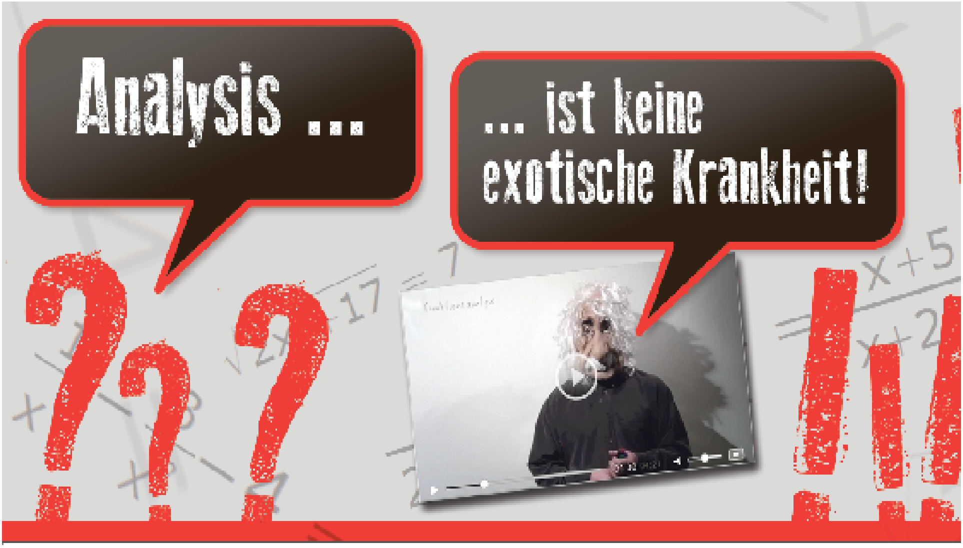
mathe seite
Die gute Seite an Mathe.

Mathe-Trainings-Heft

Prüfungsvorbereitung für Oberstufe und Abitur



Übungsaufgaben mit Lösungen

Matrizen [M]

Gleichungssysteme, Gauß-Verfahren
Determinanten, Inverse, Matrizengleichungen
Lineare Optimierung / Simplex / Leontief
Affine Abbildungen / Eigenvektoren
... und mehr

Kostenlose Videos mit Rechenwegen auf **Mathe-Seite.de**

Apr.2015

Kombinieren Sie Lern-Videos mit Lern-Schriften - für bessere Noten.

Sie möchten nicht nur die Lern-Videos schauen, sondern auch mal ein paar Übungsaufgaben rechnen oder Theorie nachlesen? Dann nutzen Sie die kostenlosen Lern-Schriften!
Das Besondere an den Lern-Schriften ist, dass Struktur und Inhalte identisch mit den Lern-Videos auf der Mathe-Seite.de sind. Falls Sie also in den Lern-Schriften etwas nicht verstehen, finden Sie die nötigen Erklärungen im Lern-Video - am schnellsten via QR-Codes.

Lern-Schriften + Lern-Videos = bessere Noten

Was das nützt: Das Lernen wird wesentlich effektiver, denn Sie profitieren vom sogenannten "crossmedialen Effekt". Der kommt aus der Werbe-Psychologie und bewirkt, dass Sie die Thematik intensiver wahrnehmen, besser verstehen und länger memorieren.
Das bietet übrigens nur die Mathe-Seite.de!

Das Mathe-Trainings-Heft (MTH)

Das vorliegende Mathe-Trainings-Heft beinhaltet Rechenaufgaben und Lösungen speziell zur Prüfungsvorbereitung für Oberstufe und Abitur. Solltest Sie eine Aufgabe nicht lösen können, finden Sie den Rechenweg direkt per QR-Link im Lern-Video. Zum Beispiel: Den Lösungsweg zu den Übungsaufgaben [V.02.06] finden Sie online auf der Mathe-Seite.de im Kapitel [V.02.06].
Vermutlich brauchen Sie nicht alle der im MTH enthaltenen Mathe-Themen. Unter www.mathe-seite.de > Abi-Themen nach Bundesland finden Sie eine Liste mit denjenigen Themen, die für Ihr Bundesland und Ihre Schulart relevant sind.

