

## Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.  
Das vollständige Buch können Sie unter  
**www.mathe-laden.de** bestellen  
(falls Sie das möchten).

Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen  
finden, die nicht aus dem Internet herunter  
geladen werden können.

Dazu gehören:

**Inhaltsverzeichnis, Stichwortverzeichnis,**  
und viele **Aufgaben zum Selberrechnen.**



## Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches  
(und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie  
die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie  
diese Datei vermutlich bezogen haben.

Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und  
den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.  
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

## Nutzungsbedingung:

Sie können diese Datei gerne beliebig für den eigenen Gebrauch verwenden.  
Nicht gestattet sind Änderungen sowie kommerzielle Nutzung.

## A.15 Tangenten und Normalen

Es gibt mehrere Methoden Tangenten und Normale zu berechnen. Ich werde hier zwei Methoden vorstellen, mit denen das geht.

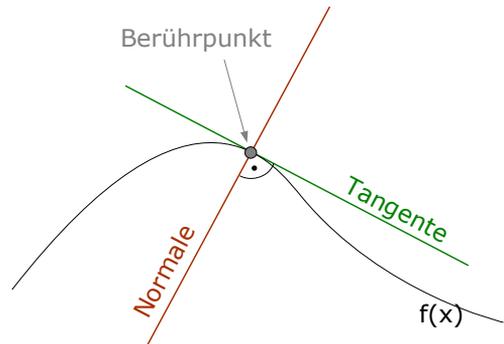
- Die gängigste Methode ist diejenige über  $y=mx+b$ .
- Die geschickteste ist die, über die Tangenten- bzw. Normalenformel.
- Es gibt noch eine dritte Methode, welche über die Punkt-Steigungs-Formel geht, diese ähnelt aber dem Weg über Tangenten- und Normalengleichung. Ich stelle diese Methode daher *nicht* vor.

Mit der ersten Methode kann man *fast* alle Tangentenaufgaben lösen.  
Mit der zweiten Methode kriegt man *alle* Fragestellungen zu Tangenten hin.

Was ist überhaupt eine Tangente oder eine Normale?

Eine **Tangente** ist eine Gerade, die eine Funktion in einem bestimmten Punkt [dem Berührungspunkt] berührt.

Eine **Normale** ist eine Gerade, die in einem bestimmten Punkt [dem Berührungspunkt der Tangente] senkrecht auf der Tangente steht.



Das Wichtigste bei der Berechnung von Tangenten ist, zu wissen, dass man die Tangentensteigung über die erste Ableitung berechnet.

Es gilt:  $m_{\text{Tan}} = f'(u)$

Hierbei ist „u“ der x-Wert des Berührungspunktes.

Aus der Tangentensteigung kann man die Normalensteigung berechnen [falls man die braucht].

Die Normalensteigung ist der negative Kehrwert der Tangentensteigung. Es gilt:  $m_{\text{Nor}} = -\frac{1}{m_{\text{Tan}}}$

**Die Tangentensteigung:**

$$m_{\text{Tan}} = f'(u)$$

**Die Normalensteigung:**

$$m_{\text{Nor}} = -\frac{1}{m_{\text{Tan}}}$$

„u“ ist der x-Wert des Berührungspunktes

**A.15.01 Methode 1: Berechnung über  $y = m \cdot x + b$  (###)****Aufgabe 1**Sei  $f(x) = x^3 + 5x^2 + 6x$ . [gleiche Aufgabe wie Aufgabe 3]Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen an  $f(x)$  im Punkt  $B(-1 | f(-1))$  !**Aufgabe 2**Sei  $f(x) = 0,5x^2 - 2x + 3$  [gleiche Aufgabe wie Aufgabe 4]Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen an  $f(x)$  im Punkt  $B(4 | a)$  !

