augen des Suuper-Duuper-Sportlers wieder eine normale Farbe annehmen?

Lösung auf Seite 35.

Aufgabe 26 Stausee [begrenztes/beschränktes Wachstum]

Ein Junge baut in einem Bach einen Staudamm. In jeder Minute setzt er 50 Klumpen von Steinen, Sand und Matsch ins Wasser, die Strömung schwemmt jede Minute 2% vom gesamten Material wieder weg.

a) Aus wieviel Material (Sand, Steine, Matsch) wird der Staudamm auf Dauer gebaut sein?
b) Wann besteht der Staudamm aus einer Menge von 1.000 Materialklumpen?
c) In welcher Minute befinden sich 15 Materialklumpen mehr im Staudamm, als in der Minute davor?

Lösung auf Seite 36.

Aufgabe 27 Wohnungsdreck [begrenztes/beschränktes Wachstum]

Vorbereitende Erklärung:

In eine typische Wohnung kommt Dreck von außen rein und es geht Dreck von drinnen wieder raus. Der Dreck, der von außen rein kommt, klebt an den Schuhen und das ist durchschnittlich immer eine bestimmte, ungefähr gleichbleibende Menge [die zugegebenermaßen von Wetterlage, der Gewohnheit der Bewohner, etc... abhängt]. Der Dreck, der wieder rausgeht, wird auch wieder von den Schuhen herausgetragen oder vom Wind verweht. Diese Menge hängt aber immer von der Dreckmenge ab, die sich bereits in der Wohnung befindet [ist in der Wohnung mehr Dreck, bleibt beim Rausgehen auch mehr an den Schuhen kleben und der Wind weht auch mehr raus].

Zusammenfassung: Die Dreckmenge, die in eine Wohnung reinkommt, hat ungefähr immer den gleichen Wert. Die Dreckmenge, die wieder rausgeht ist von der bereits vorhandenen Menge abhängig. Mal schauen, was das bedeutet.

Die eigentliche Aufgabe:

In eine anfangs saubere Wohnung werden wöchentlich 300g Dreck [durch die Schuhe] hereingetragen. Beim Hinausgehen und durch den Luftzug werden wöchentlich 4% der bereits vorhandenen Dreckmenge wieder hinausbefördert.

a) Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Dreckmenge M(t) der Wohnung auf [unter der Annahme, das kein unnötiges Putzen unser mathematisches Experiment stört]!
   Um was für eine Wachstumsart handelt es sich?
b) Wird sich die Dreckmenge auf lange Sicht ins Unermessliche steigern, oder pendelt sie sich bei einer gewissen Menge ein?
   Geben Sie gegebenenfalls diese Endmenge an.
c) Geben Sie eine Funktion an, die den Dreckbestand in Abhängigkeit von der Zeit angibt. Wann werden in der Wohnung 6kg Dreck `rumfahren?

---

† Gut, ich habe gelogen: Es ist nicht das Steißbein, welches die Drogen abbaut.

Lösung auf Seite 36.

Lösung von Aufgabe 18 (von Seite 22):

a) $g(0) = 120$

Woche 1, Mo–Sa: $120{,}00-\frac{1}{12}\cdot 120{,}00 = 110{,}00.$

Woche 1, So: $110{,}00+\frac{8}{100}\cdot 110{,}00 = 118{,}80.$ $g(1)=118{,}80$

Woche 2, Mo–Sa: $118{,}80-\frac{1}{12}\cdot 118{,}80 = 108{,}90.$

Woche 2, So: $108{,}90+\frac{8}{100}\cdot 108{,}90 = 117{,}61.$ $g(2)=117{,}61$

Woche 3, Mo–Sa: $117{,}61-\frac{1}{12}\cdot 117{,}61 = 107{,}81.$

Woche 3, So: $107{,}81+\frac{8}{100}\cdot 107{,}81 = 116{,}44.$ $g(3)=116{,}44$

b) Egal, ob man den Ansatz über exponentielles oder begrenztes Wachstum probiert, hier funktionieren beide. Aber eigentlich handelt es sich um exponentielles Wachstum.

Man erkennt das verhältnismäßig schnell, da keine bestimmten Mengen [also keine kg] dazukommen oder weggehen, sondern nur Anteile [ein Zwölftel bzw. 8%].

Immer wenn nur Anteile des Bestandes dazukommen oder weggehen, handelt es sich um exponentielles Wachstum.

Da das aber noch kein Beweis ist, sondern [mathematisch gesehen] erst eine Vermutung, stellen wir eine Funktionsgleichung auf und gucken, ob alle Werte passen. [Würden wir den Ansatz über begrenztes Wachstum probieren, erhielte man als Grenze G=0 und danach die genau gleiche Funktionsgleichung.]

$g(t) = a\cdot e^{-kt}$

Es ist bekannt, dass $g(0)=120$.

Einsetzen in die Funktionsgleichung liefert:

$120=a\cdot e^{-k\cdot 0} \Rightarrow 120=a\cdot 1 \Rightarrow a=120.$

$\Rightarrow$ Die Funktionsgleichung hat bisher die Form $g(t) = 120\cdot e^{-kt}$.

Desweiteren könnten wir noch $g(1)$, $g(2)$ oder $g(3)$ verwenden.

Wir nehmen einfach mal $g(1)=118{,}8$.

$\Rightarrow 118{,}8=120\cdot e^{-k\cdot 1}$ $\quad |:120$

$\Rightarrow 0{,}99 = e^{-k}$ $\quad |\ \ln(\ )$

$\ln(0{,}99) = -k \quad \Rightarrow \quad k = +0{,}01 \quad \Rightarrow \quad g(t) = 120\cdot e^{-0{,}01t}$

Um sicher zu sein, dass unsere Idee mit dem exponentiellen Wachstum gut ist, sollten wir noch zeigen, dass die nicht verwendeten Werte $g(2)$ und $g(3)$ die richtigen y-Werte liefern:

$g(2) = 120\cdot e^{-0{,}01\cdot 2} \approx 117{,}61$ Toll! und $g(3) = 120\cdot e^{-0{,}01\cdot 3} \approx 116{,}43$ Toll!

Na ja... alles gut.

c) Das Wort *langfristig* bedeutet im Mathe im Allgemeinen, dass die Variable x oder t gegen Unendlich laufen soll. So auch hier. Es ist $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)$ gefragt.