Weitere kostenlose Lern-Schriften auf Mathe-Seite.de

- Die Lernbuch-Reihe – detailliertes Fachwissen in mehreren Bänden
- Die Mathe-Fibel – alles Nötige in Kompaktform
- Die Lern-Kartei-Karten – handlich und clever
- Die Formelsammlung – das unverzichtbare Nachschlagewerk
- Die Anleitungen für Grafische Taschenrechner – endlich verständlich

M.01 Einführung

M.01.01 | Begriffe

Prüfen Sie, ob das LGS eine / keine / unendlich viele Lösungen hat.
Bestimmen Sie den Lösungsvektor.

[01] $\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 0 \\ -2x + 2y + z &= 0 \\ x - 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$

[02] $\begin{aligned} x + 2y - z &= 4 \\ -2x + y + z &= 0 \\ x - 3y - 2z &= -8 \end{aligned}$

[03] $\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$

[04] Eine Parabel dritter Ordnung hat eine Nullstelle bei x=1, geht durch die Punkte A(2|13), B(-1|4) und durch den Ursprung. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

M.01.02 | Unter- und überbestimmte LGS

Prüfen Sie, ob das LGS eine / keine / unendlich viele Lösungen hat.
Bestimmen Sie den Lösungsvektor.

[01] $\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 0 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}$

[02] $-2x + 6y = 8$

[03] $\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -2x + y + 2z &= 3 \\ -x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x \quad + 3z &= 5 \end{aligned}$

[04] $\begin{aligned} 2y + z &= 6 \\ x + 2y - 4z &= -11 \\ 2x + y \quad &= 7 \\ -2x - y + z &= -3 \end{aligned}$

M.02 Lösung mit Gauß-Verfahren

M.02.01 | Gleichungssysteme lösen (Normalfall: eine Lösung)

Prüfen Sie, ob das LGS eine / keine / unendlich viele Lösungen hat.
Bestimmen Sie den Lösungsvektor.

[01] $\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ -x + 3y &= 8 \end{aligned}$

[02] $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 6 \\ -2x + y + z &= 3 \\ 2x + 3y - z &= 5 \end{aligned}$

[03] $\begin{aligned} 2x + y - z &= -7 \\ x \quad + z &= 15 \\ 3x + 2y - z &= 1 \end{aligned}$

[04] $\begin{aligned} 2x - 3y + z + ß &= 2 \\ -x + y + 2z + 2ß &= 5 \\ x - y \quad - ß &= 0 \\ y - 2z - ß &= -2 \end{aligned}$

M.02.02 | Gleichungssysteme lösen (Sonderfall: ∞-viele Lösungen)

Prüfen Sie, ob das LGS eine / keine / unendlich viele Lösungen hat.
Bestimmen Sie den Lösungsvektor.

[01] $\begin{aligned} x + y - 3z &= 3 \\ 2x - y + z &= 3 \\ -x + 2y - 4z &= 0 \end{aligned}$

[02] $\begin{aligned} -2x + 3y \quad &= 4 \\ 3x - 2y + 5z &= 9 \\ x + y + 5z &= 13 \end{aligned}$

M.02.03 | Gleichungssysteme lösen (Sonderfall: keine Lösung)
Prüfen Sie, ob das LGS eine / keine / unendlich viele Lösungen hat.
Bestimmen Sie gegebenenfalls den Lösungsvektor.

[01] $\begin{aligned} 2x+y+3z&=1 \\ x-2y+z&=4 \\ x+3y+2z&=2 \end{aligned}$

[02] $\begin{aligned} x+2y+3z&=4 \\ 3x+2y+z&=0 \\ x+y+z&=3 \end{aligned}$

M.02.04 | Matrix lösen (Normalfall: eine Lösung)
Prüfen Sie, ob die Matrix eine / keine / unendlich viele Lösungen hat.
Bestimmen Sie den Lösungsvektor.

