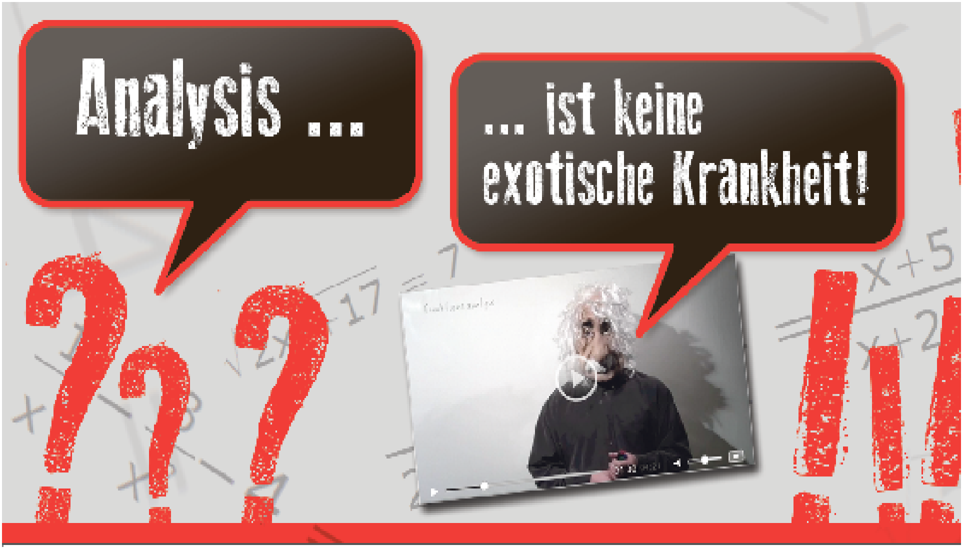
Mathe-Trainings-Heft

Prüfungsvorbereitung
für Oberstufe und Abitur




## Übungsaufgaben mit Lösungen

# Analysis – Tiefere Einblicke

**Extremwertaufgaben**
**Verschieben, Strecken, Spiegeln**
**Schaubilder von Funktionen**
**Wachstum / Anwendungsaufgaben**
**... und mehr**

Kostenlose Videos mit Rechenwegen auf **Mathe-Seite.de**

Mrz.2015

## Kombiniere Lern-Videos mit Lern-Schriften - für bessere Noten.

Du möchtest nicht nur die Lern-Videos schauen, sondern auch mal ein paar Übungsaufgaben rechnen oder Theorie nachlesen?
Dann nutze die kostenlosen Lern-Schriften!
Das Besondere an den Lern-Schriften ist, dass Struktur und Inhalte identisch mit den Lern-Videos auf der Mathe-Seite.de sind. Falls du also in den Lern-Schriften etwas nicht verstehst, findest du die nötigen Erklärungen im Lern-Video - am schnellsten via QR-Codes.

## Lern-Schriften + Lern-Videos = bessere Noten

Was dir das nützt: Dein Lernen wird wesentlich effektiver, denn du profitierst vom sogenannten "crossmedialen Effekt". Der kommt aus der Werbe-Psychologie und bewirkt, dass du die Thematik intensiver wahrnimmst, besser verstehst und länger memorierst. Das bietet übrigens nur die Mathe-Seite.de!

## Das Mathe-Trainings-Heft (MTH)

Das vorliegende Mathe-Trainings-Heft beinhaltet Rechenaufgaben und Lösungen speziell zur Prüfungsvorbereitung für Oberstufe und Abitur. Solltest du eine Aufgabe nicht lösen können, findest du den Rechenweg direkt per QR-Link im Lern-Video.
Zum Beispiel: Den Lösungsweg zu den Übungsaufgaben [A.12.06] findest du online auf der Mathe-Seite.de im Kapitel [A.12.06].
Vermutlich brauchst du nicht alle der im MTH enthaltenen Mathe-Themen. Unter www.mathe-seite.de > Abi-Themen nach Bundesland findest du eine Liste mit denjenigen Themen, die für dein Bundesland und deine Schulart relevant sind.

## Weitere kostenlose Lern-Schriften auf der MatheSeite

- Die Lernbuch-Reihe – detailliertes Fachwissen in mehreren Bänden
- Die Lern-Kartei-Karten – handlich und clever
- Die Formelsammlung – das unverzichtbare Nachschlagewerk
- Die Anleitungen für Grafische Taschenrechner – endlich verständlich

# A.21 | Extremwertaufgaben

## A.21.02 | Reale Anwendungen

[01] Ein arbeitsloser Mathematiker will entlang einer Hauswand Karotten züchten. Um diese vor den Kaninchen seiner Kinder zu schützen legt er ein rechteckiges Beet an, welches er mit einem 4,8 m langen Maschendraht umzäunt.
Welche Fläche kann das Beet maximal annehmen ?

[02] Einem trotteligen Lehrling einer Glaserei fällt eine Glasscheibe herunter, die bricht und danach wirklich zufällig die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Seitenlängen 3m, 4m, 5m hat. Der Meister sagt nun: „Als Strafe musst du aus dieser Glasscheibe ein rechteckiges Stück dergestalt ausschneiden, dass dieses maximalen Flächeninhalt annimmt!“ Helfen Sie dem Lehrling!

[03] Ein chinesischer Lycheesaft-Abfüller will neue Packungen konzipieren. Diese sollen eine Volumen von 1,5Liter fassen und eine quadratische Grundfläche haben. Welche Höhe sollte die Packung idealerweise haben, damit der Materialverbrauch am kleinsten ist ?

[04] In einen Kegel mit R=6cm und H=12cm soll ein Zylinder mit maximalem Rauminhalt eingefasst werden. Welche Maße muss der Zylinder haben?

[05] Ein Tunnel hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Die gesamte Querschnittfläche beträgt $123m^2$. Welche Breite sollte der Tunnel haben, damit der Umfang minimal ist?

[06] Ein Getränkehersteller stellt Getränke her. Unter anderem gekühlte Erfrischungsgetränke in Dosen. Die Dosen sind zylinderförmig, aus Aluminium und fassen 0,2Liter. Leider kauft China den Aluminiumweltmarkt leer und es muss Aluminium gespart werden. Wie müssen die Maße der Dose abgeändert werden, damit möglichst wenig Aluminium verbraucht wird?

## A.21.03 | Dreiecke, Rechtecke

[01] $f(x)=0{,}25x^3-3x^2+9x$. Der Kurvenpunkt $P(u|v)$ bildet für $u>0$ mit den Punkten $S(u|0)$ und $O(0|0)$ ein Dreieck. Für welchen Wert von u nimmt der Flächeninhalt des Dreiecks ein Maximum an?

[02] Gegeben sei $f(x)=-0{,}25x^2+9$. Die Punkte $P(u|f(u))$ mit $-6<u<6$, $Q(u|0)$ und $R(-6|0)$ bilden ein Dreieck.
Wie groß kann die Fläche dieses Dreiecks maximal werden?

[03] Der Punkt $P(u|v)$ liegt auf der Funktion $f(x)=0{,}2x^4-2x^2+5$ und ist der Eckpunkt eines zur y-Achse symmetrischen Rechtecks, dessen eine Seite auf der x-Achse liegt. Bestimmen Sie $0<u<2$ so, dass das Rechteck maximalen Flächeninhalt annimmt.

[04] Die Gerade $x=z$ schneidet $f(x)=x^2-3x-3$ im Punkt A und $g(x)=-x^2+2x+4$ im Punkt B. Bestimmen Sie $0<z<4$ so, dass A, B und $C(-1|0)$ ein Dreieck mit möglichst großem Flächeninhalt bilden. Wie groß ist der maximale Flächeninhalt?

[05] $f(x)=-x^2+6x$. Der Kurvenpunkt $P(u|v)$ und der Punkt $Q(-3|-6)$ sind Eckpunkte eines Rechtecks, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Bestimmen Sie $0<u<6$ so, dass die Fläche des Rechtecks maximal wird.

[06] Die Gerade $x=k$ schneidet für $0<k<3$ $f(x)=x^3-2x^2-3x$ in A und $g(x)=x^2-3x$ in B. Bestimmen Sie den Wert für k, für den das Dreieck ABC mit $C(0|-4)$ den größten Flächeninhalt hat.

## A.21.04 | Umfang

[01] Auf der Funktion $f(x)=-x^2+8$ liegen die Punkte P(u|v) und Q(-u|v) im 1. bzw. 2.Quadranten . Die Parallelen zur y-Achse durch P und Q schneiden die x-Achse in R und S. Bestimmen Sie u so, dass der Umfang des Rechtecks maximal wird.

[02] Gegeben sei die tolle Funktion $f(x)=\sqrt{-x^2+16}$. Die Punkte P(u|f(u)) mit $0<u<4$, Q(u|0) und O(0|0) bilden ein Dreieck. Für welchen Wert von u ist der Umfang dieses Dreiecks extremal?

## A.21.05 | Kegel- und Zylindervolumen

[01] P(u|f(u)) liegt im 4.Quadranten auf der Funktion $f(x)=0{,}5x^2-8$. Zusammen mit R(0|f(u)) und dem Ursprung bildet er ein Dreieck, welches um die y-Achse rotiert. Wie muss u gewählt werden, damit das Volumen des entstehenden Rotationskörpers maximal wird?

[02] P(u|f(u)) liegt im 4.Quadranten auf der Funktion $f(x)=0{,}5x^2-8$. Zusammen mit R(u|0) und dem Ursprung bildet er ein Dreieck, welches um die x-Achse rotiert. Wie muss u gewählt werden, damit das Volumen des entstehenden Rotationskörpers maximal wird?

[03] P(u|f(u)) liegt im 4.Quadranten auf der Funktion $f(x)=0{,}5x^2-8$. Zusammen mit R(0|f(u)), T(u|0) und dem Ursprung bildet er ein Rechteck, welches um die y-Achse rotiert. Wie muss u gewählt werden, damit das Volumen des entstehenden Rotationskörpers maximal wird?

## A.21.06 | Abstand zwischen zwei Funktionen

[01] Die Gerade x=a schneidet $f(x)=0{,}5x^3+x^2-4x+2$ in F und $g(x)=x^2+2x-3$ in G. Bestimmen Sie a so, dass die Streckenlänge $\overline{FG}$ ein Maximum annimmt.

[02] Das Schaubild von $f(x)=x^3-3x^2-6x+8$ und das Schaubild von f'(x) schneiden aus der Gerade x=z eine Strecke aus. Bestimme $-2<z<2$ so, dass die Streckenlänge maximal wird. Wie groß ist diese Strecke?

[03] Wie klein kann der vertikal gemessene Abstand zwischen den beiden Funktionen $f(x)=-x^2$ und $g(x)=x^2-4x+4$ werden?

## A.21.07 ; A.21.08 | Abstand Punkt-Funktion

[01] Welcher Punkt der Gerade $y=2x-3$ hat von A(-2|3) den kleinsten Abstand?

[02] Welche beiden Punkte der Funktion $f(x)=-0{,}25x^2$ haben von B(0|-6) den kleinsten Abstand?

[03] Welche beiden Punkte der Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$ haben von C(2|1) die kleinste Entfernung?

## A.21.09 | Hässliches

[01] $f(x)=x^2-3x-4$ bildet mit den Koordinatenachsen im 4.Feld eine Fläche, in welcher ein Viereck liegt. Welche Eckpunkte muss das Viereck haben, damit seine Fläche möglichst groß wird?