Lösung von Aufgabe 1:

Erstmal rechnen wir B vollständig aus.

$$f(-1) = (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) = -1 + 5 - 6 = -2 \quad \Rightarrow \quad B(-1 | -2)$$

Dann brauchen wir „m“, das geht über die Ableitung:

$$f'(x) = 3x^2 + 10x + 6$$

$$\Rightarrow m_{\text{Tan}} = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 10 \cdot (-1) + 6 = -1$$

Wir kennen also  $x$ ,  $y$  und  $m$  [ $x=-1$ ,  $y=-2$ ,  $m=-1$ ] und können alles in  $y=m \cdot x+b$  einsetzen:

$$y_{\text{Tan}} = m \cdot x + b$$

$$\Rightarrow -2 = -1 \cdot (-1) + b \quad \Rightarrow \quad -2 = 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = -3 \quad \Rightarrow \quad y_{\text{Tan}} = -1 \cdot x - 3$$

Um die Normalengleichung zu erhalten, berechnen wir zuerst die Normalensteigung und setzen dann wieder  $m$  und die Koordinaten von B in  $y = m \cdot x + b$  ein.

$$m_{\text{Nor}} = -\frac{1}{m_{\text{Tan}}} = -\frac{1}{-1} = +1$$

$$y_{\text{Nor}} = m \cdot x + b$$

$$\Rightarrow -2 = +1 \cdot (-1) + b \quad \Rightarrow \quad b = -1 \quad \Rightarrow \quad y_{\text{Nor}} = 1 \cdot x - 1$$

Lösung von Aufgabe 2:

Wir berechnen zuerst die Koordinaten von B.

$$a = f(4) = 0,5 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 8 - 8 + 3 = 3 \quad \Rightarrow \quad B(4 | 3)$$

Nun brauchen wir „m“, das geht über die Ableitung:

$$f'(x) = 1x - 2$$

$$\Rightarrow m_{\text{Tan}} = f'(4) = 1 \cdot 4 - 2 = 2$$

Wir kennen  $x$ ,  $y$  und  $m$  [ $x=4$ ,  $y=3$ ,  $m=2$ ] und können alles in  $y=m \cdot x+b$  einsetzen:

$$y_{\text{Tan}} = m \cdot x + b$$

$$\Rightarrow 3 = 2 \cdot 4 + b \quad \Rightarrow \quad 3 = 8 + b \quad \Rightarrow \quad b = -5 \quad \Rightarrow \quad y_{\text{Tan}} = 2x - 5$$

Um die Normalengleichung zu erhalten, berechnen wir wieder zuerst die Normalensteigung und setzen dann alles in  $y = m \cdot x + b$  ein.

$$m_{\text{Nor}} = m_{\text{Nor}} = -\frac{1}{m_{\text{tan}}} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

$$\begin{aligned} y_{\text{Nor}} &= m \cdot x + b \\ \Rightarrow 3 &= -0,5 \cdot 4 + b & \Rightarrow & b = 5 & \Rightarrow & y_{\text{Nor}} = -0,5x + 5 \end{aligned}$$

## A.15.02 Methode 2: Über Tangenten- und Normalengleichung (##)

### Aufgabe 3

Sei  $f(x) = x^3 + 5x^2 + 6x$ . [gleiche Aufgabe wie Aufgabe 1]

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen an  $f(x)$  im Punkt  $B(-1|f(-1))$  !

### Aufgabe 4

Sei  $f(x) = 0,5x^2 - 2x + 3$ . [gleiche Aufgabe wie Aufgabe 2]

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen an  $f(x)$  im Punkt  $B(4|a)$  !

Lösung von Aufgabe 3:

Das Schöne an der Tangentenformel bzw. an der Normalenformel ist, dass man eigentlich nichts denken muss. Man berechnet  $f'(u)$  und  $f(u)$  und setzt einfach alles ein.

Zuerst berechnen wir noch die Ableitung.

$$f'(x) = 3x^2 + 10x + 6$$

$$u = -1$$

$$f(u) = f(-1) = (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) = \dots = -2$$

$$f'(u) = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 10 \cdot (-1) + 6 = -1$$

Nun setzen wir alles in die Formeln ein und sind fertig.