[01] $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 8 \end{array}\right)$

[02] $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right)$

[03] $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 1 & 0 & 1 & 15 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$

[04] $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right)$

M.02.05 | Matrix lösen (Sonderfall: ∞-viele Lösungen)
Prüfen Sie, ob die Matrix eine / keine / unendlich viele Lösungen hat.
Bestimmen Sie den Lösungsvektor.

[01] $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)$

[02] $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 5 & 13 \end{array}\right)$

M.02.06 | Matrix lösen (Sonderfall: keine Lösung)
Prüfen Sie, ob die Matrix eine / keine / unendlich viele Lösungen hat.
Bestimmen Sie gegebenenfalls den Lösungsvektor.

[01] $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$

[02] $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$

M.02.07 | Matrizen mit Parameter (Basiswissen):
Für welche Werte von „a" hat das LGS eine / keine / unendlich viele Lösungen?

[01] $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -4 & a+1 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right)$

[02] $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right)$

[03] $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -3 & 1 \\ 2+a & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & a \end{array}\right)$

M.02.08 | Matrizen mit Parameter (Herausforderungen):
Für welche Werte von „t" hat das LGS eine / keine / unendlich viele Lösungen?

[01] $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & t & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 12 \\ t & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$

[02] $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & t-3 & 2t & 6 \\ 2 & -2 & t+2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right)$

[03] $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & t & 1 & 1 \\ t & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$

M.03 Rechnen mit Matrizen

M.03.01 | Matrizenmultiplikation

Führen Sie folgende Matrizenmultiplikation durch.

[01] $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

[02] $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

[03] $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[04] $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

[05] $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

M.03.02 | Transponierte Matrizen

Geben Sie die Transponierte der folgenden Matrizen an.

[01] $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

[02] $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

[03] $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

M.03.03 | Inverse Matrizen

Geben Sie die Inverse der folgenden Matrizen an.

[01] $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

[02] $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

[03] $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

[04] $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

[05] $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

[06] $\begin{pmatrix} 8 & -81 & -17 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 15 & 5 \end{pmatrix}$

M.03.04 | Matrizengleichungen

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach der Matrix X auf.

[01] $2 \cdot A \cdot X + 3 \cdot B = 4 \cdot (X - A)$

[02] $(A \cdot X^T)^T + 3 \cdot X = E + 3 \cdot X \cdot A$

[03] $2 \cdot (X \cdot A)^{-1} + B \cdot X^{-1} - 2 \cdot X \cdot C = 2 \cdot X \cdot (X^{-1} - C) + 3 \cdot B$

M.04 Determinanten

M.04.01 | 2x2-Matrizen

Bestimmen Sie folgende Determinanten:

[01] $\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right|$

[02] $\left|\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right|$

[03] $\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\right|$

M.04.02 | 3x3-Matrizen

Bestimmen Sie folgende Determinanten:

[01] $\left|\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}\right|$

[02] $\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}\right|$

[03] $\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}\right|$

M.04.03 | Determinanten höherer Ordnung

Bestimmen Sie folgende Determinanten:

[01] $\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right|$ [02] $\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}\right|$ [03] $\left|\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\right|$

M.05 Wirtschaftsmatrizen (R-Z-E)

M.05.01 | Berechnung einer Matrix aus den beiden anderen

[01] Bestimmen Sie die Rohstoff-Endprodukt-Matrix (RE).

$(RZ)=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $(ZE)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

[02] Bestimmen Sie die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix (ZE).
Wieviel Zwischenprodukteinheiten sind für je eine Endprodukteinheit nötig?

$(RZ)=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 8 \\ 2 & 7 & 6 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $(RE)=\begin{pmatrix} 43 & 56 & 67 \\ 31 & 20 & 37 \\ 20 & 34 & 39 \end{pmatrix}$

[03] Bestimmen Sie die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix (RZ).

$(ZE)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $(RE)=\begin{pmatrix} 37 & 46 & 68 \\ 38 & 55 & 83 \\ 39 & 56 & 74 \end{pmatrix}$

M.05.02 | Rohstoffkosten & Herstellungskosten

[01] a) Bestimmen Sie die Kosten für je eine Mengeneinheit (ME) der Endprodukte.
b) Bestimmen Sie die Kosten für je eine ME der Zwischenprodukte.