Dieses ist aus zwei Gründen einfach: Erstens haben wir die Funktionsgleichung für g(t) bereits in der letzten Teilaufgabe berechnet und zweitens beherrschen wir ja alle die Asymptotenberechnung von e-Funktionen. ☺

Wir wissen nämlich, dass e^x gegen Null geht, wenn x gegen $-\infty$ geht.

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} 120\cdot e^{-0{,}01t} = 120\cdot 0 = 0$$

Willis Gewicht wird also langfristig gegen Null laufen.

Willi wird ... sagen wir mal ... „eher schlank“ werden.

d) Am einfachsten ist es, wenn wir den Wert t=12 in die Funktionsgleichung g(t) einsetzen und schauen, was passiert.
$g(12) = 120 \cdot e^{-0{,}01 \cdot 12} = 106{,}43$. Das ist ja nun nicht sehr weit von Willis tatsächlichen Körpergewicht von 106,5 kg entfernt. Daher können wir sagen, dass die Annahme, Willis Gewichtszunahme durch diese Wachstumfunktion zu beschreiben, immer noch sinnvoll ist.

Lösung von Aufgabe 19 (von Seite 23):

a) $g(0) = 36{,}00$

$$g(1) = \left(36{,}00 - \frac{1}{12} \cdot 36{,}00\right) + 7 = 40{,}00 \text{ kg}$$

$$g(2) = \left(40{,}00 - \frac{1}{12} \cdot 40{,}00\right) + 7 \approx 43{,}67 \text{ kg}$$

$$g(3) = \left(43{,}67 - \frac{1}{12} \cdot 43{,}67\right) + 7 \approx 47{,}03 \text{ kg}$$

b) Wir wissen wieder etwas über Willis Gewichtszu- oder Abnahme.
Die wöchentliche Gewichtszunahme setzt sich zusammen aus 7 kg, die dazu kommen und einem Zwölftel des Gewichts, das weg geht. Kurz:

Gewichtszunahme = 7kg dazu, ein Zwölftel des Gewichts weg.

Ins Mathematische übersetzt lautet das:

$$g'(t) = +7 - \frac{1}{12} \cdot g(t)$$

Die Differentialgleichung (=DGL) lautet also: $g'(t) = +7 - \frac{1}{12} \cdot g(t)$.

Was zwar nicht mehr gefragt ist, was wir aber trotzdem noch machen: Die DGL ist die vom begrenzten Wachstum, im Moment sieht sie aber noch nicht danach aus. Wir formen sie um.
Die normale DGL vom begrenzten Wachstum sieht so aus: $f'(t) = k \cdot [G - f(t)]$.
Auf der rechten Seite ist eine Klammer, davor steht eine Zahl (das k) und in der Klammer steht vor dem f(t) nichts. Um das auch bei uns hinzukriegen, klammern wir in unserer DGL das $^1/_{12}$ aus, welches vor dem g(t) steht.

$$g'(t) = +7 - \frac{1}{12} \cdot g(t) \qquad | \ ^1/_{12} \text{ ausklammern}$$

$$g'(t) = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{7}{\frac{1}{12}} - g(t) \right) = \frac{1}{12} \cdot (84 - g(t))$$

c) Da es sich um begrenztes Wachstum handelt, lautet der Ansatz für die Funktionsgleichung $g(t) = G - a \cdot e^{-k \cdot t}$.
Ein Vergleich von unserer umgeformten DGL [zwei Zeilen weiter oben] mit der „allgemeinen" DGL $f'(t) = k \cdot [G - f(t)]$ liefert uns sofort die Werte für k und G.

$$k = \frac{1}{12} \quad \text{und} \quad G = 84 \quad \Rightarrow \quad g(t) = 84 - a \cdot e^{-\frac{1}{12} \cdot t}.$$

Um a zu bestimmen, setzen wir wieder den Anfangswert g(0) = 36 ein.

$$g(0) = 36 \quad \Rightarrow \quad 36 = 84 - a \cdot e^{-\frac{1}{12} \cdot 0}$$

$$36 = 84 - a \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad a = 48$$

Die Funktionsgleichung lautet also: $g(t) = 84 - 48 \cdot e^{-\frac{1}{12} \cdot t}$.

d) Eine Funktion ist monoton zunehmend, wenn die Ableitung immer positiv ist.
Wir bilden also von g(t) die Ableitung und die sollte für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv sein.

$$g(t) = 84 - 48 \cdot e^{-\frac{1}{12} \cdot t}$$

$$g'(t) = -48 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) \cdot e^{-\frac{1}{12} \cdot t} = +4 \cdot e^{-\frac{1}{12} \cdot t}$$

Tja. Ein e-Term ist *immer* positiv und mit der +4 vorne dran, bleibt's positiv.
[Wir haben gar nicht verwendet, dass t eine positive Zahl sein muss. Also haben wir es sogar für alle $t \in \mathbb{R}$ gezeigt und nicht nur für $t \in \mathbb{R}^+$.]

e) Das Gewicht, das sich langfristig einstellt, ist die Grenze.
Die haben wir schon längst: G = 84kg.

f) Das Gewicht soll 60kg betragen $\Rightarrow$ g(t)=60.

$$84 - 48 \cdot e^{-\frac{1}{12}\cdot t} = 60 \qquad |-84$$
$$-48 \cdot e^{-\frac{1}{12}\cdot t} = -24 \qquad |:(-48)$$
$$e^{-\frac{1}{12}\cdot t} = 0{,}5 \qquad |\ \ln(\ )$$
$$-\frac{1}{12}\cdot t = -0{,}693 \qquad |\cdot(-12)$$
$$t = 8{,}32$$

Willi erreicht das gewünschte Gewicht von 60 kg nach 8,32 Wochen.

g) Die Erhöhung ist die Zunahme und diese ist wiederum die Ableitung.
Die Ableitung soll also den Wert +1 annehmen. [Die Ableitung haben wir bereits.]

$$g'(t) = 1$$
$$+4 \cdot e^{-\frac{1}{12}\cdot t} = 1 \qquad |:4$$
$$e^{-\frac{1}{12}\cdot t} = 0{,}25 \qquad |\ \ln(\ )$$
$$-\frac{1}{12}\cdot t = -1{,}386 \qquad |\cdot(-12)$$
$$t = 16{,}32$$

Nach 16,32 Wochen erhöht sich Willis Gewicht um 1kg [pro Woche].

h) Diese Frage kann man genau gleich wie die letzte Teilaufgabe rechnen oder man macht's schlauer.
Die schlaue Methode ist die: Willis Gewicht nähert sich der Grenze von 84kg an.
Wie der Name aber schon sagt, ist es eine Grenze, also eine Asymptote.
Die wird nie erreicht. Das heißt, dass Willis Gewicht sich zwar irgendwann mal nur noch „unendlich wenig", aber dennoch immer weiter annähert.
Das Gewicht erhöht sich also *immer* zumindest ein klitzekleines Bisschen.