Berechnung der Tangente:

$$\begin{aligned} y_{\text{Tan}} &= f'(u) \cdot (x-u) + f(u) = f'(-1) \cdot (x+1) + f(-1) = \\ &= -1 \cdot (x+1) + (-2) = -1x - 1 - 2 = -1x - 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y_{\text{Tan}} = -1 \cdot x - 3$$

Berechnung der Normale:

$$y_{\text{Nor}} = \frac{-1}{f'(u)} \cdot (x-u) + f(u) = \frac{-1}{f'(-1)} \cdot (x+1) + f(-1) =$$

**Die Tangentenformel:**  
 $y_T = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$

**Die Normalenformel:**

$$y_N = \frac{-1}{f'(u)} \cdot (x-u) + f(u)$$

**$B(u|f(u))$**   
 ist der Berührungspunkt.

$$= \frac{-1}{-1} \cdot (x+1) + (-2) = 1 \cdot (x+1) - 2 = 1 \cdot x + 1 - 2 \quad \Rightarrow \quad y_{\text{Nor}} = 1x - 1$$

Lösung von Aufgabe 4:

Zuerst beginnen wir mit der Berechnung der Ableitung.

$$f'(x) = 1 \cdot x - 2$$

$$u = 4$$

$$f(u) = f(4) = 0,5 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 8 - 8 + 3 = 3$$

$$f'(u) = f'(4) = 1 \cdot 4 - 2 = 2$$

Nun setzen wir alles in die Formeln ein und sind fertig.

Berechnung der Tangente:

$$\begin{aligned} y_{\text{Tan}} &= f'(u) \cdot (x-u) + f(u) = f'(4) \cdot (x-4) + f(4) \\ &= 2 \cdot (x-4) + 3 = 2x - 8 + 3 = 2 \cdot x - 5 \quad \Rightarrow \quad y_{\text{Tan}} = 2x - 5 \end{aligned}$$

Berechnung der Normale:

$$\begin{aligned} y_{\text{Nor}} &= \frac{-1}{f'(u)} \cdot (x-u) + f(u) = \frac{-1}{f'(4)} \cdot (x-4) + f(4) \\ &= \frac{-1}{2} \cdot (x-4) + 3 = -0,5 \cdot (x-4) + 3 = -0,5 \cdot x + 2 + 3 \quad \Rightarrow \quad y_{\text{Nor}} = -0,5x + 5 \end{aligned}$$

### A.15.03 Wendetangente und Wendenormale (###)

Eine Wendetangente bzw. eine Wendenormale ist nicht anderes, als eine Tangente bzw. eine Normale im Wendepunkt.

Der einzige Unterschied zu „normalen“ Tangentenaufgaben ist der, dass man zuerst den Wendepunkt berechnen muss.

#### Aufgabe 5

Bestimme die Gleichung der Wendetangente

und der Wendenormale der Funktion  $f_t(x)$  mit:

$$f_t(x) = \frac{1}{3t}x^3 + 2x^2 + 3tx.$$

Lösung von Aufgabe 5:

Da es sich um *Wendetangente* und *Wendenormale* handelt, wird der Berührungspunkt logischerweise auch der Wendepunkt sein. Daher berechnen wir erst `mal den Wendepunkt.

$$\text{Ableitungen: } f'(x) = \frac{1}{t}x^2 + 4x + 3t \quad f''(x) = \frac{2}{t}x + 4 \quad f'''(x) = \frac{2}{t}$$

Wendepunkt:

$$f''(x) = 0$$

$$\frac{2}{t}x + 4 = 0$$

| · t

$$2x + 4t = 0$$

$$\Rightarrow x_w = -2t$$

Überprüfung mit  $f'''(x)$ :

$$f'''(x) = \frac{2}{t} \neq 0 \Rightarrow \text{bei } x_w = -2t \text{ ist sicher ein Wendepunkt.}$$

y-Wert:

$$y_w = \frac{2}{t}x + 4 = \dots = -\frac{2}{3}t^2$$

Damit haben wir den Wendepunkt. Toll.