$(RZ)=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $(ZE)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $(RE)=\begin{pmatrix} 18 & 18 & 27 \\ 8 & 8 & 14 \\ 11 & 11 & 17 \end{pmatrix}$

$k_r(4\ 5\ 2)$, $k_z(12\ 10\ 14)$, $k_E(38\ 24\ 18)$

[02] a) Bestimmen Sie die Kosten für je eine ME der Endprodukte.
b) Bestimmen Sie die Kosten für je eine ME der Zwischenprodukte.
c) Wie groß sind die Gesamtkosten für einen Auftrag mit 12 ME von E_1, 13 ME von E_2 und 8 ME von E_3?

$(RZ)=\begin{pmatrix} 10 & 5 & 8 \\ 2 & 7 & 6 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $(ZE)=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $(RE)=\begin{pmatrix} 43 & 56 & 67 \\ 31 & 20 & 37 \\ 20 & 34 & 39 \end{pmatrix}$

$k_r(2\ 0\ 1)$, $k_z(5\ 7\ 8)$, $k_E(10\ 11\ 12)$

[03] Bei einem Auftrag über 60 ME von E_1, 70 ME von E_2 und 88 ME von E_3 wird mit einem Verkaufspreis von 1250 GE (=Geldeinheiten) für eine ME von E_1 gerechnet, 1000 GE für eine ME von E_2 und 1000 GE für eine ME von E_3. Die variablen Kosten werden durch: $k_r(3\ 4\ 5)$, $k_z(8\ 6\ 5)$, $k_E(20\ 25\ 24)$ angegeben, die Fixkosten betragen: k_{fix}=10.298GE. Berechnen Sie die Gesamtkosten für diesen

Auftrag, sowie den Gewinn, wenn gegeben ist:

$$(RZ)=\begin{pmatrix}6 & 4 & 7\\ 9 & 5 & 6\\ 8 & 6 & 5\end{pmatrix} \qquad (ZE)=\begin{pmatrix}0 & 2 & 6\\ 4 & 5 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix} \qquad (RE)=\begin{pmatrix}37 & 46 & 68\\ 38 & 55 & 83\\ 39 & 56 & 74\end{pmatrix}$$

M.05.03 | einfache Beispielaufgaben

[01] Ein Unternehmen kauft Rohstoffe ein, welche es zu Zwischenprodukten und danach zu Endprodukten umwandelt.

Dabei gilt: $(RZ)=\begin{pmatrix}5 & 6 & 2\\ 2 & 4 & 0\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix} \quad (ZE)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$

Die Rohstoffkosten liegen bei $k_r=(2\ \ 3\ \ 1)$, die Fertigungskosten der Zwischenprodukte liegen bei $k_Z=(6\ \ 4\ \ 3)$ und die der Endprodukte bei $k_E=(12\ \ 15\ \ 8)$. Es wird ein Auftrag über 3ME von E_1, 6ME von E_2 und 5ME von E_3 bearbeitet.

a) Welche Rohstoff- und Zwischenproduktmengen sind für die Bearbeitung des Auftrags notwendig?

b) Welche Kosten entstehen dafür?

c) Im Lager des Unternehmens befinden sich noch 8ME von Z_1 und 21ME von Z_3. Welche Rohstoffmengen muss das Unternehmen in diesem Fall für den Auftrag dazu kaufen?

[02] Eine Firma macht aus Rohstoffen erst Zwischen-, danach Endprodukte.

Für die Umwandlung gilt: $(RZ)=\begin{pmatrix}10 & 5 & 8\\ 2 & 7 & 6\\ 6 & 1 & 5\end{pmatrix} \quad (RE)=\begin{pmatrix}43 & 56 & 67\\ 31 & 20 & 37\\ 20 & 34 & 39\end{pmatrix}$

a) Wieviel Zwischenprodukte sind für 1ME von E_2 notwendig?

b) Für einen Auftrag werden 15ME von E_1 benötigt, 20ME von E_2 und 18ME von E_3. Im Lager befinden sich noch 50ME von Z_1, 23ME von Z_2 und 91ME von Z_3. Wieviel Rohstoffe müssen für den Auftrag dazugekauft werden, damit im Lager von jedem Rohstoff 400ME Reserve bleibt?