Lösung von Aufgabe 20 (von Seite 23):

a) Zur Differentialgleichung: Wir überlegen uns, um wieviel die Morphiummenge zu- oder abnimmt.
Bezeichnen wir die Morphiummenge mit m(t). Die Zu- oder Abnahme der Morphiummenge ist damit m'(t). Die Morphiummenge nimmt um 5mg stündlich zu und gleichzeitig um 10% der Menge m(t) ab. Es gilt also:

Die Zunahme = 5 – 10% von der aktuell vorhandenen Menge.
$m'(t) = 5 - 10\% \cdot m(t)$
$\Rightarrow m'(t) = 5 - 0{,}1 \cdot m(t)$

Wenn wir nun auf der rechten Seite der Gleichung 0,1 ausklammern, erhalten wir eine Form, die uns doch sehr an eine Differentialgleichung des begrenzten Wachstums erinnert [bzw. erinnern sollte].

$m'(t) = 5 - 0{,}1 \cdot m(t)$ [auf der rechten Seite 0,1 ausklammern]
$m'(t) = 0{,}1 \cdot \left[\frac{5}{0{,}1} - m(t)\right]$ [in der eckigen Klammer vereinfachen]
$m'(t) = 0{,}1 \cdot [50 - m(t)]$

Die allgemeine Differentialgleichung [=DGL] vom begrenzten Wachstum lautet:
$f'(t) = k \cdot [G - f(t)]$. Ein Vergleich mit unserer DGL zeigt: k=0,1 und G=50.

Hiermit ist gezeigt, dass es sich um begrenztes Wachstum handelt!

b) Wir wissen bereits, dass die Grenze G=50 ist.
Es pendeln sich langfristig 50mg Morphium in Bettinas Körper ein.

c) Als erstes brauchen wir eine Funktionsgleichung von m(t).
Wir werfen einen Blick auf die allgemeine Funktionsgleichung des begrenzten Wachstums: $m(t) = G - a \cdot e^{-kt}$. | wir setzen k und G ein und erhalten
$m(t) = 50 - a \cdot e^{-0,1 \cdot t}$
„a" haben wir nicht erhalten. Dieses Problem lösen wir, indem wir den Anfangswert einsetzen. Die Anfangsdosis unserer lieben Bettina liegt bei 10mg.
Wir setzen also für t=0 und m(0)=10 ein:
$10 = 50 - a \cdot e^{-0,1 \cdot 0}$
$10 = 50 - a \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad a=40.$
Damit haben wir die komplette Funktion, die die Morphiummenge in Bettinas [wunderschönem] Körper beschreibt [welcher allerdings nur noch eine Niere hat].
$m(t) = 50 - 40 \cdot e^{-0,1 \cdot t}$
90% der langfristig zu erwartenden Menge sind:
$90\% \cdot 50mg = 0,9 \cdot 50mg = 45mg$
Es gilt also: m(t) = 45
$45 = 50 - 40 \cdot e^{-0,1 \cdot t}$ | –50 | :(-40)
$0,125 = e^{-0,1t}$ | ln( )
$\ln(0,125) = -0,1t$ | :(-0,1)
$t = \frac{\ln(0,125)}{-0,1} \approx 20,79$

Nach ca. 20,79 Stunden sind 90% der zu erwartenden Morphiummenge erreicht.

Lösung von Aufgabe 21 (von Seite 24):

a) Zum Zeitpunkt t=0 gibt es 35 Mio. Latinos. Damit gilt l(0) = 35.
In den letzten 10 Jahren hatten diese eine Wachstumsrate von 58% [nicht pro Jahr wohlgemerkt!]. Da wir von einer konstanten Wachstumsrate ausgehen sollen, werden es in 10 Jahren wohl ebenfalls 58% mehr sein. Also werden wir zum Zeitpunkt t=10 einen Bestand von $35+\frac{58}{100} \cdot 35 = 55,3$ Mio. haben.
Also: l(10) = 55,3.
Diese beiden Angaben setzen wir in die Funktionsgleichung $l(t) = a \cdot e^{-kt}$ ein.
$l(0)=35 \quad \Rightarrow \quad 35=a \cdot e^{-k \cdot 0} \quad \Rightarrow \quad 35=a$
$l(10)=55,3 \quad \Rightarrow \quad 55,3=a \cdot e^{-k \cdot 10}$ [a=35 einsetzen]
$55,3 = 35 \cdot e^{-k \cdot 10}$ | : 35
$1,58 = e^{-10k}$ | ln( )
$\ln(1,58) = -10k$ | : (-10)
$k \approx -0,0457$
Damit haben wir die Funktionsgleichung für die Latino-Vermehrung:
$l(t) = 35 \cdot e^{-(-0,0457)t} \quad \Rightarrow \quad l(t) = 35 \cdot e^{0,0457t}.$
So. Jetzt brauchen wir dummerweise noch die jährliche Wachstumsrate.
Dafür berechnen wir erst einmal, wieviel Latinos nach einem Jahr da sind:
$l(1) = 35 \cdot e^{0,0457 \cdot 1} = 36,64.$
Das entspricht einer Zunahme von: 36,64–35,0 = 1,64 Mio.
Und das entspricht einer prozentualen Zunahme von: $\frac{1,64}{35,0} \approx 0,0468 \mathrel{\hat{=}} 4,68\%.$

b) Die Zuwachsrate der Weißen zu berechnen, ist ein bisschen trickreich.
Wir rechnen den jährlichen Zuwachs der Gesamtbevölkerung auf zwei Arten aus: Einmal wächst die Gesamtbevölkerung, die 220+36+35 = 291 Mio. beträgt um 0,9%, damit sind das $291+\frac{0,9}{100}\cdot 291$ = 293,62 Mio.
Andererseits wächst die Bevölkerung der Weißen um x Prozent, die der Schwarzen um 2,5% und die der Latinos um 4,68%. Wenn man das Wachstum der Gesamtbevölkerung also auf einzelne Gruppen gesehen betrachtet, hat die Gesamtbevölkerung nach einem Jahr die Größe:
$\left(220+\frac{x}{100}\cdot 220\right)+\left(36+\frac{2,5}{100}\cdot 36\right)+\left(35+\frac{4,68}{100}\cdot 35\right) = (220+2,2x)+(36,9)+(36,638)$.
Gleichsetzen der beiden Ergebnisse liefert:
$293,62 = 220+2,2x + 36,9 + 36,638 \quad \Rightarrow \quad x=0,037\%$.
Die Bevölkerung der Weißen wächst also jährlich um mickrige 0,037%.

