

A.12 Nullstellen / Gleichungen lösen

Es gibt nur eine Hand voll Standardverfahren, nach denen man vorgehen kann, um Gleichungen zu lösen.

- Man sollte in der Gleichung keine Brüche haben. Falls daher Nenner existieren [die ein „x“ enthalten], sollte man **mit allen Nennern multiplizieren**.
- Um eine Gleichung nach „x“ aufzulösen, bringt man immer **alles auf eine Seite**, so dass auf der anderen Seite nur noch Null steht.
[siehe →Kap.A.12.01]

Ist die Gleichung nun so auf Normalform gebracht, gibt es nur vier Möglichkeiten, nach denen man vorgehen kann, um die Gleichung zu lösen:

- **Ausklammern** [→Kap.A.12.03]
Alles was sich irgendwie ausklammern lässt, klammert man aus: „x“, „x²“, „sin(x)“, „e^x“, ...
- **Mitternachtsformel** [→Kap.A.12.04+Kap.A.12.05]
(entweder p-q-Formel oder a-b-c-Formel)
- **Substitution** („x²=u“, ...) [→Kap.A.12.06]
- **Polynomdivision** [oder **Horner-Schema**]
Kann man eine Gleichung nicht durch Ausklammern, Mitternachtsformel oder Substitution lösen, bleibt eigentlich nur Polynomdivision [oder Horner-Schema] übrig.
[Das Horner-Schema ist nur eine leichte Abwandlung der Polynomdivision. Es ist daher völlig egal, welches der beiden man anwendet. (Polynomdivision ist zur Zeit allerdings gängiger.)]
Polynomdivision [bzw. auch Horner-Schema] verliert in den Prüfungen derzeit ein bisschen an Bedeutung.

Vorbereitung der Gleichung:

- *Mit allen Nennern multiplizieren*
- *Alle Klammern auflösen*
- *Alles auf eine Seite bringen (Null setzen)*

Lösungsverfahren:

- **Ausklammern**
- **p-q-Formel** bzw. **a-b-c-Formel**
- **Substitution**
- **Polynomdivision** (oder **Horner-Schema**)

verwandte Themen:

- Kap. A.41.01
- Kap. A.42.03
- Kap. A.43.01
- Kap. A.44.05
- Kap. A.55.05

A.12.01 Auf Form bringen

Auf den letzten Seiten haben wir immer Gleichungen betrachtet, die die Form: „blablah = 0“ hatten. Was aber, wenn das nicht der Fall ist?

Betrachten wir z.B. die Gleichungen:

$$1. (x-1)(x+3)+(x+1)(x+2) = 7-x$$

$$2. \frac{x}{x-4} + 2 = \frac{3x-4}{x}$$

$$3. \frac{x-1,5}{x-5} + \frac{x-7}{2x+10} = \frac{x^2+3x-2}{x^2-25}$$

Gleichungen muss man auf Normalform bringen:

- **Mit allen Nennern multiplizieren**
- **Alle Klammern auflösen**
- **Alles auf eine Seite bringen (Null setzen)**

Bevor man bei diesen Gleichungen mit den Standardverfahren [Ausklammern, Mitternachtsformel, Substitution, Polynomdivision] ansetzt, müssen die erst einmal eine vernünftige Form haben. Die Nenner müssen also weg, die Klammern müssen aufgelöst werden, alles muss auf eine Seite gebracht werden.

Aufgabe 1

Lösen Sie die Gleichung:

$$(x-1)(x+3)+(x+1)(x+2) = 7-x$$

Aufgabe 2

Lösen Sie die Gleichung: $\frac{x}{x-4} + 2 = \frac{3x-4}{x}$

Aufgabe 3

Lösen Sie die Gleichung: $\frac{x-1,5}{x-5} + \frac{x-7}{2x+10} = \frac{x^2+3x-2}{x^2-25}$

Lösung von Aufgabe 1:

Es gibt keine Nenner, wir lösen die Klammern auf.

$$(x-1)(x+3)+(x+1)(x+2) = 7-x \quad | \text{ ausmultiplizieren}$$

$$x^2-x+3x-3 + x^2+x+2x+2 = 7-x \quad | \text{ zusammenfassen}$$

$$2x^2+5x-1 = 7-x \quad | -7+x$$

$$2x^2+6x-8 = 0$$

[Ab jetzt haben wir die Gleichung in eine Standardform gebracht.