[03] s`Mausi bastelt aus buntem Papier, aus Stroh und aus irgendwelchen Glitzerteilen Weihnachtsdekoration. Für einen Weihnachtsstern braucht´s Mausi 3 Blatt Papier, 6 Strohhalme und 4 Glitzerteile. Für eine Karte braucht Mausi 4 Blatt Papier und 5 Glitzerteile und für den selbstgebastelten Baumschmuck verwendet Mausi 2 Blatt Papier, 8 Strohhalme und 2 Glitzerteile. Ihre Kreationen verkauft Mausi in 3 verschiedenen Packungen. Packung 1 enthält 4 Weihnachtssterne, 8 mal Baumschmuck und 4 Karten, Packung 2 enthält 7 Weihnachtssterne, 3 mal Baumschmuck und 5 Karten, Packung 3 enthält 1 Weihnachtsstern, 2 mal Baumschmuck und 6 Karten.

a) Wieviel Weihnachtssterne, Karten und Baumschmuck kann´s Mausi mit 1137 Blatt Papier, 1782 Strohhalmen und 1383 Glitzerteilen fertigen, wenn alles aufgebraucht werden soll?

b) Welchen Umsatz könnte Mausi mit den aus Teilaufgabe a) gefertigten Produkten erzielen, wenn sie jede Packung für 9€ verkauft?

c) Eine Kundin kauft 4 der ersten Packungen, 12 der zweiten Packungen und 6 der dritten Packungen. Wie lange arbeitet Mausi an dem Auftrag, wenn die für einen Weihnachtsstern 8 min braucht, für eine Karte 6 min und für einen Baumschmuck 5 min?

M.05.04 | sanfte Vorbereitung auf den Schrecken

[01] In einen Unternehmen wird der Zusammenhang zwischen Endprodukten und Zwischenprodukten durch die Matrix $B=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ beschrieben.

In einem bestimmten Zeitraum beträgt die Produktion von E_1 20ME, die Produktion von E_3 ist doppelt so hoch wie von E_2, während der Verbrauch des Zwischenproduktes Z_3 132 ME beträgt. Bestimmen Sie die Gesamtanzahl aller verbrauchten ME der Zwischenprodukte.

[02] In einen Unternehmen wird der Zusammenhang zwischen Endprodukten und Rohstoffen durch $C=\begin{pmatrix} 37 & 46 & 68 \\ 38 & 55 & 83 \\ 39 & 56 & 74 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Die Endprodukte sollen im Mengenverhältnis 2:5:3 produziert werden. Vom Rohstoff R_2 stehen 1200 ME zur Verfügung. Um wieviel ME liegt der Bedarf an Rohstoff R_3 höher als der von R_1?

[03] In einen Unternehmen wird während eines Jahres der Zusammenhang zwischen Endprodukten und Rohstoffen durch $C=\begin{pmatrix} 18 & 18 & 27 \\ 8 & 8 & 14 \\ 11 & 11 & 17 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Für die Produktion der Endprodukte gilt: $E_1=4t$, $E_2=10-t^2$, $E_3=4$, wobei t die Nummer eines bestimmten Quartals ist. Für wieviel Rohstoffmengeneinheiten muss das Unternehmen im Lager Platz reservieren?

M.06 Leontief-Modell (Verflechtungsmatrizen)

M.06.01 | Abchecken von de Inputmatrix

[01] Drei Zweigwerke eines Unternehmens sind nach dem Leontief-Modell miteinander verbunden. Der dabei entstehende Materialfluss wird durch nebenstehende Tabelle angegeben. Bestimmen Sie die Inputmatrix, sowie die Leontief-Inverse.

	A	B	C	Markt
A	60	30	10	50
B	24	40	25	11
C	20	5	20	5

[02] Drei Zweigwerke A, B und C eines Unternehmens sind nach dem Leontief-Modell miteinander verbunden. Bestimmen Sie die Parameter x, y und z sowie die Technologie-Matrix aus der Tabelle.