c) Eine Funktionsgleichung für die Latinos haben wir bereits: $l(t) = 35\cdot e^{0,0457t}$.
Die Funktionsgleichung für die Weißen und für die Schwarzen machen wir ähnlich. Die Weißen haben einen Anfangsbestand von 220 Mio. ⇒ w(0)=220.
Sie vermehren sich jährlich um 0,037 Prozent, also sind es nach einem Jahr:
$w(1) = \left(220+\frac{0,037}{100}\cdot 220\right) = 220,814$ Mio.
Beide Werte setzen wir in die Funktionsgleichung $w(t) = a\cdot e^{-kt}$ ein.
$w(0) = 220 \quad \Rightarrow \quad 220 = a\cdot e^{-k\cdot 0} \quad \Rightarrow \quad a=220$
$w(1) = 220,814 \quad \Rightarrow \quad 220,814 = a\cdot e^{-k\cdot 1}$ [a=220 einsetzen]
$220,814 = 220\cdot e^{-k\cdot 1}$ | : 220
$1,00037 = e^{-k}$ | ln( )
$0,00037 = -k \quad \Rightarrow \quad k = -0,00037$
Die Funktion für die Weißen lautet also:
$$w(t) = 220\cdot e^{-(-0,00037)t} \quad \Rightarrow \quad w(t) = 220\cdot e^{0,00037t}.$$
Die Schwarzen haben einen Anfangsbestand von 36 Mio. ⇒ s(0) = 36.
Sie vermehren sich jährlich um 2,5 Prozent, also sind es nach einem Jahr:
$s(1) = 36+\frac{2,5}{100}\cdot 36 = 36,9$ Mio.
Beide Werte setzen wir in die Funktionsgleichung $s(t)=a\cdot e^{-kt}$ ein.
$s(0) = 36 \quad \Rightarrow \quad 36 = a\cdot e^{-k\cdot 0} \quad \Rightarrow \quad a = 36$
$s(1) = 36,9 \quad \Rightarrow \quad 36,9 = a\cdot e^{-k\cdot 1}$ [a=36 einsetzen]
$36,9 = 36\cdot e^{-k\cdot 1}$ | : 36
$1,025 = e^{-k}$ | ln( )
$0,0247 = -k \quad \Rightarrow \quad k = -0,0247$
Die Funktion für die Schwarzen lautet also:
$$s(t) = 36\cdot e^{-(-0,0247)t} \quad \Rightarrow \quad s(t) = 36\cdot e^{0,0247t}.$$

d) Zuerst schauen wir, wann es gleich viel Latinos wie Schwarze gibt.
Dafür setzen wir die beiden Funktionen gleich.
$l(t) = s(t)$
$35\cdot e^{0,0457t} = 36\cdot e^{0,0247t}$ $|:e^{0,0247t}$
$35\cdot e^{0,0457t-0,0247t} = 36$
$35\cdot e^{0,021t} = 36$ |:35
$e^{0,021\cdot t} = \frac{36}{35}$
$0,021\cdot t = \ln\left(\frac{36}{35}\right)$ |:0,021
$t \approx 1,34$ (Jahre) ⇒ Nach ca. 1,34 Jahren gibt's mehr Latinos als Schwarze.

Lösung von Aufgabe 22 (von Seite 24):

Eine Halbwertszeit von 0,8 Jahren bedeutet, dass nach 0,8 Jahren noch die Hälfte des aktuellen Bestandes vorhanden sein wird. Außerdem sagt uns diese Information, dass es sich um exponentielles Wachstum handelt, da immer der gleiche prozentuale Anteil weggeht.

In dieser Aufgabe haben wir keinen Anfangswert. Das ist zwar blöd, aber wir machen etwas ganz Geniales: Wir nehmen für den Anfangswert einfach 100% an.

Eine Halbwertszeit von 0,8 Jahren bedeutet, dass nach 0,8 Jahren noch die Hälfte, also 50% übrig sind.

Also: $f(0{,}8) = 50\%$

$100\% \cdot e^{-k \cdot 0{,}8} = 50\%$ $\quad | : 100\%$

$e^{-0{,}8k} = 0{,}5$ $\quad | \ln(\ )$

$-0{,}8k = -0{,}693$ $\quad | : (-0{,}8)$

$k = 0{,}866$

Interessanterweise braucht man also keinen Anfangswert, um bei gegebener Halbwertszeit das k zu bestimmen.

Unsere Funktionsgleichung lautet also: $f(t) = 100\% \cdot e^{-0{,}866 \cdot t}$.

Jetzt können wir die Frage beantworten: Ein Prozent soll übrig sein.

$f(t) = 1\%$

$100\% \cdot e^{-0{,}866 \cdot t} = 1\%$ $\quad | : 100\%$

$e^{-0{,}866 \cdot t} = 0{,}01$ $\quad | \ln(\ )$

$-0{,}866t = -4{,}605$ $\quad | : (-0{,}866)$

$\Rightarrow t = 5{,}32$

Nach 5,32 Jahren ist also nur noch ein Prozent des ursprünglichen Wissens übrig.

Lösung von Aufgabe 23 (von Seite 24):

a) Um zu zeigen, dass es sich um begrenztes Wachstum handelt, müssen wir zeigen, dass die Differentialgleichung vom begrenzten Wachstum gilt.

Diese lautet: $f'(t) = k \cdot [G - f(t)]$.

Zuerst überlegen wir uns, was genau die Änderung der Temperatur ist.