Der nächste Schritt wäre a-b-c-Formel bzw. p-q-Formel.

Falls Sie den Rest der Lösung sehen möchten: →Aufgabe 9]

Lösung von Aufgabe 2:

[Da hier zwei Nenner vorhanden sind, haben wir es mit einer „Bruchgleichung“ zu tun. Das ist aber nicht weiter interessant.]

$$\frac{x}{x-4} + 2 = \frac{3x-4}{x} \quad | \cdot (x-4) \cdot x \quad \leftarrow$$

$$x \cdot x + 2 \cdot (x-4) \cdot x = (3x-4) \cdot (x-4)$$

$$x^2 + 2x^2 - 8x = 3x^2 - 12x - 4x + 16$$

Wir multiplizieren zuerst mit beiden Nennern, im zweiten Schritt lösen wir die Klammern auf, im letzten Schritt bringen wir alles nach links.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 8x &= 3x^2 - 16x + 16 && | -3x^2 + 16x \\ + 8x &= 16 && |:8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Danach haben wir eine Gleichung in „Normalform“, da beginnt das Schema „Ausklammern-Mitternachtsformel-Substitution-Polynomdivision“.

Lösung von Aufgabe 3:

$$\begin{aligned} \frac{x-1,5}{x-5} + \frac{x-7}{2x+10} &= \frac{x^2+3x-2}{x^2-25} && | \text{ unten ausklammern} \\ \frac{x-1,5}{x-5} + \frac{x-7}{2(x+5)} &= \frac{x^2+3x-2}{x^2-25} && | \text{ binomische Formeln} \\ \frac{x-1,5}{x-5} + \frac{x-7}{2(x+5)} &= \frac{x^2+3x-2}{(x-5)(x+5)} \end{aligned}$$

Bevor wir mit den Nennern multiplizieren, machen wir einen kleinen Trick: wir klammern in allen Nennern aus und wenden auch überall binomische Formeln an. Danach multiplizieren wir mit allen Klammern der Nenner, lösen alle übrigen Klammern auf, im letzten Schritt bringen wir alles nach links. Danach haben wir eine Gleichung in „Normalform“, da beginnt das Schema „Ausklammern-Mitternachtsformel-Substitution-Polynomdivision“.

[Ab hier könnte man auch die Definitionsmenge festlegen. Sämtliche Klammern von unten werden Null bei $x=5$ und $x=-5$. Die Definitionsmenge ist also: $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 5\}$]

$$\begin{aligned} \frac{x-1,5}{x-5} + \frac{x-7}{2(x+5)} &= \frac{x^2+3x-2}{(x-5)(x+5)} && | \cdot 2 \cdot (x+5) \cdot (x-5) \\ \frac{(x-1,5) \cdot 2 \cdot (x-5) \cdot (x+5)}{x-5} + \frac{(x-7) \cdot 2 \cdot (x-5) \cdot (x+5)}{2 \cdot (x+5)} &= \frac{(x^2+3x-2) \cdot 2 \cdot (x-5) \cdot (x+5)}{(x-5)(x+5)} \\ (x-1,5) \cdot 2 \cdot (x+5) + (x-7) \cdot (x-5) &= (x^2+3x-2) \cdot 2 \\ (2x-3) \cdot (x+5) + x^2-7x-5x+35 &= 2x^2+6x-4 \\ 2x^2-3x+10x-15 + x^2-12x+35 &= 2x^2+6x-4 \\ 3x^2-5x+20 &= 2x^2+6x-4 && | -2x^2-6x+4 \\ x^2-11x+24 &= 0 \end{aligned}$$

Zwischen Tulpen und Narzissen ließ ich mich einst von dir küssen. Davon hab ich jetzt genug, denn du hattest Mundgeruch!