[02] Sei $f(x)=\frac{1}{12}x^4-3x^2$. Die Punkte A(u|0), B(2u|0), C(2u|f(2u)) und D(u|f(u)) bilden für $0<u<3$ ein Trapez. Für welchen Wert von u ist die Trapezfläche maximal?

[03] $f(x)=\frac{1}{12}x^4-3x^2$ bildet mit der x-Achse im 4.Feld eine Fläche. Die Geraden x=u und x=2u schneiden aus dieser Fläche einen Streifen aus. Für welches u ist der Flächeninhalt dieses Streifens maximal?

[04] $f_t(x)=t^2 \cdot x^2+2t^3 \cdot x-2t^2+1$ Für welchen Wert von t liegt der Tiefpunkt von $f_t(x)$ am höchsten? Geben Sie die Koordinaten dieses Tiefpunktes an.

[05] Gegeben ist $f(x)=-x^3+4x$. Bestimmen Sie k>0 so, dass $I(k)=\int_0^k f(x)dx$ ein Maximum annimmt.

[06] Ein Rechteck liegt mit zwei Seiten auf der x- und y-Achse. Ein Eckpunkt des Rechtecks liegt im ersten Quadranten auf der Funktion $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Zeigen Sie, dass das Volumen, das bei Rotation des Rechtecks um die y-Achse entsteht, unabhängig von der Wahl des Rechtecks ist.

## A.22 | Schnittwinkel zwischen Funktionen

### A.22.01 | Berühren / senkrecht schneiden

[01] Weisen Sie nach, dass sich $f(x)=x^2-5x+4$ und $g(x)=-x^2+3x-4$ berühren. Geben Sie die Koordinaten des Berührpunktes an.

[02] Weisen Sie nach, dass sich $f(x)=x^2-5x+6$ und $g(x)=x^2-3x+2$ senkrecht schneiden. Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes an.

[03] Für welche Werte von t berührt $f(x)=x^3-2x^2-3x-8$ die Parabel quadratische Parabel $g_t(x)=x^2+6x+2t$ ?

[04] Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}^+$ schneiden sich die Parabeln $f(x)=x^2-3x-8$ und $g_t(x)=x^2+6x+2t$ orthogonal ?

[05] $f(x)=a \cdot x^2+c$ berührt $g(x)=x^3-2x^2-2x+2$ im Punkt P(2|-2). Bestimmen Sie die Funktion f(x).

[06] $f(x)=a \cdot x^2+c$ schneidet $g(x)=x^3-2x^2-2x+2$ im Punkt P(2|-2) orthogonal. Bestimmen Sie die Funktion f(x).

### A.22.02 ; A.22.03 | Schnittwinkel

[01] Unter welchem Winkel schneidet $f(x)=x^2-3x-4$ die positive x-Achse?

[02] Bestimme den Schnittwinkel von $f(x)=x^2-5x+6$ und $g(x)=x^2-x-2$.

[03] Bestimme alle Schnittwinkel von $f(x)=x^4-5x^2$ und $g(x)=-x^2$.

[04] Bestimmen Sie den Steigungswinkel der Tangente an $f(x)=-0{,}2x^2+5$ im Schnittpunkt mit der x-Achse.

[05] Unter welchem Winkel schneidet die zweite Winkelhalbierende die Funktion $f(x)=x^3$ ?

[06] Bestimmen Sie den Schnittwinkel von $f(x)=0{,}5x^3-x-0{,}5$ und $g(x)=x^2-4x+2$ im Schnittpunkt A(1|-1).

## A.23 | Verschieben, Spiegeln, Strecken von Funktionen

### A.23.01 | Verschieben

[01] Verschieben Sie $f(x)=x^2-3x-4$ um 2 nach rechts!

[02] Verschieben Sie $f(x)=x^3+2x+1$ um 1 nach links!

[03] Verschieben Sie $f(x)=x^2-3x-4$ um 45 nach oben!

[04] Verschieben Sie $f(x)=x^3+2x+1$ um $2\pi$ nach unten!

[05] Verschieben Sie $f(x)=x^4+3$ um 1 nach rechts und 3 nach unten.

[06] Verschieben Sie $f(x)=x^2+x+3$ um 2 nach links und 1 hoch.

### A.23.02 | Strecken

[01] Strecken Sie $f(x)=x^2-3x-4$ um den Faktor 2 in y-Richtung!

[02] Strecken Sie $f(x)=x^3+2x+1$ um den Faktor -0,5 in y-Richtung!

[03] Strecken Sie $f(x)=x^2-3x-4$ um den Faktor 2 in x-Richtung!
[04] Strecken Sie $f(x)=x^3+2x+1$ um den Faktor -0,5 in x-Richtung!
[05] Strecken Sie $f(x)=x^4+3$ um den Faktor 3 in y-Richtung und um den Faktor 0,5 in x-Richtung.

### A.23.03 | Spiegeln am Ursprung und an Achsen

[01] Spiegeln Sie $f(x)=x^2-3x-4$ an der y-Achse!
[02] Spiegeln Sie $f(x)=x^3+2x+1$ an der x-Achse!
[03] Spiegeln Sie $f(x)=x^4-5x^2+1$ am Ursprung!
[04] Spiegeln Sie $f(x)=(2x+3)^3$ an der y-Achse!
[05] Spiegeln Sie $f(x)=1{,}7\cdot(4x-x^2)^3+2$ an der x-Achse!
[06] Spiegeln Sie $f(x)=x\cdot(x-1)^2$ am Ursprung!

### A.23.04 ; A23.05 | Spiegeln an beliebigen Punkten und Achsen

[01] Spiegeln Sie $f(x)=-x^3+5$ an der Gerade $x=1$!
[02] Spiegeln Sie $f(x)=(2x+3)^3$ an $y=-3$.
[03] Spiegeln Sie $f(x)=2x^3-8x$ an $S(-2|1)$
[04] Spiegeln Sie $f(x)=x^2-3x-4$ an der Gerade $x=3$!
[05] Spiegeln Sie $f(x)=x^3+2x+1$ an der Gerade $y=1$!
[06] Spiegeln Sie $f(x)=-x^2+5x-2$ an $S(-3|2)$!

## A.24 | Funktionsscharen

### A.24.01 | Ortskurven

[01] Bestimmen Sie die Ortskurven der Punkte $A(2t|t^3-3t)$, $B(t+2|1-t^2)$
[02] Bestimmen Sie die Ortskurven der Punkte $C(\tfrac{1}{8}\cdot t^2+1|0{,}5t^4+t^2)$, $D(t^2|t)$
[03] Bestimmen Sie die Ortskurven der Punkte $E(t^2|5)$, $F(-1|2t+2)$, $G(t^3|0)$
[04] Bestimmen Sie die Ortskurve aller Tiefpunkte von $f_t(x)=x^2-4tx-6t$
[05] Bestimmen Sie die Ortskurve aller Wendepunkte von $f_t(x)=x^4-6tx^2+2t$
[06] Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Extrema von $f_t(x)=-\frac{1}{6t}\cdot x^3+8t^3x$

### A.24.02 ; A.24.03 | Beispielaufgaben zu Funktionsscharen

[01] [→siehe A.19.04] Nennen Sie für $t\in\mathbb{R}^+$ drei gemeinsame Eigenschaften aller Funktionen der Schar $g_t(x)=x^3+3tx^2$.
[02] [→siehe A.19.04] Bestimme die Ortskurve der Extrem- und Wendepunkte der Funktion $g_t(x)=x^3+3tx^2$.
[03] [→siehe A.19.04] Für welchen Wert von $t>0$ haben die Nullstellen von $g_t(x)=x^3+3tx^2$ den Abstand 6?
[04] [→siehe A.19.04] Für welchen positiven Wert von t bildet die Funktion der Schar $g_t(x)=x^3+3tx^2$ mit der x-Achse eine Fläche von 108 FE?
[05] [→siehe A.19.05] Beschreiben Sie für $t>0$ den Verlauf aller Funktionen der Funktionenschar $h_t(x) = \frac{1}{3}\cdot tx\cdot(4-x)^3$.
[06] [→siehe A.19.05] Bestimmen Sie Ortskurve aller Extrem- und Wendepunkte von $h_t(x) = \frac{1}{3}\cdot tx\cdot(4-x)^3$.
[07] [→siehe A.19.05] Für welchen Wert von t hat die Wendetangente von $h_t(x) = \frac{1}{3}\cdot tx\cdot(4-x)^3$ eine Steigung von $m_W=-16$ ?
[08] [→siehe A.19.05] Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von der

Wendetangente von $h_t(x) = \frac{1}{3} \cdot tx \cdot (4-x)^3$ und den Achsen gebildet wird.

## A.25 | Stetigkeit / Differenzierbarkeit

### A.25.02 | abschnittsweise definierte Funktionen

[01] Untersuchen Sie $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{für } x>1 \\ x+1 & \text{für } x\leqslant 1 \end{cases}$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit

[02] Untersuchen Sie $g(x) = \begin{cases} -x^2+4x & \text{für } x<3 \\ -x+6 & \text{für } x\geqslant 3 \end{cases}$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

[03] Untersuchen Sie, ob die Funktionen $h_1(x) = \frac{x+4}{x}$ für $x\leqslant -2$ und $h_2(x)=x+3$ für $x>-2$ knickfrei in einander übergehen.

[04] Bestimme a so, dass $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{für } x<0 \\ 2x+a & \text{für } x\geqslant 0 \end{cases}$ stetig ist.

[05] Für welche b und c ist $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot x^2+x & \text{für } x>4 \\ bx+c & \text{für } x\leqslant 4 \end{cases}$ differenzierbar?

[06] Für welche d und e ist $h(x) = \begin{cases} dx^2+e & \text{für } x\leqslant 2 \\ 1-\frac{2}{x^2} & \text{für } x>2 \end{cases}$ differenzierbar?

### A.25.03 | Definition der Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

[01] Beweisen Sie: $f(x) = \sqrt{|x-2|}$ ist an der Stelle $x=2$ stetig.

[02] Beweisen Sie: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } |x|\leqslant 2 \\ 4 & \text{sonst} \end{cases}$ ist an jeder Stelle stetig.

[03] Überprüfen Sie: $f(x) = \begin{cases} x^2+2x & \text{falls } x\geqslant 1 \\ (-2+x)^3+4 & \text{falls } x<1 \end{cases}$ auf Differenzierbarkeit.

[04] Überprüfen Sie: $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

## A.26 | Ungleichungen

### A.26.01 | einfache, lineare Ungleichungen

Bestimmen Sie die Lösung für x.

[01] $2x-6 \geqslant 5x+3$
[02] $4x+2 < 2x+8$
[03] $3\cdot(2+3x)-2(4+3x) > x-2$
[04] $(-1+4x)^2+6 \leqslant 5-2x(3-8x)$
[05] $4(x+2)+1 > -7+2(2x-1)$
[06] $(x+1)(x+4) \geqslant x(x+5)+9$

### A.26.02 | quadratische Ungleichungen

Bestimmen Sie die Lösungen für x.

[01] $x^2-4x-5\leqslant 0$
[02] $2x^2+6x\geqslant 0$
[03] $x^2+3x-4<3x^2-5x+2$
[04] $(-1+4x)^2>1$
[05] $-0{,}5x^2+x-3\leqslant 0{,}5x$
[06] $-x(x-2)>2x$

### A.26.03 | Ungleichungen höherer Potenz

Bestimmen Sie die Lösungen für x.

