# A.15 Tangenten und Normalen

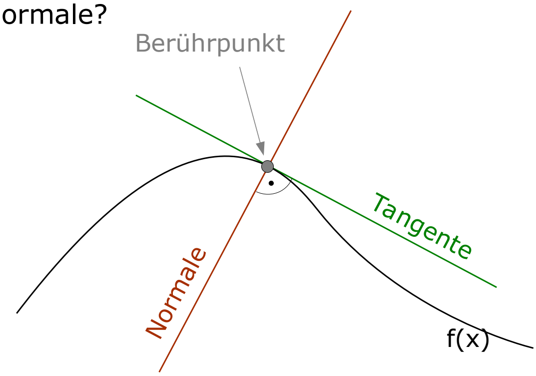
Es gibt mehrere Methoden Tangenten und Normale zu berechnen.
Ich werde hier zwei Methoden vorstellen, mit denen das geht.

- Die gängiste Methode ist diejenige über y=mx+b.
- Die geschickteste ist die, über die Tangenten- bzw. Normalenformel.
- Es gibt noch eine dritte Methode, welche über die Punkt-Steigungs-Formel geht, diese ähnelt aber dem Weg über Tangenten- und Normalengleichung. Ich stelle diese Methode daher *nicht* vor.

Mit der ersten Methode kann man *fast* alle Tangentenaufgaben lösen.
Mit der zweiten Methode kriegt man *alle* Fragestellungen zu Tangenten hin.

---

Was ist überhaupt eine Tangente oder eine Normale?




Eine **Tangente** ist eine Gerade, die eine Funktion in einem bestimmten Punkt [dem Berührpunkt] berührt.

Eine **Normale** ist eine Gerade, die in einem bestimmten Punkt [dem Berührpunkt der Tangente] senkrecht auf der Tangente steht.

Das Wichtigste bei der Berechnung von Tangenten ist, zu wissen, dass man die Tangentensteigung über die erste Ableitung berechnet.

Es gilt: $m_{Tan} = f'(u)$

Hierbei ist „u" der x-Wert des Berührpunktes.

Aus der Tangentensteigung kann man die Normalensteigung berechnen [falls man die braucht].

Die Normalensteigung ist der negative Kehrwert der Tangentensteigung. Es gilt: $m_{Nor} = -\frac{1}{m_{Tan}}$

**Die Tangentensteigung:**

$$\mathbf{m_{Tan} = f'(u)}$$

**Die Normalensteigung:**

$$\mathbf{m_{Nor} = -\frac{1}{m_{Tan}}}$$

**„u" ist der x-Wert des Berührpunktes**

## A.15.01 Methode 1: Berechnung über $y = m \cdot x + b$

**Aufgabe 1**

Sei $f(x) = x^3+5x^2+6x$. [gleiche Aufgabe wie Aufgabe 3]
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen an f(x) im Punkt B(-1|f(-1)) !

**Aufgabe 2**

Sei $f(x) = 0{,}5x^2-2x+3$ [gleiche Aufgabe wie Aufgabe 4]
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen an f(x) im Punkt B(4|a) !

**Lösung von Aufgabe 1**:

Erstmal rechnen wir B vollständig aus.
$f(-1) = (-1)^3+5\cdot(-1)^2+6\cdot(-1) = -1+5-6 = -2 \quad \Rightarrow \quad B(\,-1 \mid -2\,)$

Dann brauchen wir „m“, das geht über die Ableitung:
$f'(x) = 3x^2+10x+6$
$\Rightarrow\ m_{Tan} = f'(-1) = 3\cdot(-1)^2+10\cdot(-1)+6 = -1$

Wir kennen also x, y und m [x=-1, y=-2, m=-1] und können alles in y=m·x+b einsetzen:
$y_{Tan} = m\cdot x+b$
$\Rightarrow\ -2 = -1\cdot(-1)+b \ \Rightarrow\ -2 = 1+b \ \Rightarrow\ b = -3 \quad \Rightarrow \quad y_{Tan} = -1\cdot x-3$

Um die Normalengleichung zu erhalten, berechnen wir zuerst die Normalensteigung und setzen dann wieder m und die Koordinaten von B in $y = m\cdot x+b$ ein.