	A	B	C	Markt	Prod.
A	45	125	100	90	x
B	60	100	y	120	200
C	z	150	80	15	320

M.06.02 | Erstma krass Lage checken

[01] Ein Betrieb umfasst drei Zweigwerke. Jedes dieser Zweigwerke bietet ein Produkt an, das sowohl für den Markt, aber auch für die jeweils zwei anderen Zweigwerke und den eigenen Bedarf produziert wird. Die Güterströme in ME und die Gesamtproduktion X werden durch das folgende Input-Output-Diagramm dargestellt.

	A	B	C	X
A	40	120	16	200
B	60	30	48	300
C	80	60	16	160

a) Bestimmen Sie die Marktabgabe Y!

b) Wie ändert sich der Konsumvektor, wenn sich die Produktion von C um 50% erhöht und die von B sich um 50% verringert?

c) Wie muss die Produktion der Zweigwerke gewählt werden, wenn insgesamt 603 ME an den Markt abgegeben werden und die Marktabgabe aller Zweigwerke gleich groß sein soll?

[02] Der Materialfluss von drei miteinander verflochtenen Zweigwerken wird durch nebenstehende Tabelle beschrieben.

	A	B	C	Y
A	70	182	378	70
B	280	182	378	70
C	70	182	63	315

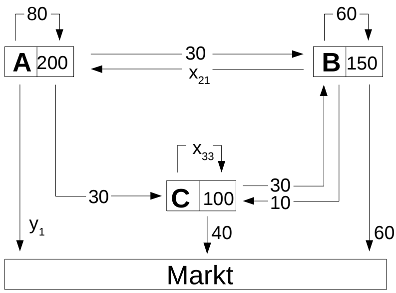
a) Bestimmen Sie die Inputmatrix A!

b) Eine Agentur schätzt, dass der Bedarf für die Produkte der drei Werke am Markt bei $y=(60\ \ 10\ \ 235)^T$ liegen könnte. Welche ME müssen die Werke dafür produzieren? Lös: $x=(500\ \ 600\ \ 450)^T$

c) In einem beliebigen Produktionszeitraum schätzt ein Manager der Konkurrenzfirma, dass die Produktion der Zweigwerke eine Menge von ca $x=(60\ 80\ 100)^T$ annehmen müsste.
Nehmen Sie Stellung zu dieser Aussage.

M.06.03 | hässliche Aufgabe 1

Drei Zweigwerke A, B und C eines Unternehmens sind miteinander nach dem LEONTIEF-Modell verflochten. Das Diagramm stellt die Verflechtung dar (Angaben in Mengeneinheiten).



[01] Bestimmen Sie die Inputmatrix.

[02] In einem früheren Zeitraum betrug der Marktvektor: $\mathbf{y}=(410,\ 450,\ 50)^T$.
Berechnen Sie den zugehörigen Produktionsvektor **x**, und stellen Sie die Verflechtung in einer Tabelle dar.

[03] In der Urlaubszeit wollen A 20 ME und C 30 ME produzieren. Das Zweigwerk A erzielt für sein Produkt auf dem Markt einen Erlös von 1000 Geldeinheiten je ME. B erzielt 600 GE je ME unc C 400 GE je ME. In den Zweigwerken A, B und C betragen die Herstellkosten je ME 100GE, 80 GE bzw. 40GE.
Zeigen Sie, dass der Gewinn des Unternehmens von der Produktionsmenge des Zweigwerks B unabhängig ist.
Welche ganzzahligen Produktionsmengen sind dann für B möglich, wenn alle Marktabgaben nicht negativ sein dürfen?

[04] Nach einer Umstellung des Produktionsverfahrens ist eine neue Inputmatrix A_t gegeben durch $A_t = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 2-0{,}004t^2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}1(t-2) & 0{,}6 \end{pmatrix}$

Dabei ist $t \in [\ 6\ ;\ 12\ ]$ ein technologieabhängiger Parameter.
Es ist die Produktion $x_t = (\ 40t\ \ 10t\ \ 12t\ )^T$ geplant.
Für welchen Wert von t ist die Summe der Marktabgaben aller drei Zweigwerke am kleinsten?