$$W\left(-2t \mid -\frac{2}{3}t^2\right)$$

Die Steigung im Wendepunkt ist:

$$f'(-2t) = \frac{1}{t}(-2t)^2 + 4(-2t) + 3t = \frac{1}{t} \cdot 4t^2 - 8t + 3t = -t.$$

Jetzt können wir die Wendetangente aufstellen:

➤ erste Möglichkeit, über  $y = m \cdot x + b$ :

$$y = m \cdot x + b \quad [\text{die Werte für } x, y \text{ und } m \text{ einsetzen}]$$

$$-\frac{2}{3}t^2 = -t \cdot (-2t) + b \Rightarrow -\frac{2}{3}t^2 = 2t^2 + b \Rightarrow -\frac{8}{3}t^2 = b \Rightarrow y_{\text{Tan}} = -tx - \frac{8}{3}t^2$$

➤ zweite Möglichkeit, über Tangentengleichung:

$$y_{\text{Tan}} = f'(-2t) \cdot (x - (-2t)) + f(-2t) = -t \cdot (x + 2t) - \frac{2}{3}t^2 \Rightarrow y_{\text{Tan}} = -tx - \frac{8}{3}t^2$$

Ebenso können wir die Wendenormale aufstellen:

➤ erste Möglichkeit, über  $y = m \cdot x + b$ :

$$\text{Zuerst brauchen wir die Normalensteigung: } m_{\text{Nor}} = \frac{-1}{m_{\text{tan}}} = \frac{-1}{-t} = \frac{1}{t}$$

$$y = m \cdot x + b \quad [\text{die Werte für } x, y \text{ und } m \text{ einsetzen}]$$

$$-\frac{2}{3}t^2 = \frac{1}{t} \cdot (-2t) + b \Rightarrow -\frac{2}{3}t^2 = -2 + b \Rightarrow -\frac{2}{3}t^2 + 2 = b \Rightarrow y_{\text{Tan}} = \frac{1}{t}x - \frac{2}{3}t^2 + 2$$

➤ zweite Möglichkeit, über Normalengleichung:

$$y_{\text{Tan}} = \frac{-1}{f'(-2t)} \cdot (x - (-2t)) + f(-2t) = \frac{-1}{-t} \cdot (x + 2t) - \frac{2}{3}t^2 =$$

$$= \frac{1}{t} \cdot (x + 2t) - \frac{2}{3}t^2 = \frac{1}{t} \cdot x + 2 - \frac{2}{3}t^2 \Rightarrow y_{\text{Tan}} = \frac{1}{t}x + 2 - \frac{2}{3}t^2$$

**A.15.04 Unbekannter Berührungspunkt (Tangente von außen) (§§)**

**Worum geht es überhaupt?**

Gegeben sind eine Funktion  $f(x)$  und ein Punkt A, der nicht auf der Funktion liegt. Gesucht sind eine [oder mehrere] Tangenten, die an der Funktion anliegen und durch den gegebenen Punkt A laufen.

**Vorgehensweise:**

Man verwendet die Tangentengleichung und setzt die Koordinaten des gegebenen Punktes A für x und y ein. [NICHT für „u“ einsetzen!! „u“ ist der x-Werts des Berührungspunktes und den haben wir NICHT!]

Man erhält eine Gleichung mit „u“ als einziger Unbekannten. Die Gleichung löst man von Hand oder mit dem GTR nach „u“ auf.

**Aufgabe 6**

Bestimme die Gleichung der Tangenten an die Funktion  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 4$ , die durch den Punkt A( 1 | 9 ) geht.

Lösung von Aufgabe 6:

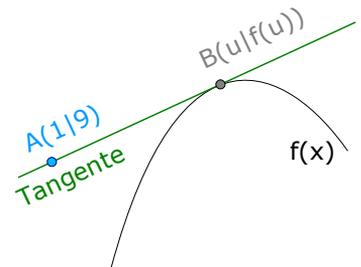
$f(x) = 3x^2 - 6x + 5$  [Ableitung ist immer gut]

Der Punkt A liegt *nicht* auf der Funktion  $f(x)$ .