$$m_{Nor} = -\frac{1}{m_{Tan}} = -\frac{1}{-1} = +1$$

$y_{Nor} = m\cdot x+b$
$\Rightarrow\ -2 = +1\cdot(-1)+b \quad \Rightarrow \quad b = -1 \quad \Rightarrow \quad y_{Nor} = 1\cdot x-1$

**Lösung von Aufgabe 2**:

Wir berechnen zuerst die Koordinaten von B.
$a = f(4) = 0{,}5\cdot 4^2-2\cdot 4+3 = 8-8+3 = 3 \quad \Rightarrow \quad B(\,4 \mid 3\,)$

Nun brauchen wir „m“, das geht über die Ableitung:
$f'(x) = 1x-2$
$\Rightarrow\ m_{Tan} = f'(4) = 1\cdot 4-2 = 2$

Wir kennen x, y und m [x=4, y=3, m=2] und können alles in y=m·x+b einsetzen:
$y_{Tan} = m\cdot x + b$
$\Rightarrow\ 3 = 2\cdot 4+b \ \Rightarrow\ 3 = 8+b \ \Rightarrow\ b = -5 \quad \Rightarrow \quad y_{Tan} = 2x-5$

Um die Normalengleichung zu erhalten, berechnen wir wieder zuerst die Normalensteigung und setzen dann alles in $y = m\cdot x+b$ ein.

$m_{Nor} = m_{Nor} = -\frac{1}{m_{tan}} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

$y_{Nor} = m\cdot x+b$

$\Rightarrow\quad 3 = -0{,}5\cdot 4+b \quad\Rightarrow\quad b = 5 \quad\Rightarrow\quad y_{Nor} = -0{,}5x+5$

---

## A.15.02 Methode 2: Über Tangenten- und Normalengleichung

**Aufgabe 3**

Sei $f(x) = x^3+5x^2+6x$. [gleiche Aufgabe wie Aufgabe 1]

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen an f(x) im Punkt B(-1|f(-1)) !

**Aufgabe 4**

Sei $f(x) = 0{,}5x^2-2x+3$. [gleiche Aufgabe wie Aufgabe 2]

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normalen an f(x) im Punkt B(4|a) !

**Lösung von Aufgabe 3**:

Das Schöne an der Tangentenformel bzw. an der Normalenformel ist, dass man eigentlich nichts denken muss. Man berechnet f'(u) und f(u) und setzt einfach alles ein.

Zuerst berechnen wir noch die Ableitung.

$f'(x) = 3x^2+10x+6$

$u = -1$

$f(u) = f(-1) = (-1)^3+5\cdot(-1)^2+6\cdot(-1) = \ldots = -2$

$f'(u) = f'(-1) = 3\cdot(-1)^2+10\cdot(-1)+6 = -1$

Nun setzen wir alles in die Formeln ein und sind fertig.

**Die Tangentenformel:**

$y_T = f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$

**Die Normalenformel:**

$y_N = \frac{-1}{f'(u)}\cdot(x-u)+f(u)$

**B(u|f(u))**

ist der Berührpunkt.

Berechnung der Tangente:

$y_{Tan} = f'(u)\cdot(x-u)+f(u) = f'(-1)\cdot(x+1)+f(-1) =$

$= -1\cdot(x+1)+(-2) = -1x-1-2 = -1x-3 \quad\Rightarrow\quad y_{Tan} = -1\cdot x-3$

Berechnung der Normale:

$y_{Nor} = \frac{-1}{f'(u)}\cdot(x-u)+f(u) = \frac{-1}{f'(-1)}\cdot(x+1)+f(-1) =$

$= \frac{-1}{-1}\cdot(x+1)+(-2) = 1\cdot(x+1)-2 = 1\cdot x+1-2 \quad\Rightarrow\quad y_{Nor} = 1x-1$

**Lösung von Aufgabe 4**:
Zuerst beginnen wir mit der Berechnung der Ableitung.
$f'(x) = 1\cdot x-2$

$u = 4$
$f(u) = f(4) = 0{,}5\cdot 4^2-2\cdot 4+3 = 8-8+3 = 3$
$f'(u) = f'(4) = 1\cdot 4-2 = 2$

Nun setzen wir alles in die Formeln ein und sind fertig.