M.06.04 | hässliche Aufgabe 2

Die drei Zweigwerke A, B, C eines Unternehmens sind nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten. Gegeben ist: $(E-A)^{-1} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 12 & 16 & 9 \\ 6 & 28 & 12 \\ 12 & 36 & 24 \end{pmatrix}$

[01] Berechnen Sie die Inputmatrix A.

[02] Wieviel Mengeneinheiten müssen in den einzelnen Zweigwerken produziert werden, wenn mit einer Nachfrage von $y=(60\ 90\ 200)^T$ gerechnet wird?

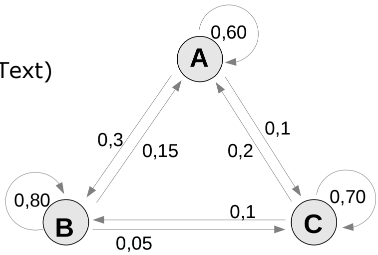
[03] Es ist ein neues Produktionsverfahren geplant. Dadurch ändern sich die Elemente der Inputmatrix A. Die Lieferanteile aus den drei Zweigwerken an Zweigwerk A verdoppeln sich, die an B werden halbiert, der Lieferanteil von A an C bleibt unverändert. Zweigwerk B produziert 200ME und Zweigwerk C doppelt so viel wie A. Es wird die Nachfrage $y=(60\ 80\ 120)^T$ erwartet.
Bestimmen Sie den Lieferanteil des Zweigwerks B an C, den Eigenverbrauch von C, sowie den Produktionsvektor.

[04] Für die nächsten 50 Produktionswochen wird das ursprüngliche Produktionsverfahren aus Teilaufgabe b) beibehalten. Der wöchentliche Nachfragevektor hängt von der Nummer x der Produktionswoche wie folgt ab:
$y_x = \begin{pmatrix} 28\cdot\ln(x) & 3\cdot x & \frac{105}{x} \end{pmatrix}$ mit $x \geqslant 2$.
In welcher Woche muss im Zweigwerk B am wenigsten produziert werden, um die Nachfrage befriedigen zu können? Ab welcher Woche wird der Produktionszuwachs im Zweigwerk B abnehmen ?

M.07 Übergangsmatrizen

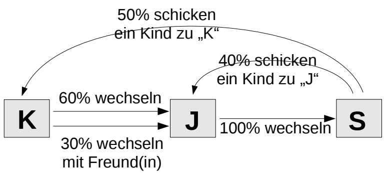
M.07.01 | Matrix erstellen (aus Graph oder Text)

[01] Die Kunden von drei Telekommunikationsunternehmen wechseln zwischen den drei Unternehmen A, B und C hin und her. Das Hin- und Hergewechsel kann am Ende eines Jahres durch die rechte Grafik beschrieben werden. Geben Sie eine Matrix an, die die Übergänge beschreibt.



[02] 20% aller Kaninchenjungen erreichen das zweite Lebensjahr in welchem sie geschlechtsreif werden.
Von diesen erreichen 50% das dritte Lebenjahr. Von diesen Zweijährigen werden 50% drei Jahre alt oder noch älter. Karnickel tun nun das, was Karnickel so tun und so kommt es, dass jedes einjährige Weibchen im Schnitt sechs Junge zur Welt bringt, jedes zweijährige Weibchen bringt sieben Junge zur Welt. Ältere Weibchen gebären im Schnitt 2 Junge pro Jahr. Geben Sie eine Matrix an, die die Entwicklung der Kaninchen beschreibt.

[03] Die Mitglieder der Pfadfindergruppe Fähnlein Fieselschweif teilen sich in drei Gruppen auf: Die Krabbelgruppe (K), in welcher sich die jüngsten befinden, die Jugendgruppe (J) mit dem Hauptteil des Vereins und die Seniorengruppe (S), aus



welcher die, aktiven Mitglieder jedoch allmählich ausscheiden.
Von der Krabbelgruppe wechseln 60% der Mitglieder nahtlos in die Jugendgruppe, weitere 30% wechseln in die Jugendgruppe und bringen sogar noch einen Freund/eine Freundin mit. Von der Jugendgruppe wechseln 75% nahtlos in die Seniorengruppe, Neuzugänge sind praktisch vernachlässigbar. Die Mitglieder der Seniorengruppe scheiden zwar allmählich aus, schicken jedoch irgendwann durchschnittlich 50% ihrer Kinder in die Krabbelgruppe und 20% in die Jugendgruppe. Erstellen Sie die zugehörige Populationsmatrix.