[Setzt man den x-Wert von A in  $f(x)$  ein, kommt nicht 9 raus.]

Insbesondere gilt nicht  $m_{Tan} = f'(1)$  [  $m_{Tan} \neq f'(1)$  ].

Da wir den Berührungspunkt nicht gegeben haben, schenken wir ihm großzügiger Weise die Koordinaten:  $B(u|f(u))$ .



Ab nun stellen wir unsere Tangentengleichung auf:

$$y_{Tan} = f'(u) \cdot (x-u) + f(u) \Leftrightarrow y_{Tan} = (3u^2 - 6u + 5) \cdot (x-u) + u^3 - 3u^2 + 5u + 4$$

Jetzt erst kommt unser Punkt A ins Spiel. A liegt zwar nicht auf der Funktion, aber dafür auf der Tangente.

Also machen wir eine Punktprobe mit A.

$A(1 | 9) \Rightarrow x_A=1, y_A=9$  einsetzen.

$9 = (3u^2 - 6u + 5) \cdot (1-u) + u^3 - 3u^2 + 5u + 4$  ←  
[Die Gleichung vereinfachen ...]

$9 = 3u^2 - 6u + 5 - 3u^3 + 6u^2 - 5u + u^3 - 3u^2 + 5u + 4$

$9 = -2u^3 + 6u^2 - 6u + 9 \quad | -9$

$0 = -2u^3 + 6u^2 - 6u \quad \text{„u“ ausklammern}$

$0 = u \cdot (-2u^2 + 6u^2 - 6u)$

$u_1 = 0 \quad -2u^2 + 6u - 6 = 0$

[Diese Gleichung löst man mit der p-q-Formel oder mit der a-b-c-Formel. Ich spare mir das an dieser Stelle. Man erhält auf jeden Fall keine Lösung,

Die Gleichung, die man hier links erhält, löst man normalerweise natürlich mit dem Taschenrechner. In diesem Buch möchte ich jedoch alles „von Hand“ rechnen. ☺

da unter der Wurzel was Negatives stehen wird.]

Einzigste Lösung ist also  $u = 0$ .

Nun haben wir den Berührungspunkt:  $B(0 | f(0))$ .

Wir können also die Tangentengleichung aufstellen.

$$y_{\text{Tan}} = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$$

$$\Rightarrow y_{\text{Tan}} = f'(0) \cdot (x-0) + f(0) = 5 \cdot (x-0) + 4 \quad \Rightarrow \quad y_{\text{Tan}} = 5x+4$$


---

### A.15.05 kurze Beispielaufgabe

#### Aufgabe 7

Bestimme die Gleichung der Tangenten an  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ , die parallel zu  $y = 9x + 16$  sind!

Lösung von Aufgabe 7:

Wenn die Tangenten parallel zu  $y = 9x + 16$  sind, müssen auch sie die Steigung  $m_{\text{Tan}} = 9$  haben.

$$\Rightarrow 9 = m_{\text{Tan}} = f'(u)$$

$$9 = 3u^2 - 6u \quad | -9 \quad | :3$$

$$u^2 - 2u - 3 = 0$$

$$u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 + 3} = 1 \pm 2 \quad \leftarrow \text{[a-b-c-Formel geht selbstverständlich ebenfalls]}$$

$$u_1 = -1 \quad u_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad B_1(-1 | f(-1)) \quad B_2(3 | f(3))$$

Jetzt können wir bereits die Tangentengleichungen berechnen:

[Ich kürze den Rest der Rechnung etwas ab. Ich verwende auch nur die Methode über die Tangentengleichung. Über  $y = m \cdot x + b$  geht's natürlich genau so gut]

$$\text{erste Tangente: } y_{\text{Tan}} = f'(-1) \cdot (x - (-1)) + f(-1) = 9 \cdot (x+1) + 0 = 9x+9$$

$$\text{zweite Tangente: } y_{\text{Tan}} = f'(3) \cdot (x-3) + f(3) = 9 \cdot (x-3) + 4 = 9x-23$$


---

Rahmen ohne hilfreiche Weisheiten darin.