Berechnung der Tangente:
$y_{Tan} = f'(u)\cdot(x-u)+f(u) = f'(4)\cdot(x-4)+f(4)$
$= 2\cdot(x-4) + 3 = 2x-8+3 = 2\cdot x-5 \quad\Rightarrow\quad y_{Tan} = 2x-5$

Berechnung der Normale:
$y_{Nor} = \frac{-1}{f'(u)}\cdot(x-u)+f(u) = \frac{-1}{f'(4)}\cdot(x-4)+f(4)$
$= \frac{-1}{2}\cdot(x-4)+(3) = -0{,}5\cdot(x-4)+3 = -0{,}5\cdot x+2+3 \quad\Rightarrow\quad y_{Nor} = -0{,}5x+5$

---

## A.15.03 Wendetangente und Wendenormale (∰)

Eine Wendetangente bzw. eine Wendenormale ist nicht anderes, als eine Tangente bzw. eine Normale im Wendepunkt.
Der einzige Unterschied zu „normalen“ Tangentenaufgaben ist der, dass man zuerst den Wendepunkt berechnen muss.

**Aufgabe 5**
Bestimme die Gleichung der Wendetangente
und der Wendenormale der Funktion $f_t(x)$ mit: $f_t(x) = \frac{1}{3t}x^3+2x^2+3tx$.

**Lösung von Aufgabe 5**:
Da es sich um *Wende*tangente und *Wende*normale handelt, wird der Berührpunkt logischerweise auch der Wendepunkt sein. Daher berechnen wir erst `mal den Wendepunkt.

Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{t}x^2+4x+3t \qquad f''(x) = \frac{2}{t}x+4 \qquad f'''(x) = \frac{2}{t}$

Wendepunkt:
$f''(x) = 0$
$\frac{2}{t}x+4 = 0 \qquad |\cdot t$
$2x+4t = 0 \quad\Rightarrow\quad x_w = -2t$

Überprüfung mit $f'''(x)$:
$f'''(x) = \frac{2}{t} \neq 0 \quad\Rightarrow$ bei $x_W=-2t$ ist *sicher* ein Wendepunkt.

y-Wert:

$y_w = \frac{2}{t}x+4 = \ldots = -\frac{2}{3}t^2$

Damit haben wir den Wendepunkt. Toll. $W\left(-2t\,\middle|\,-\frac{2}{3}t^2\right)$

Die Steigung im Wendepunkt ist:

$f'(-2t) = \frac{1}{t}(-2t)^2+4(-2t)+3t = \frac{1}{\cancel{t}}\cdot 4t^{\cancel{2}}-8t+3t = -t$ .

Jetzt können wird die Wendetangente aufstellen:

- erste Möglichkeit, über y=m·x+b:

  $y = m\cdot x + b$ [die Werte für x, y und m einsetzen]

  $-\frac{2}{3}t^2 = -t\cdot(-2t)+b \;\Rightarrow\; -\frac{2}{3}t^2 = 2t^2+b \;\Rightarrow\; -\frac{8}{3}t^2 = b \;\Rightarrow\; y_{Tan} = -tx-\frac{8}{3}t^2$

- zweite Möglichkeit, über Tangentengleichung:

  $y_{Tan} = f'(-2t)\cdot(x-(-2t))+f(-2) = -t\cdot(x+2t)-\frac{2}{3}t^2 \;\Rightarrow\; y_{Tan} = -tx-\frac{8}{3}t^2$

Ebenso können wird die Wendenormale aufstellen:

- erste Möglichkeit, über y=m·x+b:

  Zuerst brauchen wir die Normalensteigung: $m_{Nor} = \frac{-1}{m_{tan}} = \frac{-1}{-t} = \frac{1}{t}$

  $y = m\cdot x + b$ [die Werte für x, y und m einsetzen]

  $-\frac{2}{3}t^2 = \frac{1}{\cancel{t}}\cdot(-2\cancel{t})+b \;\Rightarrow\; -\frac{2}{3}t^2 = -2+b \;\Rightarrow\; -\frac{2}{3}t^2+2 = b \;\Rightarrow\; y_{Tan} = \frac{1}{t}x-\frac{2}{3}t^2+2$

- zweite Möglichkeit, über Normalengleichung:

  $y_{Tan} = \frac{-1}{f'(-2t)}\cdot(x-(-2t))+f(-2t) = \frac{-1}{-t}\cdot(x+2t)-\frac{2}{3}t^2 =$