[01] $(x+1)(x-2)(x-5)>0$
[02] $x^3-6x^2\geqslant 0$
[03] $x^4+4x^2<0$
[04] $-2x^3+8x^2-6x\leqslant 0$
[05] $\frac{1}{2}\cdot(x+2)^3>0$
[06] $-x^4+5x^2\geqslant 4$

### A.26.04 | Bruch-Ungleichungen mit Fallunterscheidung

Bestimmen Sie die Lösungen für x.

[01] $\frac{2}{x} < \frac{1}{x-1}$ [02] $\frac{x+1}{x-3} \geqslant \frac{2x-7}{2x+3}$ [03] $\frac{x-4}{x+5} \leqslant \frac{x+1}{x-5}$

## A.27 | Schaubilder von Funktionen

### A.27.02 | Zuordnung von Schaubildern (typische Merkmale erkennen)

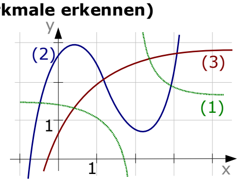
[01] Gegeben sind die Schaubilder von drei Funktionen:

$f(x)=\frac{1}{x+a}+b$ $g(x)=½\cdot x^3+c\cdot x^2+d\cdot x+f$

$h(x)=g\cdot e^{-x}+h$

mit den Parametern a,b,c,d,f,g und h.

Ordnen Sie den Funktionen ihre Graphen zu.



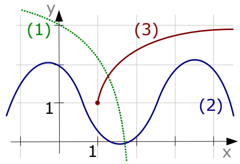

[02] Ordnen Sie den Funktionen

$f(x) = \sqrt{x+a}+1$, $g(x)=b\cdot\ln(1-x)+c$

$h(x)=1{,}1\cdot\sin(dx+e)+1$

ihre zugehörigen Schaubilder zu.

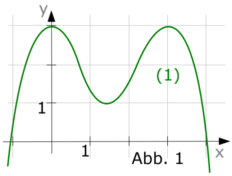
Begründen Sie Ihre Antworten.

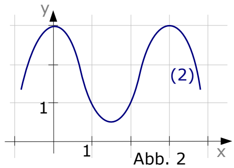


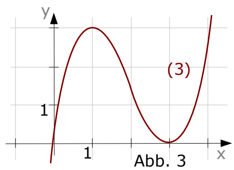

[03] Ordnen Sie den Funktionen:

$f(x)=\frac{1}{a}\cdot x\cdot(x-a)^2$, $g(x)=b-0{,}5x^2\cdot(x-b)^2$,

$h(x)=\cos(c\cdot x)+2$ ihre zugehörigen Schaubilder zu.



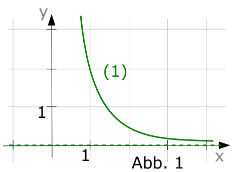

Bestimmen Sie die Parameterwerte a, b, und c.

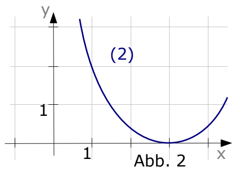
[04] Von den vier Funktionen:

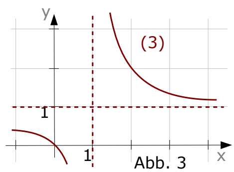
$f(x)=\frac{a\cdot x}{x-a}$, $g(x)=b\cdot\cos(2x)+b$, $h(x)=0{,}5\cdot(x-c)^2$, $i(x)=2e^{-x+d}+k$

sind drei Schaubilder mitsamt Asymptoten gezeichnet.

Ordnen Sie die Schaubilder ihren Funktionen zu.




Bestimmen Sie die Parameterwerte der gezeichneten Funktionen.

[05] Ordnen Sie den drei Funktionen

$f(x)=ax\cdot(x+1)\cdot(x-2a)$, $g(x)=e^{x+2b}+b$ und $h(x)=\frac{1}{2}\cdot(x-c)\cdot\sqrt{x}$ ihre Schaubilder zu.

Bestimmen Sie die Parameter a, b und c.

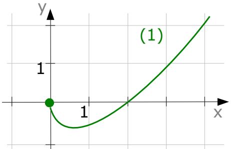


Abb. 1

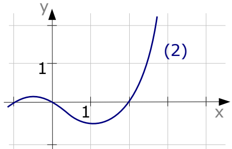


Abb. 2

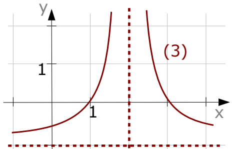


Abb. 3

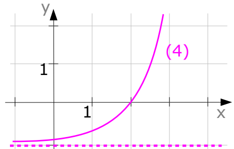


Abb. 4

[06] Ordnen Sie den drei Funktionen

$f(x)=(a\cdot x-b)^2-1$, $g(x)=\frac{x^2+c}{4+d\cdot x^2}$ und $h(x)=\ln(f-g\cdot x)$ ihre Schaubilder zu.

Bestimmen Sie die Parameter a, b, c, d, f und g!

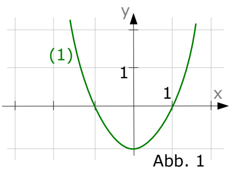


Abb. 1

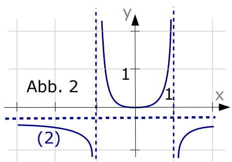


Abb. 2

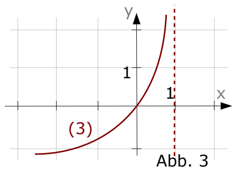


Abb. 3

## A.27.03 | Zusammenhang zwischen Funktion f(x) und Ableitung f'(x).

[01] Skizzieren Sie f'(x).

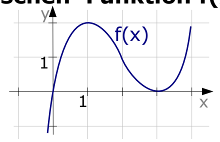
[02] Skizzieren Sie g'(x).

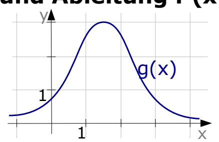
[03] Skizzieren Sie F(x).

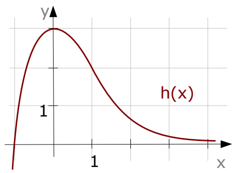
[04] Skizzieren Sie G(x).

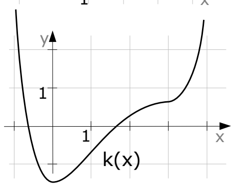
[05] Skizzieren Sie h'(x) und H(x).

[06] Skizzieren Sie k'(x) und K(x).



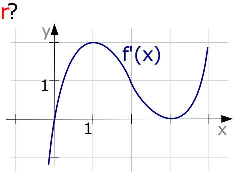




## A.27.04 | Aussagen über f(x) anhand des Schaubilds von f'(x)

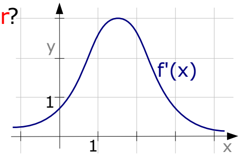
[01] Sind folgende Aussagen wahr, falsch oder unentscheidbar?

a) f(x) hat mindestens eine Nullstelle
b) f(x) hat zwei Wendepunkte
c) f(x) hat einen Sattelpunkt
d) f(x) ist für $x>0$ monoton
e) f(x) hat zwei Tangenten parallel zu $y=x+1$
f) f''(x) hat zwei Extrempunkte



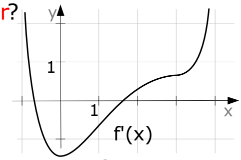

Die gute Seite an Mathe.

[02] Sind folgende Aussagen wahr, falsch oder unentscheidbar?



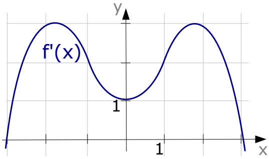

a) f(x) ist für x>0 positiv
b) f(x) hat mindestens einen Extrempunkt
c) f(x) hat zwei waagerechte Asymptoten
d) f(3) > f(-1)
e) f(x) hat zwei Tangenten parallel zu y=x+1
f) f''(x) ist punktsymmetrisch

[03] Sind folgende Aussagen wahr, falsch oder unentscheidbar?



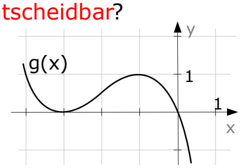

a) f(x) ist für x>0 positiv
b) f(x) ist für x>0 monoton
c) f(x) hat höchstens einen Extrempunkt
d) f(x) hat einen Tiefpunkt
e) f(x) besitzt eine Nullstelle
f) f(x) besitzt mindestens eine Tangente mit der Steigung von m=2.

[04] Sind folgende Aussagen wahr, falsch oder unentscheidbar?



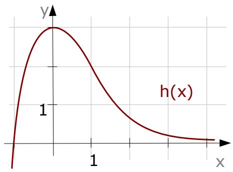

a) f(x) hat mindestens einen Extrempunkt
b) f(x) hat einen Wendepunkt in O(0|1)
c) f(x) ist symmetrisch
d) f''(x) hat drei Nullstellen
e) f(x) hat im Schnittpunkt mit der y-Achse eine Tangente parallel zur ersten Winkelhalbierenden.
f) f(-1)>f(2)

[05] Sind folgende Aussagen wahr, falsch oder unentscheidbar?




a) G(x) schneidet die x-Achse bei x=-3
b) g'(x) schneidet die x-Achse bei x=-3
c) G(x) hat zwei Wendepunkt
d) g'(x) hat höchstens einen Wendepunkt
e) G(x) hat bei x=0 einen Tiefpunkt.
f) g'(x) hat bei x=-2 einen Extrempunkt.

[06] Sind folgende Aussagen wahr, falsch oder unentscheidbar?




a) h'(1)>1
b) H(x) hat einen Extrempunkt
c) H(x) hat einen Hochpunkt
d) h'(x) hat mindestens eine Nullstelle
e) H(x) hat mindestens eine Nullstelle
f) H(2)>H(0)

# A.28 | Umkehrfunktionen

### A.28.01 | Bestimmung diverser Umkehrfunktionen

Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen folgender Funktionen:

[01] $f(x)=2x-4$ [02] $g(x)=x^2+5$ [03] $h(x)=\sqrt{1+0,5x}$ [04] $f(x)=e^{-2x}+2$

[05] $g(x)=\frac{1}{x}$ [06] $h(x)=\frac{x+2}{x-2}$ [07] $f(x)=x^2-2x-8$ [08] $g(x)=6\cdot\frac{e^x-1}{e^x+1}$

### A.28.02 | Zeichnung (Spiegelung an y=x)

Skizzieren Sie die Schaubilder der Funktionen sowie der Umkehrfunktionen von:

[01] $f(x)=2x-4$ [02] $g(x)=x^2+5$ [03] $h(x)=\sqrt{1+0,5x}$ [04] $f(x)=e^{-2x}+2$

[05] $g(x)=\frac{1}{x}$ [06] $h(x)=\frac{x+2}{x-2}$ [07] $f(x)=x^2-2x-8$ [08] $f(x)=e^{x^2-2}$

### A.28.03 | Definitions- und Wertemenge

Bestimmen Sie Definitions- und Wertemenge der Funktionen sowie der Umkehrfunktionen von:

[01] $f(x)=2x-4$ [02] $g(x)=x^2+5$ [03] $h(x)=\sqrt{1+0,5x}$ [04] $f(x)=e^{-2x}+2$

[05] $g(x)=\frac{1}{x}$ [06] $h(x)=\frac{x+2}{x-2}$ [07] $f(x)=x^2-2x-8$ [08] $f(x)=e^{x^2-2}$

### A.28.04 | Ableitungen von Umkehrfunktionen

[01] Gegeben ist $f(x)=x^3-2x-8$. Bestimmen Sie f(2). Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ bei x=-4.