[p-q-Formel bzw. a-b-c-Formel anwenden]

$$x_1=3 \quad x_2=8$$

A.12.02 Nullstellen von der ganz billigen Sorte

Aufgabe 4 (Eine lineare Gleichung)
Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden $g_1 : y=3x+4$ mit der Geraden $g_2 : y=-2x-6$.

Aufgabe 5 (Eine einfache Bruchgleichung)
Lösen Sie die Gleichung: $\frac{6}{2-x^2} = -3$.

Lösung von Aufgabe 4:

Man setzt beide Geraden gleich

$$\begin{array}{lcl} g_1 = g_2 & & \\ 3x+4 = -2x-6 & | +2x-4 & \text{alles mit „x“ auf eine Seite, alles ohne „x“ auf die andere.} \\ 5x = -10 & | : 5 & \\ x = -2 & & \end{array}$$

Für den Schnittpunkt braucht man noch den y-Wert, daher setzt man den x-Wert in eine der beiden Geraden ein:

$$x=-2 \text{ in } g_1 \Rightarrow y = 3 \cdot (-2) + 4 = -6 + 4 = -2 \quad \Rightarrow \quad \text{Schnittpunkt } \underline{S(-2 \mid -2)}$$

Theoretisch sollte jede(r) diese Rechenmethode seit der 8. Klasse beherrschen. Es gibt also kein zweites Beispiel dazu.

Eine ähnliche Vorgehensweise wie bei Aufgabe 4 kann man bei jeder Gleichung anwenden, in der der Buchstabe „x“ nur ein einziges Mal vorkommt. Auch wenn es keine lineare Gleichung ist!

Lösung von Aufgabe 5:

$$\begin{array}{lcl} \frac{6}{2-x^2} = -3 & | \cdot (2-x^2) & \text{der Nenner muss weg} \\ 6 = -3 \cdot (2-x^2) & & \\ 6 = -6 + 3x^2 & | + 6 & | : 3 \\ 4 = x^2 & | \pm \sqrt{\quad} & \\ \pm 2 = x & \Rightarrow & \underline{x_1 = -2 \quad x_2 = 2} \end{array}$$

A.12.03 Nullstellen-Findung durch Ausklammern

Bei vielen Gleichungen, kann man x oder x^2 ausklammern.

[Ist allerdings nur sinnvoll, wenn auf der anderen Seite „0“ steht.]

Nun setzt man das Ausgeklammerte Null *und* den Term im Inneren der Klammer Null. So erhält man aus einer komplizierten Gleichung zwei etwas einfachere Gleichungen. Dieses Vorgehen ist auch als „Satz vom Nullprodukt“ bekannt.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f mit: $f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 24x$.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $g(x) = 0,5x^4 - 3,5x^3 + 5x^2$.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung: $x \cdot (x^2 + 5) - 3 \cdot (x^2 + 5) = 0$.

Lösung von Aufgabe 6:

$$3x^3 - 6x^2 - 24x = 0$$

3x lässt sich ausklammern

$$3x(x^2 - 2x - 8) = 0$$

beide Faktoren müssen 0 gesetzt werden.
(Getrennt ausrechnen!)

$$3x = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \quad (1)$$

(p-q-Formel)

(a-b-c-Formel)

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1^2 - (-8)}$$

$$x_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

$$= 1 \pm \sqrt{9}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$= 1 \pm 3$$

$$= \frac{2 \pm 6}{2}$$

⇒

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = 4$$

⇒

⇒

Klammer ich ein x schnell aus, sieht die Rechnungen netter aus.



$$\underline{N_1(0 \mid 0)}$$

$$\underline{N_2(-2 \mid 0)}$$

$$\underline{N_3(4 \mid 0)}$$

Lösung von Aufgabe 7:

$$0,5x^4 - 3,5x^3 + 5x^2 = 0$$

x^2 lässt sich ausklammern

$$x^2 \cdot (0,5x^2 - 3,5x + 5) = 0$$

beide Faktoren müssen 0 gesetzt werden.
(Getrennt ausrechnen!)

$$x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = 0$$

$$0,5x^2 - 3,5x + 5 = 0$$

(p-q-Formel)