  $= \frac{1}{t}\cdot(x+2t)-\frac{2}{3}t^2 = \frac{1}{t}\cdot x+2-\frac{2}{3}t^2 \;\Rightarrow\; y_{Tan} = \frac{1}{t}x+2-\frac{2}{3}t^2$

---

## A.15.04 Unbekannter Berührpunkt (Tangente von außen)

**Worum geht es überhaupt?**

Gegeben sind eine Funktion f(x) und ein Punkt A, der nicht auf der Funktion liegt. Gesucht sind eine [oder mehrere] Tangenten, die an der Funktion anliegen und durch den gegebenen Punkt A laufen.

**Vorgehensweise:**

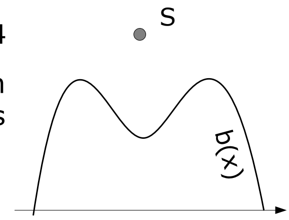
Man verwendet die Tangentengleichung und setzt die Koordinaten des gegebenen Punktes A für x und y ein. [NICHT für „u" einsetzen!! „u" ist der x-Werts des Berührpunktes und den haben wir NICHT!]

Man erhält eine Gleichung mit „u" als einziger Unbekannten.

Die Gleichung löst man nach „u" auf.

## Aufgabe 6

Durch die Funktion b mit $b(x)=-\frac{1}{16}x^4+\frac{3}{2}x^2+8$ wird für $-4\leqslant x\leqslant 4$ das Profil eines Berges beschrieben, welches durch die Sonne im Punkt S(0|17) beschienen wird. Geben Sie an, welcher Teil des Berges in der Sonne und welcher im Schatten liegt.

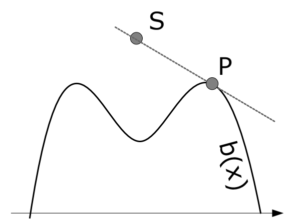



## Aufgabe 7

Bestimme die Gleichung der Tangenten an die Funktion $f(x) = x^3-3x^2+5x+4$, die durch den Punkt A(1|9) geht.

**Lösung von Aufgabe 6**:

Erst mal ableiten: $b(x)=-\frac{1}{16}x^4+\frac{3}{2}x^2+8 \;\Rightarrow\; b'(x)=-\frac{1}{4}x^3+3x$




Vom Punkt S gehen Lichtstrahlen aus, die auf den Berg treffen. Die Lichtstrahlen, die den Berg am weitesten außen gerade noch berühren, sind Tangenten mit dem Punkt P als Berührpunkt.
Vom Punkt P wissen wir nichts, also bekommt B die Koordinaten P(u|b(u)).
Eine Aufgabe mit unbekanntem Berührpunkt kann man eigentlich nur mit der Tangentenformel [aus Kap.A.15.02] „knacken“.
Wir verwenden daher die Tangentenformel $y=f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$.
In unserem Fall gilt: $f'(u)=b'(u)=-\frac{1}{4}u^3+3u$, $\quad f(u)=b(u)=-\frac{1}{16}u^4+\frac{3}{2}u^2+8$.
Die Tangente bzw. der Lichstrahl gehen durch S(0|), also gilt x=0 und y=17.
Das alles setzen wir in die Tangentenformel ein.

$$17 = \left(-\frac{1}{4}u^3+3u\right)\cdot(0-u)+\left(-\frac{1}{16}u^4+\frac{3}{2}u^2+8\right) \qquad \text{vereinfachen}$$

$$17 = \frac{3}{16}u^4-\frac{3}{2}u^2+8 \qquad |-17 \quad |\cdot 16$$

$$0 = 3u^4-24u^2-144 \qquad |:3$$

$$0 = u^4-8u^2-48 \qquad \text{Substitution } a=u^2$$

$$0 = a^2-8a-48$$

p-q-Formel oder a-b-c-Formel anwenden liefert ... $a_1=-4 \quad a_2=12$

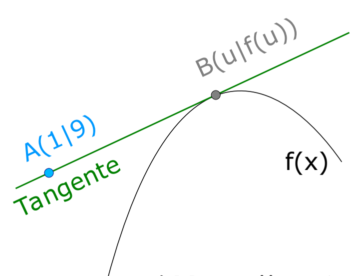
Resubstitution liefert die beiden Lösungen: $a_{1,2} = \pm\sqrt{12}$

Mögliche Berührpunkte der Tangenten sind also $P(\pm\sqrt{12}|?)$

Die Sonne bescheint den Berg im Bereich von: $x=-\sqrt{12}$ bis $x=\sqrt{12}$.