[02] A(a|2) liegt auf der Umkehrfunktion von $f(x)=\frac{1}{4}\cdot(x+1)^3$. Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in A, ohne die Umkehrfunktion explizit zu bestimmen.

[03] Für x>0 ist f(x) gegeben mit $f(x)=x^4+3x^2$. Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von f(x) an der Stelle x=4.

[04] Sei $f(x)=x^3-2x^2+4x-5$. Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion von f(x) an der Stelle x=3.

[05] Zeigen Sie mit Hilfe der Umkehrfunktion, dass 1/x die Ableitung von ln(x) ist.

[06] Bestimmen Sie die Ableitung von f(x)=arctan(x).

### A.28.05 | Rotation um die y-Achse

[01] $f(x)=x^2-8$ rotiert innerhalb der Grenzen x=1 und x=3 um die y-Achse. Bestimmen Sie das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers.

[02] $g(x)=-(x-1)^2+4$ bildet mit den Koordinatenachsen im 2. Quadranten eine Fläche, welche um die y-Achse rotiert. Wie groß wird das Volumen?

[03] $h(x)=\sqrt{0,5x-1}$ bildet mit den x-Achse und der Gerade x=10 eine Fläche, welche um die y-Achse rotiert. Wie groß wird das Rotationsvolumen?

# A.29 | GTR-Anwendung

### A.29.01 | Regression mit GTR/CAS

[01] Welche Parabel dritter Ordnung enthält die Punkte A(2|4), B(1|4), C(4|80) und D(-1|-20) ?

[02] Eine Exponentialfunktion verläuft durch die Punkte A(-1|3,664), B(1|2,456)

und C(4|1,348). Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

[03] Hansi wirft einen Ball in die Luft, dessen Bahn durch eine quadratische Parabel angenähert werden kann. Welcher Funktionsgleichung muss er folgen, damit der den Fliegen in den Punkten $F_1(-2|8,4)$, $F_2(0|2)$, $F_3(1|7)$, $F_4(2|11,5)$ und $F_5(3|16)$ möglichst nahe kommt, um diese zu irritieren?

**A.29.02 | Aufgabe 1:**

Gegeben sind: $f(x) = e^{-x}-4e^{-0,5x}$, $g(x) = -(x-1)^3$, $h(x) =-0,5x^2+x$

[01] Die Funktion f(x) bildet mit der x-Achse und g(x) eine Fläche. Bestimme diesen Inhalt.

[02] f(x) bildet mit h(x) eine Fläche. Bestimme ihren Inhalt!

[03] Eine Tangente in P( 1 | f(1) ) an f(x) bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Bestimme dessen Inhalt.

[04] Die Gerade x=a schneidet f(x) im Punkt A und h(x) im Punkt B. Bestimme a so, dass die Strecke AB maximale Länge hat.

[05] Die Parallelen zur x-Achse und zur y-Achse durch Q( u | f(u) ) bilden für $-2\ln(4)<u<0$ mit den Koordinatenachsen ein Rechteck. Bestimme u so, dass diese Rechtecksfläche maximal wird.

[06] Die Parallelen zur x-Achse und zur y-Achse durch Q( u | f(u) ) bilden für $-2\ln(4)<u<0$ mit den Koordinatenachsen ein Rechteck. Bestimme u so, dass das Volumen des Rotationskörpers, der bei Drehung des Rechtecks um die x-Achse entsteht, maximal wird.

**A.29.03 | Aufgabe 2:** Gegeben sei: $f(x) = (x+1)e^{-0,2x}$

[01] Die x-Achse, die Funktion f(x) und die Tangente in A(2|f(2)) bilden eine Fläche. Bestimme diesen Inhalt.

[02] Untersuchen Sie f(x) auf Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte.

[03] Die Tangente in A an f(x) bildet mit der x-Achse und der Parallelen zur y-Achse durch den Hochpunkt eine Fläche, die um die x-Achse rotiert. Bestimmen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

[04] Hier gibt's keine Aufgabe.

[05] Die Ursprungsgerade durch den Hochpunkt von f(x) bildet mit f(x) eine Fläche. Bestimme ihren Inhalt.

[06] Die x-Achse, die Tangente im Hochpunkt, die Tangente im Punkt A und deren Parallele durch den Ursprung bilden ein Parallelogramm. Bestimme dessen Fläche.

**A.29.04 | Die „Krabbe Katrin"-Aufgabe.**

Ein Flussbett wird im Bereich $x \in [-3;5]$ durch die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{8}x^4-2$ beschrieben. [x und f(x) jeweils in Metern]. Der Wasserspiegel befindet sich in Höhe der x-Achse, oberhalb der x-Achse beschreibt die Funktion das Relief des anschließenden Ufers.

[01] Wie breit muss eine Brücke, die den Fluss überqueren soll, mindestens sein ?

[02] Wie tief ist der Fluss an seiner tiefsten Stelle ?

[03] Wieviel Wasser befindet sich sich pro km Länge im Fluss ?

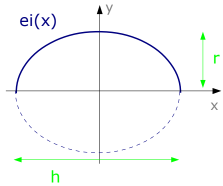
[04] Um wieviel Prozent nimmt diese Wassermenge ab, wenn der Wasserspiegel um 0,2m sinkt?

[05] Die Krabbe Katrin hockt am linken Flussufer K( ? | -0,2 ) und guckt sich ein bisschen die Unterwasserwelt an. Welches ist der tiefste Punkt P, auf den Katrin

schauen kann?

[06] Ein 12m hoher Baum, der im Punkt B( 0 | -2 ) verwurzelt ist [B liegt zwar unter Wasser, ist aber egal, es handelt sich um einen Wasserbaum], knickt beim Sturm im Punkt B um und lehnt an der rechten Uferböschung. Wie lang ist das Stück, das [beim Pegelstand von y=-0,2], aus dem Wasser ragt ?

### A.29.05 | Die „Hühner-Ei"-Aufgabe.




Der obere Umriss eines liegenden (Hühner)Eis lässt sich grob durch die Funktion $ei(x) = a \cdot \sqrt{b - 0{,}25x^2}$ beschreiben.

[01] Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass die Funktion ein Ei beschreibt, welches in aufrechter Position 5,6 cm hoch ist und einen Durchmesser von 4,48 cm hat.

[02] Wieviel wiegt das Ei, wenn man pro cm³ Volumen von ca. 1 Gramm Gewicht ausgehen kann ?

[03] In aufrechter Position befindet sich im oberen Teil des Eis Luft. Ab welcher Höhe endet das Eiweiss und beginnt die Luft, wenn das Ei ein tatsächliches Gewicht von nur 55Gramm hat ?

[04] Das Ei hat eine Schale von 1 mm Dicke. Bestimmen Sie diejenige Funktion, die den Innenrand der Schale beschreibt.

[05] Wieviel Prozent des gesamten Eivolumens macht die Schale aus ?

## A.30 | Wachstum

### A.30.01 | lineares Wachstum

[01] In einen Tümpel, der anfangs 200m³ dreckiges, stinkendes Wasser enthält, fließen täglich 4m³ sauberes, kristallklares Wasser dazu.
a) Wieviel Wasser enthält der See nach 50Tagen?
b) Wann enthält der See 1000m³ Wasser?
c) Wann ist nur noch 1% des Wassers dreckig?

[02] Ein Abiturient hat noch 120 Tage bis zur Prüfung und insgesamt noch 1000 Seiten zu lernen. Durchschnittlich schafft er 5 Seiten pro Tag.
a) Wieviel Prozent der Seiten wird er bis zur Prüfung schaffen?
b) Wann wäre er mit dem gesamten Lernstoff fertig?
c) Wieviel Seiten müsste er täglich bewältigen, damit er bis zum Prüfungstermin fertig wäre?

### A.30.02 | Lösung einfacher DGL

[01] Bestätigen Sie durch Rechnung, dass $f(x)=60+5e^{-0,2x}$ die Lösung der DGL $f'(x) = 0{,}2 \cdot [60 - f(x)]$ ist.

[02] Bestimmen Sie „k" so, dass die DGL $g(x)=-0{,}5 \cdot g'(x)$ durch die Funktion $g(x)=12 \cdot e^{k \cdot x}$ erfüllt wird.

[03] Bestimmen Sie die Parameter „a" und „b" so, dass $h(x)=3\sin(ax)+b$ die DGL $4h(x)+h''(x)=6$ erfüllt.

### A.30.03 | exponentielles Wachstum

[01] Heinrich hat normaler Weise einen Hormonspiegel von $6^{mg}/_{l}$. Als er Berta zum ersten Mal sieht schnellt der Hormonspiegel innerhalb 3 Minuten auf $9^{mg}/_{l}$ hoch. Wie hoch ist der Hormonspiegel nach einer Viertelstunde, wenn man von einer

Entwicklung gemäß: $h(t)=a\cdot e^{kt}$ ausgehen kann?

[02] Je nach Belüftungsart hat Gestank in einem Raum eine bestimmte Halbwertszeit, d.h. nach einer ganz bestimmten Zeit ist noch genau die Hälfte der „Stinkmoleküle" im Raum vorhanden. Wie groß ist die Halbwertszeit, wenn in einem Raum nach 48 min noch 12,5% des Anfangswertes vorhanden sind? Wann ist nur noch 1‰ der urspünglichen Menge vorhanden?

[03] Legt man Geld mit Zinseszins bei einer Bank an, vermehrt es sich exponentiell, also gemäß der Formel: $g(t)=a\cdot e^{kt}$ (t in Jahren, g(t) in €).

a) Bestimmen Sie a und k, wenn man einen Cent bei 5%Zinsen anlegt.

b) Wie lange müsste man warten, um Millionär zu sein?

c) Wieviel Geld hätte man, wenn man 1Ct vor 2000 Jahren angelegt hätte? Wieviel Gold wäre das bei einem Goldpreis von 42000€ je kg?

[04] In lebenden Organismen beträgt der Anteil des Kohlenstoffisotops C14 etwa ein Billionstel aller Kohlenstoffatome. In abgestorbenen Organismen zerfällt das C14-Isotop exponentiell. Nach 1000 Jahren sind noch ca. 0,886 Billionstel vorhanden.

a) Bestimmen Sie die Halbwertszeit von C14.

b) Wann ist noch ein Hundertstel der ursprünglichen Anfangsmenge vorhanden.

c) Welcher Anteil ist in einem 10.000 Jahre alten Fundstück vom Pyramidenbau noch übrig?

[05] Nach der Radiokarbon-Methode zerfällt das C14-Isotop in abgestorbenen Organismen mit einer Halbwertszeit von ca. 5730 Jahren.

a) Welcher Anteil ist nach 11.000 Jahren zerfallen?

b) Welcher Anteil zerfällt jährlich?

[06] Eine Flechte, die z.Z. eine Fläche von 6km² einnimmt, vermehrt sich durch geänderte Klimabedingungen um 10% monatlich. a) Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf. b) Wann wird die komplette Erdoberfläche bedeckt sein [Erdradius=6170km]?