(a-b-c-Formel)

$$0,5x^2 - 3,5x + 5 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$0,5x^2 - 3,5x + 5 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x_{3,4} = \frac{3,5 \pm \sqrt{3,5^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 5}}{2 \cdot 0,5} =$$

$$x_{3,4} = 3,5 \pm \sqrt{3,5^2 - 10} =$$

$$= \frac{3,5 \pm \sqrt{2,25}}{1} =$$

$$= 3,5 \pm \sqrt{2,25} =$$

$$= 3,5 \pm 1,5$$

$$= 3,5 \pm 1,5$$

⇒

$$x_3 = 2$$

$$x_4 = 5$$

⇒

⇒

$$\underline{N_{1,2}(0 \mid 0)}$$

$$\underline{N_3(2 \mid 0)}$$

$$\underline{N_4(5 \mid 0)}$$

Lösung von Aufgabe 8:

$$x \cdot (x^2 + 5) - 3 \cdot (x^2 + 5) = 0$$

$(x^2 + 5)$ ausklammern

$$(x^2 + 5) \cdot [x - 3] = 0$$

$$x^2 + 5 = 0$$

$$x - 3 = 0$$

k.Lös.

$$x = 3$$

⇒

$$L = \{ 3 \}$$

1 a-b-c-Formel bzw. p-q-Formel wird im nächsten Kapitel erklärt.

A.12.04+A.12.05 Nullstellen von quadratischen Gleichungen

Quadratische Gleichungen [das sind Gleichungen, in denen ein „ x^2 “ vorkommt] löst man mit der Mitternachtsformel. Von der Mitternachtsformel gibt es zwei gängige Untervarianten, nämlich die p-q-Formel und die abc-Formel. Es reicht völlig, wenn man nur eine der beiden kann und es ist völlig egal, welche man vorzieht.

Meist liefert eine quadratische Gleichung zwei Lösungen. Es können jedoch zwei Sonderfälle auftreten: *keine* Lösung [Aufg. 10] oder *eine* Lösung [Aufg. 11].

p-q-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

oder

a-b-c-Formel:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aufgabe 9

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von: $2x^2 + 6x = 8$.

Aufgabe 10

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von: $x^2 - 4x + 6 = 0$.

Aufgabe 11

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von: $-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4 = 0$.

Lösung von Aufgabe 9:

$$2x^2 + 6x = 8 \quad | - 8$$

$$2x^2 + 6x - 8 = 0$$

(p-q-Formel)

(a-b-c-Formel)

$$2x^2 + 6x - 8 = 0 \quad | : 2$$

$$2x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (-4)}$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{4} = \frac{-6 \pm 10}{4}$$

$$= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -4 \quad \Rightarrow$$

$$L = \{ -4 ; 1 \}$$

Lösung von Aufgabe 10:

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

(p-q-Formel)

(a-b-c-Formel)

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = +\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 6}$$

$$x_{1,2} = \frac{+4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 6}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2}$$

unter der Wurzel steht etwas Negatives \Rightarrow keine Lösung !

Lösung von Aufgabe 11:

$$-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4 = 0 \quad | \cdot (-4)$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

(p-q-Formel) (a-b-c-Formel)

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x_{1,2} = +4 \pm \sqrt{4^2 - 16} \quad \quad \quad x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1}$$

$$= 4 \pm \sqrt{0} = 4 \quad \quad \quad = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2} = 4$$

$$\quad \quad \quad \rightarrow \quad \quad \quad \Rightarrow \quad \quad \quad L = \{ 4 \}$$

Interessant wird 's bei Gleichungen höherer Ordnung, also bei 3., 4., ... Ordnung.

A.12.06 Nullstellen-Findung durch Substituieren

Substitution wendet man immer an, wenn man:

- nichts ausklammern kann
- drei Terme hat
- die Hochzahl von einem Term doppelt so hoch ist, wie die vom anderen Term

[Substituieren heißt auf deutsch: „ersetzen“.

Genau das machen wir jetzt auch. Wir ersetzen den einen Term durch einen anderen]

Aufgabe 12

$$x^4 - 3x^2 + 5 = 0$$

Bestimmen Sie die zugehörigen Werte von x !