**Lösung von Aufgabe 7**:

$f'(x) = 3x^2-6x+5$ [Ableitung ist immer gut]




Der Punkt A liegt *nicht* auf der Funktion f(x).
[Setzt man den x-Wert von A in f(x) ein, kommt nicht 9 raus.]
Insbesondere gilt nicht $m_{Tan}=f'(1)$ [$m_{Tan}\neq f'(1)$].
Da wir den Berührpunkt nicht gegeben haben, schenken wir ihm großzügiger Weise die Koordinaten: B(u|f(u)).

Ab nun stellen wir unsere Tangentengleichung auf:

$y_{Tan} = \quad f'(u) \quad \cdot \quad (x-u) + \quad f(u) \qquad \Leftrightarrow$
$y_{Tan} = (3u^2-6u+5)\cdot(x-u) + u^3-3u^2+5u+4$

Jetzt erst kommt unser Punkt A ins Spiel. A liegt zwar nicht auf der Funktion, aber dafür auf der Tangente. Also machen wir eine Punktprobe mit A.

$A(\,1 \mid 9\,) \quad \Rightarrow \quad x_A=1, \quad y_A=9 \quad$ einsetzen.

$9 = (3u^2-6u+5)\cdot(1-u) + u^3-3u^2+5u+4$

[Die Gleichung vereinfachen …]

$9 = \cancel{3u^2}-6u+5 - 3u^3+6u^2-\cancel{5u} + u^3-\cancel{3u^2}+\cancel{5u}+4$
$9 = -2u^3 + 6u^2 - 6u + 9 \qquad | -9$
$0 = -2u^3 + 6u^2 - 6u \qquad$ „u" ausklammern
$0 = u \cdot (-2u^2 + 6u^2 - 6u)$

$u_1=0 \qquad -2u^2+6u-6 = 0$

[Diese Gleichung löst man mit der p-q-Formel oder mit der a-b-c-Formel. Ich spare mir das an dieser Stelle. Man erhält auf jeden Fall keine Lösung, da unter der Wurzel `was Negatives stehen wird.]

Einzige Lösung ist also $u = 0$.
Nun haben wir den Berührpunkt: $B(\,0 \mid f(0)\,)$.
Wir können also die Tangentengleichung aufstellen.

$y_{Tan} = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$
$\Rightarrow y_{Tan} = f'(0)\cdot(x-0) + f(0) = 5\cdot(x-0) + 4 \qquad \Rightarrow \qquad y_{Tan} = 5x+4$

---

## A.15.05 kurze Beispielaufgabe

**Aufgabe 8**

Bestimme die Gleichung der Tangenten an $f(x) = x^3-3x^2+4$, die parallel zu $y = 9x+16$ sind !

**Lösung von Aufgabe 8**:

Wenn die Tangenten parallel zu $y = 9x+16$ sind, müssen auch sie die Steigung $m_{Tan} = 9$ haben.

$\Rightarrow 9 = m_{Tan} = f'(u)$
$9 = 3u^2 - 6u \qquad |-9 \quad |:3$
$u^2 - 2u - 3 = 0$
$u_{1,2} = 1\pm\sqrt{1^2+3} = 1\pm2 \leftarrow$ [a-b-c-Formel geht selbstverständlich ebenfalls]
$u_1 = -1 \qquad u_2 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad B_1(-1|f(-1)) \quad B_2(3|f(3))$

Jetzt können wir bereits die Tangentengleichungen berechnen:
[Ich kürze den Rest der Rechnung etwas ab. Ich verwende auch nur die Methode über die Tangentengleichung. Über y=m·x+b geht's natürlich genau so gut]

erste Tangente: $y_{Tan} = f'(-1)\cdot(x-(-1))+f(-1) = 9\cdot(x+1)+0 = 9x+9$
zweite Tangente: $y_{Tan} = f'(3)\cdot(x-3) + f(3) = 9\cdot(x-3)+4 = 9x-23$