### A.30.04 | exponentielles Wachstum mit DGL

[01] Auf einer Landstraße wurde im Jahr 1980 ein Verkehraufkommen von18 Fahrzeugen pro Stunde gemessen. Im Jahr 2010 wurden unter den gleichen Bedingungen bereits 360 Fahrzeuge gemessen. a) Geben Sie eine Funktionsgleichung an, mit welcher sich das Verkehrsaufkommen im Laufe der Jahre angeben lässt. b) Wie lautet die zugehörige Differenzialgleichung? c) Mit welchem Verkehrsaufkommen muss man im Jahre 2050 rechnen ?

[02] Ein Bienenvolk mit einer Population von 2400 Stück wird von einem Virus befallen, so dass wöchentlich 3% der Population wegstirbt. a) Geben Sie eine Differentialgleichung für den Populationsbestand an. b) Geben Sie eine Funktionsgleichung für den Populationsbestand an. c) Wann sind nur noch halb so viele Bienen wie anfangs vorhanden?

[03] Die Vermehrung einer Algenart im Pazifik kann näherungsweise durch die Differenzialgleichung: $a'(t)=0{,}05\cdot a(t)$ beschrieben werden (t in Monaten, a(t) in Tonnen).

a) Wie lautet die Funktiongleichung, wenn von anfangs von 500 Tonnen Algen ausgegangen wird?

b) Wieviel Algen sind nach 2 Jahren vorhanden? Wie groß ist die Verdopplungszeit dieses Wachstums?

[04] Laut Statistischem Bundesamt liegt die jährliche Inflation z.Z. bei ca. 2,5%.

a) Stellen Sie eine Differentialgleichung auf.

b) Wie teuer wäre demnach ein Laib Brot in 10 Jahren, der heute 2€ kostet?
c) Wann kostet das Brot 5€?

[05] Die Mehrheit der Bevölkerung meint, dass 10 Jahre nach Einführung des Euro Produkte das Gleiche in € kosten, wie früher in DM, so dass sich die Preise ca. verdoppelt hätten. Stellen Sie eine Funktions- und Differentialgleichung für ein Produkt auf, dass früher umgerechnet 1€ gekostet hat. Wie hoch wäre demnach die tatsächliche Inflation im Euroraum?

## A.30.05 | begrenztes (beschränktes) Wachstum

[01] Eine Kaffeetasse, die 50° warmen Kaffee enthält, kühlt sich im 20° warmen Zimmer innerhalb von 3 Minuten auf 40° ab.
a) Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung, die die Temperatur des Kaffees beschreibt.
b) Wann ist der Kaffee 25° warm?

[02] Eine Firma verkauft derzeit monatlich 40.000 Dosen eines bestimmten Kultgetränks. Es wird davon ausgegangen, dass langfristig ein Zehntel aller Personen unter 30 Jahren als Kunden gewonnen werden. Es gibt in Westeuropa ca. 50 Millionen Unterdreißigjähriger, die monatlich jeweils 20 dieser Dosen konsumieren könnten.
a) Wieviel Dosen könnte die Firma langfristig verkaufen?
b) Nach 3 Monaten verkauft die Firma bereits 100.000 wundervolle Dosen. Wann wird die Millionengrenze erreicht?
c) Wieviel verkauft die Firma nach 5 Jahren monatlich?

[03] Ein Maler schüttet in einen Wassereimer ein Pulver, welches sich anfangs am Boden absetzt. Nach 10 min haben sich 100 Gramm gelöst, die Lösung ist bei 600 Gramm gesättigt. Die Menge des aufgelösten Pulvers im Wasser, lässt sich durch die Gleichung $p(t)=G-a\cdot e^{-k\cdot t}$ beschreiben.
a) Geben Sie eine Gleichung von p(t) an.
b) Wann werden 90% der Maximalmenge gelöst sein?

[04] In einen Stausee fließen täglich 60m³ Wasser. Gleichzeitig verdunsten täglich 0,2% der sich im See befindenden Wassermenge. [siehe →A.30.06.04]
a) Welche Wassermenge wird sich langfristig im See einpendeln?
b) Wieviel Wasser befindet sich nach einem Monat im See, wenn er zu Beginn der Messung 12.000m³ enthält?
c) Wann ist der See zu 90% gefüllt?

[05] Ein Land mit 100 Millionen Einwohnern wird von Pest und Cholera befallen. Am Anfang der Messung ist eine Million Einwohner erkrankt. Vier Wochen später sind es bereits 48 Mio und acht Wochen nach Beginn sind es bereits 58 Mio betroffene Personen.
a) Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung.
b) Wieviel Prozent der Bevölkerung werden langfristig erkranken?

[06] Beim Wachstum einer Bakteriensorte ist die momentane Zunahme der Bakterien immer proportional zur Differenz zwischen Sättigungsgrenze und dem aktuellen Bestand. Geben Sie eine Funktion an, die die Bakterienanzahl beschreibt, wenn sich der Bestand innerhalb von 2 Stunden auf 6918 verdoppelt hat und der Proportionalitätsfaktor 0,1 beträgt.[siehe →A.30.06.06]

## A.30.06 | begrenztes Wachstum mit DGL

[01] Die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs lässt sich durch $v(t)=120-90\cdot e^{-2,5t}$ beschreiben (t in Stunden, v(t) in km/h).

a) Wann erreicht das Fahrzeug die Geschwindigkeit von 100km/h?
b) Bestimmen Sie eine Differenzialgleichung der Funktion.
c) Welche Geschwindigkeit wird sich langfristig einstellen?

[02] Ein Schüler, der sein Abitur vermasselt hat, muss seinem Onkel „preisgünstig" auf dem Bau helfen. Es ist heiß und er schwitzt. Der prozentuale Anteil der Flüssigkeitsmenge seines Körpers wird in etwa durch $f(t)=60-a\cdot e^{-0,4\cdot t}$ beschrieben (t in Stunden, f(t) in Prozent).

a) Zeigen Sie, dass das Wachstum von f(t) durch die Differenzialgleichung $f'(t)=0,4\cdot[60-f(t)]$ beschrieben wird.
b) Bestimmen Sie „a", wenn der Körpers anfangs zu 90% aus Wasser besteht.
c) Welcher prozentuale Wasseranteil wird sich langfristig einstellen?
d) Wann sind 75% erreicht?

[03] In eine Bäckerei kriechen jede Minute 20 Ameisen hinein, aber nur 4% der Ameisen kommen wieder hinaus.

a) Bestimmen Sie eine Differenzialgleichung für die Funktion, die die Ameisenmenge beschreibt.
b) Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung, wenn sich anfangs ca. 100 Ameisen im Raum befinden.
c) Wann ist die Hälfte der maximalen Ameisenmenge in der Bäckerei?

[04] In einen Stausee fließen täglich 60m³ Wasser. Gleichzeitig verdunsten täglich 0,2% der sich im See befindenden Wassermenge.

a) Bestimmen Sie eine Differentialgleichung für den Sachverhalt.
b) Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung für den Sachverhalt, wenn sich nach einem Jahr 21.326m³ Wasser im See befinden.
c) Um wieviel Wasser erhöht sich der Stauseeinhalt täglich, nachdem ein halbes Jahr vergangen ist?

[05] Karl beschließt eine Sekte zu gründen. Unmittelbar findet er 12 Anhänger. Im Laufe der Zeit treten monatlich 20 Personen der Sekte bei, 5% verlassen in dieser Zeit die Sekte wieder.

a) Bestimmen Sie eine DGL, die die Anzahl der Sektenmitglieder beschreibt.
b) Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung für die Sektenmitgliederzahl.
c) Um wieviel Personen vermehrt sich die Sekte im 24. Monat?
d) Wann ist die Hälfte der maximalen Mitgliederzahl erreicht?

[06] Beim Wachstum einer Bakteriensorte ist die momentane Änderungsrate proportional zur Differenz zwischen Sättigungsgrenze und dem aktuellen Bestand. Geben Sie eine Differential- und eine Funktionsgleichung an, die die Bakterienanzahl beschreibt, wenn sich der Bestand innerhalb von 2 Stunden auf 6918 verdoppelt hat und der Proportionalitätsfaktor 0,1 beträgt.

## A.30.07 | logistisches Wachstum

[01] Die Höhe einer Tanne wird durch $h(t)=\frac{2}{0,03+8e^{-0,1\cdot t}}$ beschrieben (t in Jahren, h in Meter).

a) Wie hoch ist die Tanne anfangs?
b) Wie groß ist die maximale Höhe, die die Tanne erreichen kann?
c) Wann erreicht die Tanne eine Höhe von 20m?

[02] Eine Firma verkauft monatlich 40.000 Dosen eines bestimmten Getränks. Nach 3 Monaten verkauft die Firma monatlich bereits 100.000 wundervolle

Dosen, langfristig wird mit einer Verkaufszahl von einer Million (monatlich) gerechnet.

a) Wann wird ein halbe Millionen Dosen monatlich verkauft?
b) Wieviel verkauft die Firma nach 5 Jahren monatlich?

**A.30.08 | logistisches Wachstum mit DGL**

[01] In einem Wald leben 50 Stinktiere, deren Wachstum sich durch die Differenzialgleichung $s'(t)=0{,}1\cdot s(t)\cdot[1200-s(t)]$ beschreiben lässt.

a) Schenken Sie den Stinktieren eine Funktionsgleichung, durch welche sich ihr Bestand beschreiben lässt.
b) Wann ist die Hälfte des maximalen Bestands erreicht?

[02] Südafrika hatte im Jahr 2010 ca. 50 Mio Einwohner. Davon waren ca. 6 Mio. mit dem HIV-Virus infiziert (!!), das entspricht einer Verdoppelung der Infizierten in den vergangenen 15 Jahren.

a) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für die Anzahl der Infizierten auf.
b) Welcher Differenzialgleichung gehorcht das Wachstum?
c) Wie hoch ist die maximale Infektionsrate?
d) Wieviel Infizierte wird es voraussichtlich im Jahr 2030 geben?
[Quelle: „Wikipedia" und „TAZ"]

## A.31 | Transferaufgaben

**A.31.01 | Bestandsänderungs** (die Änderung ist die Ableitung)

[01] Einer alten Dame fällt eine Geldbörse von einem Luxuskreuzer ins Meer und kommt mit $22\,{}^{m}/_{s}$ an der Wasseroberfläche auf. Im Wasser nimmt die Geschwindigkeit der guten, alten Geldbörse gemäß der Funktion $m(t)=\frac{-2}{\sqrt{1+t}}$ zu (t in Sekunden ab Aufprall, m(t) in ${}^{m}/_{s}$ je Sekunde [=Meter pro Quadratsekunde]). Hierbei bedeuten positive Funktionswerte von m(t) eine Geschwindigkeitszunahme und negative Funktionswerte eine Geschwindigkeitsabnahme.

a) Zu welchem Zeitpunkt ändert sich die Geschwindigkeit um $1\,{}^{m}/_{s}$ ?
b) Wie groß ist die Geschwindigkeit nach einer Viertelminute ?
c) Wie stark nimmt die Geschwindigkeit in den ersten 20 Sekunden ab ?
d) Wie groß ist die durchschnittliche Geschwindigkeitsabnahme von der 10. bis zur 20. Sekunde ?
e) Zu welchem Zeitpunkt beträgt die Geschwindigkeit der Geldbörse $5\,{}^{m}/_{s}$?
f) Existiert ein Zeitpunkt $t_1$, an welchem die Geldbörse im Wasser schwebt?
g) Existiert ein Zeitpunkt $t_2$, an welchem die Geldbörse mit unveränderter Geschwindigkeit sinkt?