Ich wende jetzt nur noch die p-q-Formel an, damit die Rechnungen nicht so lang werden. Die a-b-c-Formel kann natürlich genau so gut verwendet werden.

Aufgabe 13

Lösen Sie die Gleichung: $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

Aufgabe 14

$x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ Bestimmen Sie die zugehörigen Werte von x !



Lösung von Aufgabe 12:

$x^4 - 3x^2 + 5 = 0$ x^2 nennen wir ab jetzt „u“, x^4 wird damit zu u^2

$u^2 - 3u + 5 = 0$

$u_{1,2} = +\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{11}{4}}$ die Wurzel ist negativ \Rightarrow keine Lösung

Lösung von Aufgabe 13:

$x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ $u = x^2$, $u^2 = x^4$

$u^2 - 2u - 8 = 0$

$u_{1,2} = +1 \pm \sqrt{1^2 - (-8)} = 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3$



Ist die Hochzahl „zwei“ und „vier“, dann substituieren wir.

$u_1 = 4$	$u_2 = -2$	statt u wieder x^2 hinschreiben (=Resubstitution)
$x^2 = 4$	$x^2 = -2$	Wurzel ziehen
<u>$x_{1,2} = \pm 2$</u>	<u>k.Lös.</u>	

Lösung von Aufgabe 14:

$$x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \quad u = x^3, \quad u^2 = x^6$$

$$u^2 + 7u - 8 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (-8)}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{\frac{81}{4}}}{2} = \frac{-7 \pm \frac{9}{2}}{2}$$

$u_1 = 1$	$u_2 = -8$	statt u wieder x^3 hinschreiben (=Resubstitution)
-----------	------------	-----------------------------------------------------

$x^3 = 1$	$x^3 = -8$	dritte Wurzel ziehen [geht auch bei neg. Zahlen !]
-----------	------------	----------------------------------------------------

<u>$x_1 = 1$</u>	<u>$x_2 = -2$</u>	
-----------------------------	------------------------------	--

A.12.07 Nullstellen-Findung mittels Polynomdivision

[Es gibt in Kap.A.46.01 übrigens ein eigenes Kapitel zu Polynomdivision!]

Falls bei einer Gleichung Mitternachtsformel nicht funktioniert, man nichts ausklammern kann und Substitution auch nicht geht, ist Polynomdivision am Start. D.h. man muss eine Lösung (=Nullstelle) für „x“ erraten. Dafür setzt man (üblicherweise) ± 1 , ± 2 und ± 3 für „x“ ein und hofft, dass Null `rauskommt. Falls tatsächlich Null `rauskommt, teilt man die Gleichung durch $(x - \text{„Nullstelle“})$.

Aufgabe 15

$$2x^3 + 12x^2 + 22x + 12 = 0$$

Aufgabe 16

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$$

Lösung von Aufgabe 15:

[siehe auch Aufgabe 17]

p-q-Formel, a-b-c-Formel, Ausklammern, Substitution funktionieren alle nicht.

⇒ Nullstelle raten.

$$+1 \text{ einsetzen: } 2 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 + 22 \cdot 1 + 12 = 48 \neq 0$$

$$-1 \text{ einsetzen: } 2 \cdot (-1)^3 + 12 \cdot (-1)^2 + 22 \cdot (-1) + 12 = 0$$

„+1“ war falsch und unnötig.

Nächste Zahl ausprobieren.

Juhuh! (Wenn 0 `rauskommt, ist der Tag gleich schöner.)

Wir haben jetzt zufällig eine Nullstelle bei -1 gefunden.
Wir teilen die Gleichung also durch $(x-(-1)) = (x+1)$

$$\begin{array}{r} (2x^3+12x^2+22x+12) : (x+1) = 2x^2+10x+12 \\ -(2x^3+2x^2) \\ \hline 10x^2+22x+12 \\ -(10x^2+10x) \\ \hline +12x+12 \\ -(+12x+12) \\ \hline 0 \end{array}$$

Die Polynomdivision ist aufgegangen.
Ein gutes Zeichen, denn:
**Beim Berechnen von Nullstellen,
muss die Polynomdivision
immer aufgehen.**