Es kommen pro Minute ja 2°C dazu und es gehen 5% der Temperatur ab

$\Rightarrow$ Temperaturänderung = $2 - 5\% \cdot T(t)$

Da die *Änderung* einer Funktion immer die Ableitung ist, gilt:

Die Änderung = 2 – 5% der Temperatur

$\Rightarrow T'(t) = 2 - 5\% \cdot T(t)$

$\Rightarrow T'(t) = 2 - \frac{5}{100} \cdot T(t) \quad \Leftrightarrow \quad T'(t) = 2 - 0{,}05 \cdot T(t)$.

Wir haben offensichtlich eine Differentialgleichung (=DGL) erhalten. [In der Gleichung taucht T und T' auf!] Nun müssen wir zeigen, dass diese eine DGL vom begrenzten Wachstum ist.

Unsere Differentialgleichung: $\rightarrow T'(t) = 2 - 0{,}05 \cdot T(t)$.

Die vom begrenzten Wachstum: $\rightarrow f'(t) = k \cdot [\, G - f(t)\,]$.

In der DGL vom begrenzten Wachstum steht direkt vor dem f(t) *keine* Zahl. Um das auch in unserer DGL zu erhalten, klammern wir die „0,05“ vor dem T(t) aus und sind fertig: $T'(t) = 2 - 0{,}05 \cdot T(t)$

$$T'(t) = 0{,}05 \cdot \left[\frac{2}{0{,}05} - T(t)\right] \quad \Rightarrow \quad T'(t) = 0{,}05 \cdot [40 - T(t)].$$

Da wir nun eine DGL erhalten haben, die wie die vom begrenzten Wachstum aussieht, ist es eine DGL vom begrenzten Wachstum und damit ist es

begrenztes Wachstum!
Wenn man möchte, kann man aus der DGL schon direkt k und G entnehmen: k=0,05 und G=40.

b) Welche Funktion beschreibt den Temperaturverlauf?
Wir wissen [hoffentlich], dass jedes begrenzte Wachstum durch eine Funktion der Form: $f(t) = G - a\cdot e^{-k\cdot t}$ beschrieben werden kann.
Die Parameter G und k kann man der DGL entnehmen. G=40, k=0,05
$\Rightarrow$ $T(t) = 40 - a\cdot e^{-0{,}05\cdot t}$.
Wir brauchen nur noch den Parameter a. Wir verwenden hierfür die Angabe, die wir nicht verwendet haben: Der Anfangswert der Temperatur beträgt 250°C.
$\Rightarrow T(0) = 250 \quad\Rightarrow\quad 40-a\cdot e^{-0{,}05\cdot 0} = 250 \quad\Rightarrow\quad 40-a\cdot 1 = 250 \quad\Rightarrow\quad a=-210$
$\Rightarrow T(t) = 40-(-210)\cdot e^{-0{,}05\cdot t} \quad\Rightarrow\quad T(t) = 40+210\cdot e^{-0{,}05\cdot t}$

c) Welche Temperatur wird der Kuchen langfristig annehmen ?
Es ist nach dem Grenzwert der Funktion gefragt.
Den haben wir schon in Teilaufgabe a) beantwortet: G=40.
$\Rightarrow$ Der Kuchen wird langfristig auf 40°C abkühlen.

d) Wann beträgt die Temperatur des Kuchen 50°C ?
$T(t) = 50$
$40+210\cdot e^{-0{,}05\cdot t} = 50 \qquad |-40 \quad |:210$
$e^{-0{,}05\cdot t} = \frac{10}{210} \qquad |\ \ln(\ )$
$-0{,}05\cdot t = -3{,}044 \quad\Rightarrow\quad t \approx 60{,}89$ (min)

e) Eine Abkühlung pro Minute ist die Ableitung der Funktion [die Abkühlung ist ja eine Änderung der Temperatur]. Die Ableitung soll also 0,5 betragen. Um genau zu sein -0,5, da es ja eine Abnahme und keine Zunahme ist.
$\Rightarrow$ $T'(t) = -0{,}5$
Wir brauchen die Ableitung von T(t).
$T(t) = 40+210\cdot e^{-0{,}05t} \quad\Rightarrow\quad T'(t) = 210\cdot(-0{,}05)e^{-0{,}05t} = -10{,}5e^{-0{,}05t}$
$\Rightarrow -10{,}5e^{-0{,}05t} = -0{,}5 \qquad |:(-10{,}5)$
$e^{-0{,}05t} = 0{,}0476 \qquad |\ \ln(\ )$
$-0{,}05t = -3{,}045 \qquad |\ :(-0{,}05)$
$t \approx 60{,}9$
In der 61. Minute kühlt die Temperatur um 0,5° Grad (je Minute) ab.

Lösung von Aufgabe 24 (von Seite 24):
a) Da es sich um exponentielles Wachstum handelt, ist unser Ansatz wieder:
$B(t) = a\cdot e^{-k\cdot t}$.
Der Anfangswert ist 8000 $\Rightarrow$ $B(0) = 8000$,
desweiteren haben wir noch $B(2) = 11935$.
Beide Werte setzen wir in die Funktion ein:
$B(0) = 8000 \quad\Rightarrow\quad 8000 = a\cdot e^{-k\cdot 0} \quad\Rightarrow\quad a = 8000$
$B(2) = 11935 \quad\Rightarrow\quad 11935 = a\cdot e^{-k\cdot 2}$ [a=8000 einsetzen]
$8000\cdot e^{-2k} = 11935 \qquad |\ :8000$
$e^{-2k} = 1{,}492 \qquad |\ \ln(\ )$
$-2k = 0{,}400 \qquad |\ :(-2)$
$k = -0{,}2 \quad\Rightarrow\quad B(t) = 8000\cdot e^{-(-0{,}2)t} \quad\Rightarrow\quad B(t) = 8000\cdot e^{0{,}2t}$

b) Sehr einfach. Das einzige, worauf man achten muss, ist die Tatsache, dass wir in Stunden rechnen müssen. Eine Woche hat $7 \cdot 24 = 168$ Stunden.
$B(7) = 8000 \cdot e^{0,2 \cdot 168} = 3,13 \cdot 10^{18}$ [Also 3.130.000.000.000.000.000 Stück.]

c) Jede Bakterie wiegt $2 \cdot 10^{-13}$g, also wiegt die ganze Kolonie:
$3,13 \cdot 10^{18}$Bakterien zu je $2 \cdot 10^{-13}$g $= 3,13 \cdot 10^{18} \cdot 2 \cdot 10^{-13}$g $= 626.000$g $\mathrel{\widehat{=}}$ 626kg.
[Dieses Ergebnis spricht dafür, dass das exponentielle Wachstum auf Dauer nicht realistisch ist.]