[02] Eine junge Dame praktiziert Fallschirmspringen. Ihre Geschwindigkeit lässt sich dabei durch die Funktion: $a(t) = (3e^{-0{,}04t}-4)^2$ annähern.
(t in Sekunden, a(t) in Metern pro Sekunde).

a) Wie ändert sich die Geschwindigkeit nach 12 Sek.?
b) Wie groß ist die Geschwindigkeit nach einer Viertelminute ?
c) Wie stark nimmt die Geschwindigkeit in den ersten 20 Sekunden zu?
d) Wie groß ist die durchschnittliche Geschwindigkeitszunahme von der 10. bis zur 20. Sekunde ?
e) Zu welchem Zeitpunkt beträgt die Geschwindigkeit der Schnecke $9\,{}^{m}/_{s}$?
f) Welche Geschwindigkeit pendelt sich langfristig ein?

### A.31.02 | Funktionsanpassung

[01] Eine Schneekanone soll den Schnee 15 Meter weit werfen. Der Schnee tritt aus einer Höhe von 3 Metern unter einem Winkel von 21,8° aus. Die Wurfbahn jedes Objekts wird durch eine quadratische Parabel beschrieben. Bestimmen Sie eine Gleichung für die Flugbahn des Schnees.

[02] An einem Autobahnkreuz wird ein Verbindungsstück zwischen zwei Straßen geplant. Die eine Straße wird durch $y_1=x^2-3x+3$ beschrieben, die zweite Straße durch $y_2=-0{,}5x^2+x+1$. Das Verbindungsstück soll an der Stelle x=0 glatt in die erste Straße, an der Stelle x=2 glatt in die zweite Straße einmünden.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, die das Verbindungsstück beschreibt.

[03] Der Querschnitt eines 25m langen und 4m breiten Grabens kann durch die Fläche zwischen x-Achse und der Parabel $g(x)=ax^4+b$ beschrieben werden. Das ausgehobene Material soll insgesamt $64m^3$ umfassen. Wie tief wird der Graben?

### A.31.03 | Physikaufgaben

[01] Fritzchen schießt mit einer Steinschleuder einen Stein senkrecht hoch. Der Stein verlässt die Schleuder mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $50\,{}^{m}/_{s}$. Eine Sekunde später hat sich die Geschwindigkeit um $10\,{}^{m}/_{s}$ verringert.
a) Durch welche lineare Funktion kann die Geschwindigkeit beschrieben werden?
b) Wie hoch fliegt der Stein und wann trifft er wieder auf den Boden?

[02] Die Geschwindigkeit eines Testfahrzeugs wird durch $v(t)=-4t^2+32t$ beschrieben.
a) Bestimmen Sie den Zeitpunkt T, an welchem das Fahrzeug wieder hält.
b) Beschreiben Sie qualitativ die Bewegung des Fahrzeugs im Zeitraum $0<t<T$.
c) Welche Strecke legt das Fahrzeug im Zeitraum $0<t<T$ zurück?

[03] Die Flughöhe eines Drachenflieges kann in den ersten zwölf Minuten durch $h(t)=0{,}125t^3-1{,}5t^2+96$ beschrieben werden (t in Minuten, h in Meter).
a) Wie nah kommt der Drachen dem Boden?
b) Bestimmen Sie den Betrag der Vertikalgeschwindigkeit nach 3 Minuten.
c) Zu welchem Zeitpunkt ist die Höhenabnahme am stärksten? Wie groß ist diese?

## A.32 | Näherungslösungen

### A.32.01 | Taylorentwicklung

[01] Nähern Sie $f(x)=e^{2x-2}+2x$ durch ein Polynom 2.Grades an der Stelle $x_0=1$ an.

[02] Nähern Sie $f(x)=\frac{6}{2x+1}$ durch ein Polynom 3.Ordnung an der Stelle $x_0=0$ an.

[03] Nähern Sie $f(x)=\sqrt{6-x}$ durch ein Polynom 3.Ordnung an der Stelle $x_0=2$ an.

### A.32.02 | Newtonverfahren

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion mit einer Genauigkeit von drei Nachkommastellen.

[01], [02] $f(x) = x^3+x^2+2$

[03] $f(x) = -x^4+2x+1$

[04] $f(x) = e^{0,5x}+2x$

**A.32.03 | Intervallhalbierungsmethode**
Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion mit einer Genauigkeit von einer Nachkommastelle.
[01] $f(x) = x^3+x^2+2$ [02] $f(x) = e^{0,5x}+2x$

**A.32.04 ; A.32.05 ; A.32.06 |**
**Fläche über Keplersche Fassregel / Sehnen-Trapezregel / Simpson-Formel**
Bestimmen Sie näherungsweise die Fläche zwischen f(x) und der x-Achse im Intervall I.
[01] $f(x) = x^3-6x^2+9x-1$ im Intervall I=[0;2]
[02] $f(x) = \frac{5}{x^2+1}$ im Intervall I=[-3;3]
[03] $f(x) = x \cdot e^{-x}$ im Intervall I=[1;5]

# A.33 | Kostenfunktionen

**A.33.01 | Grundlagen** (Erlösfunktion und Gewinnfunktion)
[01] Paolo verkauft am Strand von Mallorca Melonen zum Preis von 2€. Die Kosten für die Beschaffung der leckeren Früchte werden durch die Funktion $K(x)=0,2x^3-1,2x^2+2x$ beschrieben (x in Melonen, k in €).
a) Geben Sie eine Funktion an, welche den Erlös (=Umsatz) von Paolo beschreibt.
b) Welchen Gewinn erzielt Paolo beim Verkauf von 3 Melonen?
c) Bei welchen Absatzmengen erzielt Paolo einen Gewinn?
[02] Ein gescheiterter Nachhilfelehrer verkauft Erotikartikel zum Preis von 16€ pro Stück. Er stellt fest, dass seine Kosten bei $K(x)=x^3-6x^2+12x+24$ liegen, wobei „x“ die Anzahl der verkauften Artikel und „K(x)“ die Kosten in Euro darstellen.
a) Geben Sie die zugehörige Gewinnfunktion an.
b) Weisen Sie nach, dass die Anzahl der verkauften Artikel besser nur zwischen 2 und 6 Stück liegen sollte.
c) Bei welcher Stückzahl ist der Gewinn am höchsten?
d) Wie hoch ist dieser Gewinn?
[03] Nachdem es zu viele Melonenverkäufer auf Mallorca gibt, verkauft Paolo nun Deodorant. Die Beschaffungskosten für seine Produkte steigen überproportional zur Menge an und lassen sich durch $K(x)=0,05 \cdot x^2$ beschreiben.
a) Wie muss Paolo den Preis für ein Deodorant festlegen, damit er bis zu einer Absatzmenge von 40 Stück keinen Verlust macht?
b) Wie hoch ist sein Gewinn an einem Tag, an welchem er Kosten in Höhe von 45€ hatte?
c) Wie hoch ist sein maximaler Gewinn?
d) Eines Tages verkauft Paolo 48 Stück. Wie viel Stück muss er am nächsten Tag verkaufen, um seinen Verlust exakt auszugleichen?

**A.33.02 | Mittelschwer, ein paar Begriffe**
(Fixkosten, Gewinnschwelle=Nutzenschwelle, Gewinngrenze=Nutzengrenze, Gewinnmaximum…)
[01] Nachdem man auf Mallorca weder mit Melonen noch mit Deodorant gute Geschäfte machen kann, beschließt Paolo batteriebetriebene singende und

tanzende Spielzeughühner zu verkaufen. Den Verkaufspreis für ein Exemplar legt er auf $p(x)=18-0{,}5\cdot x$ fest (x in Exemplaren, p(x) in €). Seine Kosten lassen sich durch $K(x)=0{,}5x^2-x+34$ (x in Exemplaren, K(x) in €) beschreiben.

a) Wie hoch sind Paolos Fixkosten?
b) Bestimmen Sie die Erlösfunktion für Paolos Geschäfte.
c) Bestimmen Sie die Gewinnzone für dieses Geschäftsmodell.

[02] Ein Unternehmen verkauft irgendwelche tollen Teile im Tausenderpack zum Preis von 52€. Die Kosten lassen sich durch $K(x)=ax^3-0{,}5x^2+2x+d$ beschreiben.

a) Bestimmen Sie die Kostenfunktion, wenn das Unternehmen keine Fixkosten hat und bis zu einer Menge von 25 Packungen verlustfrei arbeitet.
b) Bei welcher Absatzmenge wird das Gewinnmaximum erzielt? Wie hoch ist dieses?
c) Bei welchen Verkaufsmengen deckt der Erlös die Kosten?

## A.33.03 | Hässlich. Alle Fachbegriffe.

[01] Peter macht sich selbstständig und verkauft besonders edle Sportschuhe aus Spanien. Seine Kosten werden durch $K(x)=4x^3-32x^2+96x+120$ beschrieben (x in Exemplaren, K(x) in €). Als geborener Optimist rechnet er damit, bis zu einer Verkaufszahl von 12 Exemplaren pro Woche kostendeckend arbeiten zu können.

a) Bestimmen Sie den geplanten Einzelpreis für ein Paar Schuhe.
b) Welchen maximalen Gewinn könnte Peter wöchentlich abschöpfen?
c) Wie hoch sind die variablen Stückkosten bei einer Verkaufsmenge von 4 Exemplaren?
d) Bestimmen Sie das Betriebsoptimum.
e) Wie hoch sind Erlös und Betriebskosten beim Betriebsoptimum?

[02] Ein ganz tolles Unternehmen produziert Ware mit einen Verkaufspreis von 254€ pro Stück. Die variablen Stückkosten lassen sich durch $k_{var}(x)=x^2-6x+12$ beschreiben. Die Gewinnschwelle (=Nutzenschwelle) des Unternehmens liegt bei einer Absatzmenge von 4 Stück.

a) Bestimmen Sie die Kostenfunktion der Produktion.
b) Bestimmen Sie näherungsweise das Betriebsoptimum durch eine grafische Lösung.
c) Welchen minimalen Preis kann das Unternehmen für seine Produkte wählen, um langfristig verlustfrei zu arbeiten?

# *Ergebnisse*

[A.21.02]
[01] $A=2{,}88$ [02] $a=1{,}5 \quad b=2$ [03] $h\approx 1{,}145$
[04] $r=4 \quad h=4$ [05] $b=11{,}74$ [06] $r=0{,}317 \quad h=0{,}634$

[A.21.03]
[01] $u=3$ [02] $A_{max}=32$ [03] $u=1$
[04] $A_{\Delta}=13{,}5$ [05] $u=4$ [06] $k=2{,}25$

[A.21.04]
[01] $u=13$ [02] $u=\sqrt{8}$

[A.21.05]
[01] $u=\sqrt{8}$ [02] $u\approx 1{,}789$ [03] $u=\sqrt{8}$

[A.21.06]
[01] $a=-2$ [02] $z=0,\ d_{max}=14$ [03] $d_{min}=2$

[A.21.07], [A.21.08]
[01] $P(2|1)$ [02] $P_1(-4|-4),\ P_2(4|-4)$ [03] $P_1(0|0),\ P_2(4|0)$

[A.21.09]
[01] $P_1(0|-4),\ P_2(0|0),\ P_3(4|0),\ P_4(2|-6)$ [02] $u\approx 2{,}52$ [03] $u\approx 2{,}85$
[04] $t=0,\ TP(0|1)$ [05] $k=2$ [06] Beweis ...