Wir wissen bisher:

$$(2x^3+12x^2+22x+12) = (x+1) \cdot (2x^2+10x+12)$$

und wir kennen (durch Raten) die erste Nullstelle:

Mit dem Ergebnis der Polynomdivision berechnen wir die weiteren Nullstellen.

$$\text{Also: } 2x^2 + 10x + 12 = 0$$

[mit Mitternachtsformel, die ich hier nicht mehr ganz ausführlich ausführe]

$$x_{2,3} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \quad \mathbf{x_2 = -2, \quad x_3 = -3}$$

Somit hat man für $2x^3+12x^2+22x+12=0$
die drei Lösungen: $x_1=-1$ $x_2=-2$ und $x_3=-3$

Lösung von Aufgabe 16: [siehe auch Aufgabe 18]

p-q-Formel, a-b-c-Formel, Ausklammern, Substitution funktionieren alle nicht.
⇒ Nullstelle raten.

+1 einsetzen gibt nicht Null, -1 einsetzen auch nicht, +2 oder -2 auch nicht, erst beim Einsetzen von 3 kommt als Ergebnis Null raus.

Wir haben jetzt zufällig eine Nullstelle bei 3 gefunden.

Wir teilen die Gleichung also durch $(x-3)$

$$\begin{array}{r} (x^3-9x^2+27x-27) : (x-3) = x^2-6x+9 \\ -(x^3-3x^2) \\ \hline -6x^2+27x-27 \\ -(-6x^2+18x) \\ \hline +9x-27 \\ -(+9x-27) \\ \hline 0 \end{array}$$

Die Polynomdivision ist aufgegangen.
Ein gutes Zeichen, denn:
**Beim Berechnen von Nullstellen,
muss die Polynomdivision
immer aufgehen.**



Wir wissen bisher:

$$(x^3-9x^2+27x-27) = (x-3) \cdot (x^2-6x+9)$$

und wir kennen (durch Raten) die erste Nullstelle:

Mit dem Ergebnis der Polynomdivision berechnen wir die weiteren Nullstellen.

$$\text{Also: } x^2 - 6x + 9 = 0$$

[mit Mitternachtsformel, die ich auch hier nicht mehr ausführlich ausführe]

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 9} = 3 \pm 0 \Rightarrow \quad \mathbf{x_2 = x_3 = 3}$$

Somit hat man für $x^3-9x^2+27x-27=0$ die dreifache Lösung: $x_{1,2,3} = 3$

A.12.08 Nullstellen-Findung mittels Horner-Schema

Das Horner-Schema ist eine leichte Abwandlung der Polynomdivision. Sie sollten dieses Kapitel nur durchlesen, falls Sie *sicher* sind, dass Sie Horner-Schema in der Schule tatsächlich verwenden.

[Es gibt in Kap.A.46.02 übrigens ein eigenes Kapitel zu Horner-Schema!]

Falls bei einer Gleichung Mitternachtsformel nicht funktioniert, man nichts ausklammern kann und Substitution auch nicht geht, ist Horner-Schema am Start. D.h. man muss erst eine Lösung(=Nullstelle) für „x“ erraten. Dafür setzt man (üblicherweise) ± 1 , ± 2 und ± 3 für „x“ ein und hofft, dass Null rauskommt. Falls tatsächlich Null rauskommt, kann man Horner auf die Gleichung loslassen.

Aufgabe 17

$$2x^3 + 12x^2 + 22x + 12 = 0$$

Aufgabe 18

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$$

Lösung von Aufgabe 17

[siehe auch Aufgabe 15]

p-q-Formel, a-b-c-Formel, Ausklammern, Substitution funktionieren alle nicht.
 \Rightarrow Nullstelle raten.

$$+1 \text{ einsetzen: } 2 \cdot 1^3 + 12 \cdot 1^2 + 22 \cdot 1 + 12 = 48 \neq 0$$

„+1“ war falsch und unnötig.
 Nächste Zahl ausprobieren.

$$-1 \text{ einsetzen: } 2 \cdot (-1)^3 + 12 \cdot (-1)^2 + 22 \cdot (-1) + 12 = 0$$

Juhuhh! (Wenn 0 rauskommt,
 ist der Tag gleich schöner.)