Lösung von Aufgabe 25 (von Seite 25):

a) Uns ist eine Differentialgleichung gegeben, die ziemlich stark nach begrenztem Wachstum aussieht. Wenn man unsere Differentialgleichung mit der allgemeinen vom begrenzten Wachstum vergleicht [$f'(t)=k \cdot (G-f(t))$], erkennt man, dass k den Wert k=0,6 annehmen muss und die Grenze G den Wert G=10.
Tja, das war's. Langfristig werden sich 10mg Drogen im Sportler befinden.

b) Die Funktionsgleichung wird dadurch, dass es sich um begrenztes Wachstum handelt, die Form haben: $M(t) = G - a \cdot e^{-k \cdot t}$.
G=10 und k=0,6 konnten wir ja bereits in der letzten Teilaufgaben erkennen.
$\Rightarrow M(t) = 10 - a \cdot e^{-0,6 \cdot t}$.
Nun brauchen wir noch das „a". Dafür brauchen wir noch einen Wert, z.B. wäre da der Anfangswert ganz gut. Körpereigenen Opiate werden erst produziert, die gibt es anfangs noch nicht. Also kommt der Anfangsbestand der Drogen nur durch diesen Energiedrink.
Der Energiedrink enthält 0,03% von 200g Drogen, also $\frac{0,03}{100} \cdot 200 = 0,06$ Gramm!
Die Aufgabe wird jedoch in Milligramm gerechnet. Also haben wir einen Anfangsbestand von $0,06 \cdot 1000 = 60$Milligramm = 60mg.
Diesen Anfangswert setzen wir in die Funktionsgleichung ein.
$M(0) = 60$
$10 - a \cdot e^{-0,6 \cdot 0} = 60$
$10 - a \cdot 1 = 60 \quad \Rightarrow \quad a = -50 \quad \Rightarrow \quad M(t) = 10 - (-50) \cdot e^{-0,6t} \quad \Rightarrow \quad M(t) = 10 + 50 \cdot e^{-0,6t}$

c) Die Funktion ist monoton fallend, wenn die Ableitung negativ ist. Wir bestimmen die Ableitung!
$M(t) = 10 + 50 \cdot e^{-0,6t}$
$\Rightarrow M'(t) = +50 \cdot (-0,6) \cdot e^{-0,6t} = -30 \cdot e^{-0,6t}$
Da ein e-Term immer positiv ist, vor dem e-Term eine „-30" steht, ist M'(t) immer negativ. Deswegen ist die Funktion immer fallend.

d) $M(t) = 16$
$10 + 50 \cdot e^{-0,6t} = 16 \qquad | -10$
$50 \cdot e^{-0,6 \cdot t} = 6 \qquad | :50$
$e^{-0,6t} = 0,12 \qquad | \ln(\,)$
$-0,6t = -2,12 \qquad | :(-0,6)$
$t = 3,53$
Nach 3,53 Stunden nehmen die Sportleraugen wieder eine normale Farbe an.

Lösung von Aufgabe 26 (von Seite 25):
Es handelt sich um begrenztes Wachstum, da immer eine bestimmte *Menge* dazu kommt und immer ein bestimmter *Prozentsatz* weggeht. [Das muss man vorläufig jedoch nicht unbedingt wissen.]

a) Wir haben eine Angabe über die Änderung der Menge.
Die Änderung ist: 50 Klumpen kommen dazu, 2% vom Bestand gehen weg.
[Jetzt das Ganze kürzer.]
Die Änderung = +50 – 2% vom Bestand.
[Jetzt das Ganze mathematisch.]
$f'(t) = +50 - 2\% \cdot f(t)$ [2% in $^{2}/_{100}$ = 0,02 umschreiben]
$f'(t) = +50 - 0{,}02 \cdot f(t)$ [0,02 ausklammern]
$f'(t) = 0{,}02 \cdot \left(\frac{50}{0{,}02} - f(t)\right)$ [$^{50}/_{0{,}02}$ ausrechnen]
$f'(t) = 0{,}02 \cdot [2500 - f(t)]$
Wir haben eine Differentialgleichung von begrenztem Wachstum erhalten.
Man kann ablesen: G=2500 und k=0,02.
Und man kann die Frage schon beantworten:
Auf Dauer werden 2.500 Materialklumpen den Staudamm bilden.
Wir rechnen aber noch die Funktionsgleichung aus. [Die braucht man immer.]
$f(t) = G + a \cdot e^{-k \cdot t}$ [G und k einsetzen]
$\Rightarrow f(t) = 2500 + a \cdot e^{-0{,}02 \cdot t}$
Man kann wohl davon ausgehen, dass am Anfang nichts im Wasser ist
$\Rightarrow$ bei t=0 gilt: $f(0)=0$
$\Rightarrow 0 = 2500 + a \cdot e^{-0{,}02 \cdot 0} \Rightarrow a=-2500 \Rightarrow f(t)=2500-2500 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t}$.

b) Bestand von 1.000 Materialklumpen: f(t)=1000.
$\Rightarrow 1000 = 2500 - 2500 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t}$ |–2500
$-1500 = -2500e^{-0{,}02t}$ |:(-2500)
$0{,}6 = e^{-0{,}02t}$ | ln( )
$-0{,}51 = -0{,}02t$ |:(-0,02)
$25{,}5 = t$
Nach 25,5 Minuten besteht der Staudamm aus 1.000 Klumpen „Baumaterial".

c) Wir haben eine *Änderung* von 15 Klumpen pro Minute.
Eine Änderung ist die Ableitung. Wir berechnen also die Ableitung.
$f(t) = 2500-2500 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t} \Rightarrow f'(t) = -2500 \cdot e^{-0{,}02t} \cdot (-0{,}02) = 50 \cdot e^{-0{,}02t}$
$\Rightarrow f'(t) = 15$
$50e^{-0{,}02t} = 15$ |:50
$e^{-0{,}02t} = 0{,}3$ | ln( )
$-0{,}02t = -1{,}20$ |:(-0,02)
$\Rightarrow t = 60$
Nach 60 Minuten, also nach einer Stunde, befinden sich 15 Matschklumpen mehr im Staudamm, also in der Minute davor.