[A.22.01]
[01] $B(2|-2)$ [02] $P(2|0)$ [03] $t_1=-1{,}5 \quad t_2=-17{,}5$
[04] $t\approx 9{,}23$ [05] $f(x)=0{,}5x^2-4$ [06] $f(x)=-0{,}125x^2-1{,}5$

[A.22.02], [A.22.03]
[01] $\alpha=78{,}7°$ [02] $\alpha=116{,}57°$ [03] $\alpha_1=\alpha_2=161{,}2°$
[04] $\alpha=63{,}4°$ [05] $\alpha=45°$ [06] $\alpha=90°$

[A.23.01]
[01] $f^*(x)=x^2-7x+6$ [02] $f^*(x)=x^3+3x^2+5x+4$
[03] $f^*(x)=x^2-3x+41$ [04] $f^*(x)=x^3+2x+1-2\pi$
[05] $f^*(x)=(x-1)^4$ [06] $f^*(x)=x^2+5x+10$

[A.23.02]
[01] $f^*(x)=2x^2-6x-8$ [02] $f^*(x)=-0{,}5x^3-x-0{,}5$
[03] $f^*(x)=0{,}25x^2-1{,}5x-4$ [04] $f^*(x)=-8x^3-4x+1$
[05] $f^*(x)=48x^4+9$ [06] $f^*(x)=-0{,}5x^2-x-6$

[A.23.03]
[01] $f^*(x)=x^2+3x-4$ [02] $f^*(x)=-x^3-2x-1$ [03] $f^*(x)=-x^4+5x^2-1$

[04] $f^*(x)=(-2x+3)^3$ [05] $f^*(x)=-1{,}7(4x-x^2)^3-2$ [06] $f^*(x)=x\cdot(x+1)^2$

[A.23.04], [A.23.05]

[01] $f^*(x)=x^3-6x^2+12x-3$ [02] $f^*(x)=-6-(2x+3)^3$ [03] $f^*(x)=-2(-4-x)^3-8x-30$

[04] $f^*(x)=x^2-9x+14$ [05] $f^*(x)=-x^3-2x+1$ [06] $f^*(x)=x^2+17x+72$

[A.24.01]

[01] A : $y=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x$ B : $y=1-(x-2)^2=...=-x^2+4x-3$

[02] C : $y=32x^2-56x+24$ D : $y_{1,2}=\pm\sqrt{x}$

[03] E : $y=5$ F : $x=-1$ G : $y=0$

[04] $y=-x^2-3x$ [05] $y=-5x^4+2x^2$

[06] $E_1\left(4t^2\middle|\frac{64}{3}t^5\right) \Rightarrow y_1=\pm\frac{64}{3}\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^5}$, $E_2\left(-4t^2\middle|-\frac{64}{3}t^5\right) \Rightarrow y_2=\pm\frac{64}{3}\sqrt{\left(-\frac{x}{4}\right)^5}$

[streng genommen handelt es sich bei $y_1$ und $y_2$ um die gleichen Kurven]

[A.24.02], [A.24.03]

[01] $g_t(x)$ kommt aus dem 3.Quadranten und geht in den 1.Quadranten
(andere Formulierung: für $x\to-\infty \Rightarrow g_t(x)\to-\infty$, für $x\to+\infty \Rightarrow g_t(x)\to+\infty$)
$g_t(x)$ hat im Ursprung einen Tiefpunkt
$g_t(x)$ hat einen Hochpunkt im 2.Quadranten
$g_t(x)$ hat eine Nullstelle im Ursprung und eine auf der negativen x-Achse
...

[02] Ortskurve der HP: $x=1$ Ortskurve der WP: $x=2$

[03] $t=2$ [04] $t=2$

[05] $h_t(x)$ kommt aus dem 3.Quadranten, geht durch den Ursprung in den ersten Quadranten, hat da einen Hochpunkt, läuft wieder runter zur x-Achse, wo sie in $N(4|0)$ eine dreifache Nullstelle hat (sie berührt die x-Achse also dort) und läuft schließlich im 4.Quadranten runter ins negative Unendliche.

[06] Ortskurve der HP: $y=x^2$ Ortskurve der WP: $y=2x^2$

[07] $t=3$ [08] $A=24t$

[A.25.02]

[01] $f(x)$ ist differenzierbar (damit auch stetig)

[02] $f(x)$ ist stetig, nicht differenzierbar

[03] $f_1(x)$ und $f_2(x)$ gehen nicht knickfrei in einander über

[04] $a=-2$ [05] $b=5$ $c=-8$ [06] $d=\frac{1}{8}$ $e=0$

[A.25.03]

[03] $f(x)$ ist stetig, aber nicht differenzierbar

[04] $f(x)$ ist nicht stetig und nicht differenzierbar

[A.26.01]

[01] $x\leq3$ [02] $x<3$ [03] $x>0$

[04] $x\geq1$ [05] $x\in\mathbb{R}$ [06] $L=\{\ \}$

[A.26.02]

[01] $-1\leq x\leq5$ [02] $x\leq-3$ oder $x\geq0$ [03] $x<1$ oder $x>3$

[04] $x<0$ oder $x>0{,}5$ [05] $x\leq-2$ oder $x\geq3$ [03] keine Lösung

[A.26.03]

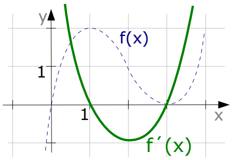
[01] $-1 \leq x \leq 2$ oder $x > 5$ [02] $x \geq 6$ [03] keine Lös.
[04] $0 \leq x \leq 1$ oder $x \geq 3$ [05] $x > -2$ [06] $-2 \leq x \leq -1$ oder $1 \leq x \leq 2$

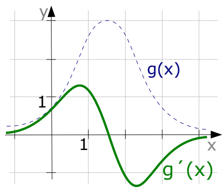
[A.26.04]
[01] $x < 0$ oder $1 \leq x \leq 2$ [02] $-1{,}5 < x \leq 1$ oder $x > 3$ [03] $-5 < x \leq 1$ oder $x > 5$

[A.27.02]

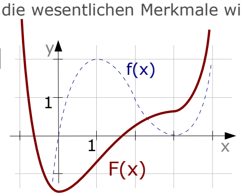
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| [01] | $f(x) \hat{=} (1)$ | $g(x) \hat{=} (2)$ | $h(x) \hat{=} (3)$ | |
| [02] | $f(x) \hat{=} (3)$ | $g(x) \hat{=} (1)$ | $h(x) \hat{=} (2)$ | |
| [03] | $f(x) \hat{=} (3)$ | $g(x) \hat{=} (1)$ | $h(x) \hat{=} (2)$ | $a=3$, $b=3$, $c=2\pi/3$ |
| [04] | $f(x) \hat{=} (3)$ | $h(x) \hat{=} (2)$ | $i(x) \hat{=} (1)$ | $a=1$, $c=3$, $d=1$, $k=0$ |
| [05] | $f(x) \hat{=} (2)$ | $g(x) \hat{=} (4)$ | $h(x) \hat{=} (1)$ | $a=1$, $b=-1$, $c=2$ |
| [06] | $f(x) \hat{=} (1)$ | $g(x) \hat{=} (2)$ | $h(x) \hat{=} (3)$ | $a=\pm 1$, $b=0$, $c=0$, $d=-4$, $f=1$, $g=1$ |

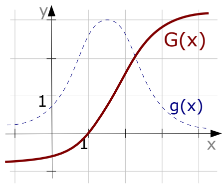
[A.27.03]

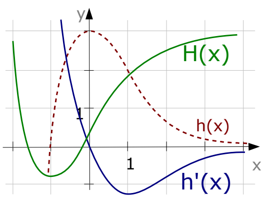
[01]


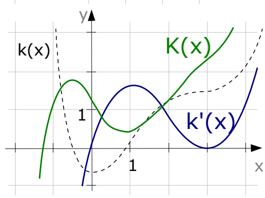

[02]



[beachten Sie bitte, dass Schaubilder von Ableitungsfunktionen immer ungenau werden. Entscheidend sind die wesentlichen Merkmale wie Nullstellen, Hoch-, Tiefpunkte, ..]

[03]



[04]



[05]



[06]



[beachten Sie bitte, dass Schaubilder von Stammfunktionen immer ungenau werden. Entscheidend sind die wesentlichen Merkmale wie Hoch-, Tief- und Wendepunkte, .. Desweiteren kann das Schaubild einer Stammfunktion beliebig hoch oder runter geschoben werden.]

[A.27.04]
[01] a) unentscheidbar b) wahr c) wahr
d) wahr e) falsch f) falsch
[02] a) unentscheidbar b) unentscheidbar c) wahr
d) wahr e) wahr f) wahr
[03] a) unentscheidbar b) falsch c) falsch

d) wahr e) wahr f) wahr

[04] a) wahr b) unentscheidbar c) wahr

d) wahr e) wahr f) falsch

[05] a) unentscheidbar b) wahr c) wahr

d) wahr e) falsch f) wahr

[06] a) falsch b) wahr c) falsch

d) wahr e) unentscheidbar f) wahr

[A.28.01]

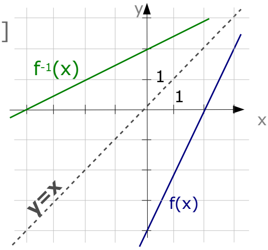
[01] $\overline{y}=0{,}5\overline{x}+2$ [02] $\overline{y}_{1,2}=\pm\sqrt{\overline{x}-5}$ [03] $\overline{y}=2\overline{x}^2-2$

[04] $\overline{y}=-\frac{1}{2}\cdot\ln(\overline{x}-2)$ [05] $\overline{y}=\dfrac{1}{\overline{x}}$ [06] $\overline{y}=\dfrac{2\overline{x}+2}{\overline{x}-4}$

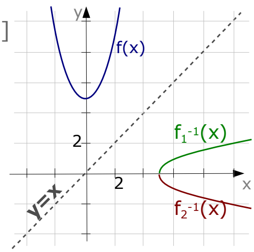
[07] $\overline{y}_{1,2}=1\pm\sqrt{9+\overline{x}}$ bzw. $\overline{y}_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{36+4\overline{x}}}{2}$ [08] $\overline{y}=\ln\left(\dfrac{6+\overline{x}}{6-\overline{x}}\right)$

[A.28.02]

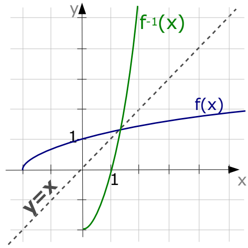
[1]



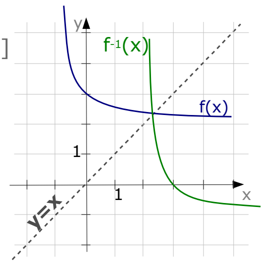

[2]



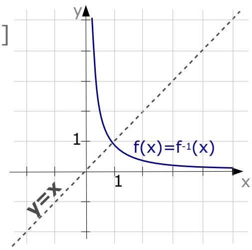

[3]



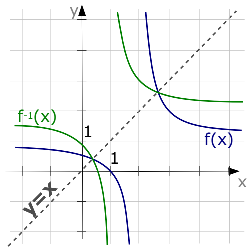

[4]