Wir haben jetzt zufällig eine Nullstelle bei -1 gefunden.
 Wir sollten aber alle weiteren Nullstellen berechnen.

	$2x^3$	$12x^2$	$22x$	12
	\downarrow	$-1 \cdot 2 = -2$	$-1 \cdot 10 = -10$	$-1 \cdot 12 = -12$
$x = -1$	2	$12 + (-2) = 10$	$22 + (-10) = 12$	$12 + (-12) = 0$

Zum Schluss muss immer „0“ rauskommen.

Die Zahlen der dritten Zeile sind die Koeffizienten des neuen Polynoms, das man ab jetzt betrachtet.

Das neue Polynom ist immer eine Potenz kleiner als das alte. Da das Ausgangspolynom 3. Grades ist, hat unser neues Polynom die Potenz 2. Wir beginnen also mit x^2 .

Die Zahlen vor den „x“ entnehmen wir (wie bereits angedeutet) der dritten Zeile unserer „Horner“-Tabelle. (Die letzte „0“ wird ignoriert)

$$\Rightarrow \text{Neues Polynom: } 2 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 12$$

Dieses neue Polynom musste man nun $=0$ setzen um die anderen Nullstellen zu bestimmen.

Das würde man mit der Mitternachts-Formel (p-q-Formel bzw. a-b-c-Formel) berechnen.

Also: $2x^2+10x+12 = 0$

[mit Mitternachtsformel, die ich hier nicht mehr ausführlich ausführe]

$$x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_2 = -2, x_3 = -3$$

Somit hat man für $2x^3+12x^2+22x+12=0$ die drei Lösungen:

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -2 \\ \text{und } x_3 = -3$$

Lösung von Aufgabe 18

[siehe auch Aufgabe 16]

p-q-Formel, a-b-c-Formel, ausklammern, Substitution funktionieren alle nicht.
 \Rightarrow Nullstelle raten.

+1 einsetzen gibt nicht Null, -1 einsetzen auch nicht, +2 oder -2 auch nicht,
erst beim Einsetzen von 3 kommt als Ergebnis Null raus.

Wir haben jetzt zufällig eine Nullstelle bei 3 gefunden.

Wir sollten aber alle weiteren Nullstellen berechnet werden.

	$1x^3$	$-9x^2$	$27x$	-27
$x = 3$	1	$3 \cdot 1 = 3$	$3 \cdot (-6) = -18$	$3 \cdot 9 = 27$
		$-9+3 = -6$	$27+(-18) = 9$	$-27+27 = 0$

Zum Schluss muss immer „0“ rauskommen.

Die Zahlen der dritten Zeile sind die Koeffizienten des neuen Polynoms, das man ab jetzt betrachtet.

Das neue Polynom ist immer eine Potenz kleiner als das alte. Da das Ausgangspolynom 3. Grades ist, hat unser neues Polynom die Potenz 2. Wir beginnen also mit x^2 .

Die Zahlen vor den „x“ entnehmen wir (wie bereits angedeutet) der dritten Zeile unserer „Horner“-Tabelle. (Die letzte „0“ wird ignoriert)

$$\Rightarrow \text{Neues Polynom: } 1 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 9$$

Dieses neue Polynom müsste man nun $=0$ setzen um die anderen Nullstellen zu bestimmen. Das würde man mit der Mitternachts-Formel (p-q-Formel bzw. a-b-c-Formel) berechnen.

Also: $x^2-6x+9 = 0$

[mit Mitternachtsformel, die ich auch hier nicht mehr ausführlich ausführe]

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 9} = 3 \pm 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = 3$$

Somit hat man für $x^3-9x^2+27x-27=0$ die dreifache Lösung:

$$x_{1,2,3} = 3$$

A.12.09 Sonstige Fälle

Es handelt sich um keinen der bisher beschriebenen Fälle. Was tun ?????

Man lässt ein Wunder geschehen und die Lösung erscheint plötzlich auf dem Blatt.
(Sehr schwierig)