Lösung von Auf.27 (von Seite 25):
a) Wir haben, wie in den letzten Aufgaben auch, eine Angabe über die *Zunahme* der Dreckmenge.
Die Zunahme besteht aus 300g, die dazu kommen, abzüglich 4% vom Bestand.
Ins Mathematische übersetzt:
$M'(t) = +300 - 0{,}04 \cdot M(t)$

Wir haben jetzt eine Differentialgleichung. Allerdings erkennt man an der Form, die sie hat, noch so ziemlich gar nichts. Also formen wir die Gleichung wieder geschickt um, in dem wir 0,04 ausklammern.

$M'(t) = 0{,}04 \cdot \left(\frac{300}{0{,}04} - M(t)\right)$

$\Rightarrow$ $M'(t) = 0{,}04 \cdot (7500 - M(t))$

Dieses ist eine Differentialgleichung vom begrenzten Wachstum.
Wir haben es somit mit begrenztem Wachstum zu tun.

b) Da es sich um begrenztes Wachstum handelt, pendelt sich die Dreckmenge natürlich bei irgendeiner Grenze ein. Aus der Differentialgleichung erkennen wir, dass es bei einer Grenze von 7.500g = 7,5kg sein wird.

c) Die Funktionsgleichung für ein begrenztes Wachstum lautet: $M(t) = G - a \cdot e^{-k \cdot t}$.
G=7500 und k=0,04 können wird aus der Differentialgleichung entnehmen.
Also wissen wir: $M(t) = 7500 - a \cdot e^{-0{,}04 \cdot t}$.
Um den Parameter a berechnen zu können, brauchen wir noch eine Angabe.
Da am Anfang kein Dreck in der Wohnung ist („anfangs saubere Wohnung"), gilt wohl $M(0) = 0$.

$\Rightarrow$ $7500 - a \cdot e^{-0{,}04 \cdot 0} = 0$

$7500 - a \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 7500 \quad \Rightarrow \quad M(t) = 7500 - 7500 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t}$

Als Letztes müssen wir noch wissen, wann in der Wohnung 6kg=6000g Dreck herum liegen.

$\Rightarrow$ $M(t) = 6000$

$7500 - 7500 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} = 6000 \qquad | -7500$

$-7500 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} = -1500 \qquad | :(-1500)$

$e^{-0{,}04 \cdot t} = 0{,}2 \qquad | \ln(\,)$

$-0{,}04t = -1{,}61 \qquad | : (-0{,}04)$

$t = 40{,}24$

In der 41. Woche liegen in der Wohnung 6kg Dreck herum.

Und die Moral von der Geschicht': „Meine Wohnung putz ich nicht!"

Aufgabe 28 (Fichtenwachstum) [logistisches Wachstum]

Ein 44cm großer Fichtensetzling ist ein Jahr später 10cm größer.

a) Geben Sie eine Funktionsgleichung für die Höhe der Fichte an, unter der Annahme, dass das Fichtenwachstum logistischen Gesetzmäßigkeiten gehorcht und dass Fichten eine durchschnittliche Höhe von 56 Metern erreichen.
b) Bestimmen Sie eine Differentialgleichung für das Wachstum.
c) Ein Baum gilt als ausgewachsen, wenn er 80% seiner Endhöhe erreicht hat. Wann ist das bei dieser Fichte der Fall?
d) In welchem Jahr wächst die Fichte um 25cm?
e) Zeigen Sie, dass die in a) bestimmte Gleichung die in b) bestimmte Differentialgleichung tatsächlich erfüllt.

Lösung:
Wir legen zuerst mal fest, in was für Einheiten wir rechnen. Wir legen einfach mal

fest, dass wir die Zeit in *Jahren* rechnen und die Höhe in *Metern*.

a) Logistisches Wachstum wird durch die Funktion $h(t)=\frac{G\cdot a}{a+e^{-kGt}}$ beschrieben.

Wir kennen die Grenze G=56 (Meter) und wir wissen, dass der Anfangsbestand 44cm ≙ 0,44 (Meter) beträgt

$\Rightarrow\ h(0)=0{,}44\ \Rightarrow\ \frac{56\cdot a}{a+e^{-k\cdot 56\cdot 0}}=0{,}44\ \Rightarrow\ \frac{56\cdot a}{a+1}=0{,}44\ \Rightarrow\ 56a=0{,}44\cdot(a+1)\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 56a=0{,}44a+0{,}44\ \Rightarrow\ 55{,}56a=0{,}44\ \Rightarrow\ a=\frac{0{,}44}{55{,}56}\approx 0{,}008$

$\Rightarrow\ h(t)=\frac{56\cdot 0{,}008}{0{,}008+e^{-k\cdot 56\cdot t}}\ \Rightarrow\ h(t)=\frac{0{,}448}{0{,}008+e^{-k\cdot 56\cdot t}}$

Wir wissen, dass die Höhe der Tanne nach einem Jahr um 10cm zugenommen hat. Es gilt also: h(1)=44cm+10cm=0,44m+0,10m=0,54m

$\Rightarrow\ \frac{0{,}448}{0{,}008+e^{-k\cdot 56\cdot 1}}=0{,}54\ \Rightarrow\ \frac{0{,}448}{0{,}008+e^{-k\cdot 56}}=0{,}54\ \Rightarrow\ 0{,}448=0{,}54\cdot(0{,}008+e^{-k\cdot 56})\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 0{,}008+e^{-56k}=\frac{0{,}448}{0{,}54}\ \Rightarrow\ 0{,}008+e^{-56k}\approx 0{,}83\ \Rightarrow\ e^{-56k}\approx 0{,}83$

$\Rightarrow\ -56k=\ln(0{,}83)\ \Rightarrow\ -56k=-0{,}186\ \Rightarrow\ k=\frac{0{,}186}{56}\ \Rightarrow\ k=0{,}00332$