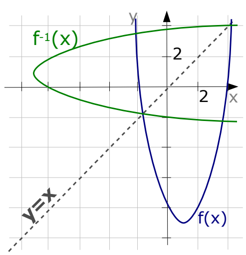

[5]



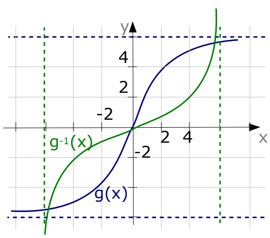

[6]




[7]




[8]




[A.28.03]

[01] f: **D**=ℝ **W**=ℝ $f^{-1}$: **D**=ℝ **W**=ℝ

[02] g: $\mathbf{D}=\mathbb{R}$ $\mathbf{W}=[-5;\infty[$ $g^{-1}$: $\mathbf{D}=[-5;\infty[$ $\mathbf{W}=\mathbb{R}$
[03] h: $\mathbf{D}=[-2;\infty[$ $\mathbf{W}=[0;\infty[$ $h^{-1}$: $\mathbf{D}=[-2;\infty[$ $\mathbf{W}=[0;\infty[$
[04] f: $\mathbf{D}=\mathbb{R}$ $\mathbf{W}=[2;\infty[$ $f^{-1}$: $\mathbf{D}=[2;\infty[$ $\mathbf{W}=\mathbb{R}$
[05] g: $\mathbf{D}=\mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\mathbf{W}=\mathbb{R}\backslash\{0\}$ $g^{-1}$: $\mathbf{D}=\mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\mathbf{W}=\mathbb{R}\backslash\{0\}$
[06] h: $\mathbf{D}=\mathbb{R}\backslash\{2\}$ $\mathbf{W}=\mathbb{R}\backslash\{1\}$ $h^{-1}$: $\mathbf{D}=\mathbb{R}\backslash\{1\}$ $\mathbf{W}=\mathbb{R}\backslash\{2\}$
[07] f: $\mathbf{D}=\mathbb{R}$ $\mathbf{W}=[-9;\infty[$ $f^{-1}$: $\mathbf{D}=[-9;\infty[$ $\mathbf{W}=\mathbb{R}$
[08] g: $\mathbf{D}=\mathbb{R}$ $\mathbf{W}=]-6;6[$ $g^{-1}$: $\mathbf{D}=]-6;6[$ $\mathbf{W}=\mathbb{R}$

[A.28.04]
[01] $\bar{f}'(-4)=0,1$ [02] $\bar{f}'(2)=\frac{1}{3}$ [03] $\bar{f}'(4)=0,1$
[04] $\bar{f}'(3)=\frac{1}{8}$ [05] Beweis... [06] Beweis...

[A.28.05]
[01] $V=40\pi$ [02] $V=\frac{7}{6}\pi$ [03] $V=\frac{824}{15}\pi\approx 172,58$

[A.29.01]
[01] $y=4x^3-14x^2+10x+8$ [02] $y=3e^{-0,2x}$ bzw. $y=3\cdot 0,819^x$
[03] $y=-0,121x^2+4,013x+7,031$

[A.29.02]
[01] A=12,958 [02] A=9,41 [03] A=4,987
[04] a=0 [05] u=-1,967 [06] u=-1,728

[A.29.03]
[01] A=3,823 [02] N(-1|0), H(4|2,247), T--
[03] V=64,564 [05] A=4,056 [06] A=12,367

[A.29.04]
[01] b=5,647 [02] $y_T=5,375$ [03] V=16812
[03] um 6,7% [05] S(3,508|-4,654) [06] d=10,034

[A.29.05]
[01] $ei(x)=1,6\sqrt{1,96-0,25x^2}$ [02] G=58,849 [03] h=4,726
[04] $ei(x)=1,585\sqrt{1,8225-0,25x^2}$ [05] 12,08%

[A.30.01]
[01] a) B(50)=400 b) t=200 c) t=4950
[02] a) 60% b) t=200 c) 8,33

[A.30.03]
[01] h(15)=45,46 [02] t=159,45
[03] a) $h(t)=0,01\cdot e^{0,04879\cdot t}$ b) t=377,56 Jahre c) $2,39\cdot 10^{40}$€.
[04] a) $t_H\approx 5728$ Jahre b) 38059 Jahre c) 29,8%
[05] a) 73,6% b) 0,0121%
[06] a) $6\cdot e^{0,0953\cdot t}$ b) t=190,9

[A.30.04]

[01] a) $f(t)=18\cdot e^{0,1\cdot t}$ b) $f'(t)=0,1\cdot f(t)$ c) 19.739 Fahrzeuge
[02] a) $f'(t)=-0,03\cdot f(t)$ b) $f(t)=2400\cdot e^{-0,03\cdot t}$ c) $t_H\approx 23,1$
[03] a) $a(t)=500\cdot e^{0,05\cdot t}$ b) $a(24)\approx 1660$ Tonnen c) $t_H\approx 13,86$ Monate
[04] a) $p'(t)=0,025\cdot p(t)$ b) $p(10)=2,57$ € c) $t\approx 36,6$ Jahre
[05] a) $p(t)=1\cdot e^{0,0693\cdot t}$, $p'(t)=0,0693\cdot p(t)$ b) 7,1%
[06] a) $f(x)=100\%\cdot e^{-0,533\cdot x}$ [oder $f(x)=a\cdot e^{-0,533\cdot x}$] $f'(x)=-0,533\cdot f(x)$
b) $x\approx 8,64$cm c) $x\approx 4,4$cm

[A.30.05]
[01] a) $T(t)=20+30\cdot e^{-0,135\cdot t}$ b) t=13,26 min
[02] a) 100 Mio Dosen b) t=48,2 Monate c) 4,72 Mio Dosen
[03] a) $p(t)=600-600\cdot e^{-0,01823\cdot t}$ b) t=126,3 min
[04] a) G=30000 b) $f(30)\approx 13048$ c) $t\approx 896$ Tage
[05] a) $f(t)\approx 60,72-59,72\cdot e^{-0,387\cdot t}$ b) 60,72%
[06] a) $f(t)\approx 22541-19082\cdot e^{-0,1\cdot t}$

[A.30.06]
[01] a) $t\approx 0,6h=36min$ b) $v'(t)=2,5\cdot(120-v(t))$ c) G=120
[02] b) a=-30 c) G=60 d) t=1,73h
[03] a) $a'(t)=20-0,04\cdot a(t)$ bzw. $a'(t)=0,04\cdot(500-a(t))$
b) $a(t) = 500-400\cdot e^{0,04t}$ c) t=11,75 min
[04] a) $f'(t)=0,002\cdot[30.000-f(t)]$ b) $f(t)=30.000-18.000\cdot e^{-0,002\cdot t}$ c) 25m³
[05] a) $f'(t)=0,05\cdot[400-f(t)]$ b) $f(t)=400-388\cdot e^{-0,05t}$
c) $f'(24)\approx 5,8$ d) $t\approx 13,25$
[06] $f(t)=22.569-19.110\cdot e^{-0,1t}$ $f'(t)=0,1\cdot[22.569-f(t)]$

[A.30.07]
[01] a) $h(0)\approx 24,9$cm b) $h_{max}\approx 66,67$m c) $t\approx 47,38$Jahre
[02] $f(t)=\frac{40000}{40+960\cdot e^{-0,000327\cdot t}}$ a) $t\approx 9,72$ b) $f(60)\approx 999,99$

[A.30.08]
[01] a) $f(t)=\frac{60000}{50+1150\cdot e^{-0,12\cdot t}}$ b) $t\approx 26,13$ Jahre
[02] a) $f(t)=\frac{300}{6+44\cdot e^{-0,05\cdot t}}$ b) $f'(t)=0,001\cdot f(t)\cdot[50-f(t)]$
c) 0,625 $^{Mio}/_{Jahr}$ d) $f(20)\approx 13,5$

[A.31.01]
[01] $v(t)=-4\sqrt{t+1}+26$ a) t=3 b) v(15)=10
c) $\Delta v=14,33$ d) 0,506 e) $t\approx 26,56$
f) t=41,25s g) nein
[02] $a'(t)=-0,24e^{-0,04t}\cdot(3e^{-0,0t}-4)$ a) 0,312 b) a(15)=5,539
c) $\Delta a=6,033$ d) 0,308 e) t=27,465 f) 16

[A.31.02]
[01] $f(t)=-0,04\cdot t^2+0,4\cdot t+3$
[02] $f(x)=-05x^3+2x^2-3x+3$
[03] $g(x)=0,05\cdot x^2-0,8$
Tiefe=0,8m

[A.31.03]
[01] a) $v(t)=-10t+50$ b) $s(t)=-5t^2+50t$ $h_{max}=125m$, $t_{flug}=10sec$
[02] a) t=8sec
b) Das Fahrzeug wird immer schneller, nach 4 Sekunden ist die Geschwindigkeit maximal, danach wird es wieder langsamer und steht nach 8Sekunden.
c) Die Strecke ist 341,33m lang.
[03] a) $h_{min}=64m$ b) $v(3)=5{,}625\,{}^{m}/_{min}$ [abwärts]
c) t=4min, $h'(4)=6\,{}^{m}/_{min}$ [abwärts]

[A.32.01]
[01] $f(x)\approx 2x^2+1$ [02] $f(x)\approx -48x^3+24x^2-12x+6$
[03] $f(x)\approx 2-\frac{1}{4}(x-2)-\frac{1}{64}(x-2)^2-\frac{1}{512}(x-2)^3 =\ldots= -\frac{1}{512}x^3-\frac{1}{256}x^2-\frac{27}{128}x+\frac{165}{64}$

[A.32.02]
[01], [02] $x\approx -1{,}696$ [03] $x\approx 1{,}395$ [04] $x\approx -0{,}4078$

[A.32.03]
[01] $x\approx -1{,}69$ [02] $x\approx -0{,}41$

[A.32.04], [A.32.05], [A.32.06]
[01] $A\approx 4$ [02] $A\approx 21$ [03] $A\approx 0{,}665$

[A.33.01]
[01] a) $E(x)=2x$ b) $G(3)=5{,}40€$ c) $0\leqslant x\leqslant 6$
[02] a) $G(x)=-x^3+6x^2+4x-24$ b) Gewinn ist positiv zwischen x=2 und x=6
c) $x=4{,}31\approx 4$ d) $G(4)=24€$
[03] a) p=2 b) $G(30)=15€$ c) $G(20)=20€$
d) x=16 oder x=24

[A.33.02]
[01] $G(x)=-x^2+19x-34$ a) $K(0)=34$ b) $E(x)=18x-0{,}5x^2$
c) Gewinnzone: $2\leqslant x\leqslant 17$
[02] a) $K(x)=0{,}1x^3-0{,}5x^2+2x$ b) x=14,68 $G_{max}=525{,}39€$ c) $x\leqslant 25$

[A.33.03]
[01] a) p=298 b) Max von 1507,7€ bei x=7,56
c) $k_{var}(4)=32€$ d) $x\approx 4{,}68$
e) $x=4{,}68 \Rightarrow E=1395{,}8$ K=278,4
[02] a) $K(x)=x^3-6x^2+12x+1000$ b) $x\approx 9$ (starke Abweichungen möglich)
c) $p\approx 150$


**Damit die Mathe-Seite.de kostenlos bleiben kann, braucht sie deine Hilfe!**

**facebook.com/matheseite**

**Bitte empfiehl die Mathe-Seite deinen Freunden.**

**h[x]=**
MatheSeite





matheseite
Die gute Seite an Mathe.