$\Rightarrow\ h(t)=\frac{0{,}448}{0{,}008+e^{-0{,}00332\cdot 56\cdot t}}\ \Rightarrow\ h(t)=\frac{0{,}448}{0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t}}$

b) Die Bestimmung der Differenzialgleichung [=DGL] ist einfach.
Die „normale" DGL des logistischen Wachstums lautet: $f'(t)=k\cdot f(t)\cdot[G-f(t)]$
Wir kennen bereits $k=0{,}00332$ und $G=56$.
Daher lautet unsere DGL: $h'(t)=0{,}00332\cdot h(t)\cdot[56-h(t)]$

c) Uns interessiert, wann die Fichte 90% ihrer Endgröße erreicht hat.
80% von 56m sind $0{,}8\cdot 56 = 44{,}8 \Rightarrow h(t) = 44{,}8$

$$\Rightarrow \frac{0{,}448}{0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t}} = 44{,}8 \qquad |\cdot(0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t})$$
$$0{,}448 = 44{,}8\cdot(0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t}) \qquad |:44{,}8$$
$$0{,}01 = 0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t} \qquad |-0{,}008$$
$$0{,}002 = e^{-0{,}186\cdot t} \qquad |\ \ln(\ )$$
$$\ln(0{,}002) = -0{,}186\cdot t \qquad |:(-0{,}186)$$
$$\Rightarrow t = \frac{\ln(0{,}002)}{-0{,}186} \approx 33{,}4$$

Nach ca. 33,4 Jahren gilt die Fichte als ausgewachsen.

d) Das Wachstum ist die Zunahme der Höhe. Und eine Zunahme ist die Ableitung.
Wir möchten also wissen, wann die Ableitung den Wert 25cm≙0,25m beträgt.
Zuerst bestimmen wir die Ableitung.

$$\Rightarrow h(t) = \frac{0{,}448}{0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t}} = 0{,}448\cdot(0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t})^{-1}$$
$$\Rightarrow h'(t) = 0{,}448\cdot(-1)\cdot(0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t})^{-2}\cdot e^{-0{,}186\cdot t}\cdot(-0{,}186) =$$
$$= \frac{0{,}448\cdot 0{,}186\cdot e^{-0{,}186 t}}{(0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t})^2} = \frac{0{,}083328\cdot e^{-0{,}186 t}}{(0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t})^2}$$
$$h'(t) = 0{,}25$$
$$\frac{0{,}083328\cdot e^{-0{,}186 t}}{(0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t})^2} = 0{,}25 \qquad |\cdot(0{,}008+e^{-0{,}186t})^2$$
$$0{,}083328\cdot e^{-0{,}186\cdot t} = 0{,}25\cdot(0{,}008+e^{-0{,}186t})^2 \qquad |:0{,}25$$
$$0{,}333312\cdot e^{-0{,}186\cdot t} = (0{,}008+e^{-0{,}186t})^2 \qquad \text{Binom auflösen}$$
$$0{,}333312\cdot e^{-0{,}186\cdot t} = 0{,}000064+0{,}016\cdot e^{-0{,}186t}+(e^{-0{,}186t})^2 \qquad |-0{,}333312e^{-0{,}186t}$$
$$0 = 0{,}000064-0{,}317312e^{-0{,}186t}+(e^{-0{,}186t})^2 \qquad \text{Substitution: } z=e^{-0{,}186t}$$
$$0 = 0{,}000064-0{,}317312\cdot z+z^2$$

Wir wenden p-q-Formel oder a-b-c-Formel an. Die detaillierte Rechnung ersparen wir uns hier, denn die Lösung der Aufgabe wird sonst zu lang.

Man erhält die beiden Lösungen: $z_1=0{,}3171$ und $z_2=0{,}0002$
Resubstitution:

$$z_1=0{,}3171 \Rightarrow e^{-0{,}186t}=0{,}3171 \Rightarrow -0{,}186t=\ln(0{,}3171) \Rightarrow t=\frac{\ln(0{,}3171)}{-0{,}186}\approx 6{,}17$$
$$z_2=0{,}0002 \Rightarrow e^{-0{,}186t}=0{,}0002 \Rightarrow -0{,}186t=\ln(0{,}0002) \Rightarrow t=\frac{\ln(0{,}0002)}{-0{,}186}\approx 45{,}8$$

Antwort: Nach ca. 6,2 Jahren und nach 45,8 Jahren wächst die Fichte um ca. 0,25m pro Jahr.

e) Wie zeigt man, dass eine Funktion eine Differentialgleichung erfüllt?
Man setzt die Funktion in die Differentialgleichung ein und hofft, eine wahre Aussage zu erhalten. Also:

$h(t)=\frac{0{,}448}{0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t}}$ und $h'(t)=\frac{0{,}083328\cdot e^{-0{,}186 t}}{(0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t})^2}$ einsetzen in:

$$h'(t)=0{,}00332\cdot h(t)\cdot[56-h(t)]$$
$$\frac{0{,}083328\cdot e^{-0{,}186 t}}{(0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t})^2} = 0{,}00332\cdot\frac{0{,}448}{0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t}}\cdot\left[56-\frac{0{,}448}{0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t}}\right] \qquad |\cdot(0{,}008+e^{-0{,}186t})$$
$$\frac{0{,}083328\cdot e^{-0{,}186 t}}{0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t}} = 0{,}00332\cdot 0{,}448\cdot\left[56-\frac{0{,}448}{0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t}}\right] \qquad \text{zusammenrechnen}$$

$$\frac{0{,}083328\cdot e^{-0{,}186\cdot t}}{0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t}} = 0{,}001487\cdot\left[56-\frac{0{,}448}{0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t}}\right]$$

$$\frac{0{,}083328\cdot e^{-0{,}186\cdot t}}{0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t}} = 0{,}0833-\frac{0{,}000642}{0{,}008+e^{-0{,}186\cdot t}} \qquad |\cdot(0{,}008+e^{-0{,}186t})$$

$$0{,}083328\cdot e^{-0{,}186t} = 0{,}0833\cdot(0{,}008+e^{-0{,}186t})-0{,}0006422$$

$$0{,}083328\cdot e^{-0{,}186t} = \cancel{0{,}000666}+0{,}0833e^{-0{,}186t}\cancel{-0{,}000666}$$

$$0{,}083328\cdot e^{-0{,}186t} = 0{,}0833e^{-0{,}186t}$$

Bis auf Rundungsfehler haben wir eine wahre Aussage.
Die Funktion h(t) erfüllt also die Differentialgleichung.