M.07.02 | Änderung von Populationen

[01] Die Kunden von drei Kommunikationsunternehmen wechseln andauern zwischen den Unternehmen hin und her, da sie mit dem Service nur begrenzt zufrieden sind. Der Wechsel wird durch die folgende Matrix M beschrieben.

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}80 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

a) Wieviel Kunden hat jedes der Unternehmen nach einem Jahr, wenn anfangs folgende Konstellation verzeichnet wurde: A=50, B=80, C=70?

b) Wieviel Kunden hatte jedes Unternehmen, wenn nach einem Jahr folgende Konstellation verzeichnet wird: A=197, B=316, C=147?

[02] Auf einem idyllischen Acker lebt eine Hasenkolonie. Es gibt 150 Hasenbabys (0-12Monate), 140 einjährige, 120 zweijährige und 60 dreijährige Kaninchen. Die Entwicklung der vier genannten Gruppen der Population kann durch die Matrix K beschrieben werden, mit:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3{,}5 & 1 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Wieviel Kaninchen gibt es nach einem Jahr?

b) Wieviel Kaninchen gibt es nach zwei Jahren?

[03] Ein Pfadfinderverein ist in drei Gruppen aufgeteilt: Die Krabbelgruppe, die Jugendgruppe und die Seniorengruppe. Die jährliche Entwicklung der Mitgliederzahlen innerhalb der genannten Gruppen wird durch

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 1{,}2 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ beschrieben.

a) Aus wieviel Mitgliedern besteht jede Gruppe, wenn der gesamte Verein aus 240 Mitgliedern besteht, es doppelt so viele Jungs wie Mädels hat, und die Krabbelgruppe und die Seniorengruppe jeweils halb so groß sind wie die Jugendgruppe?

b) Wieviel Mitglieder hat der gesamte Verein nach einem Jahr?

M.07.03 | Fixvektoren (=stationäre Verteilung), Eigenwerte

[01] Bei welcher Kundenanzahl der Unternehmen würde sich die Aufteilung der Kunden auf die drei Unternehmen im Laufe der Jahre nicht mehr ändern, sofern der Kundenwechsel durch die Matrix M beschrieben wird?

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}80 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

[02] Die Entwicklung mehrerer Generationen einer Kaninchenpopulation auf einem Acker wird durch die Matrix $K=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3{,}5 & 1 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben.
Bei welcher Anzahl von Kaninchen pro Generation würde die Population konstant bleiben?

[03] In einem Pfadfinderverein wechseln die Mitglieder innerhalb der drei Altersgruppen gemäß der Matrix $P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 1{,}2 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Welche Mitgliederanzahl würde unverändert bleiben?

M.07.04 | Grenzmatrix

[01] Bei einem Übergang, der durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}80 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ beschrieben wird, wird die langfristige Entwicklung betrachtet.
Bestimmen Sie die Grenzmatrix, welche diese Entwicklung wiedergibt.

[02] Die Entwicklung einer Kaninchenpopulation wird durch

$K=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3{,}5 & 1 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Nach vielen Jahren wird die Population durch eine Matrix K_∞ beschrieben.
Bestimmen Sie die Matrix K_∞.

[03] Bestimmen Sie die, zur Übergangsmatrix $P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 1{,}2 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
zugehörige stationäre Matrix.

M.08 Lineare Optimierung (Simplex)

M.08.01 | grafische Lösung

[01] Ein Osterhase stellt Hühnereier(H) und Gänseeier(G) zur Verfügung. Ein H wiegt 2g, ein G wiegt 3g, das Gesamtgewicht darf 54kg nicht überschreiten. Für die Transportsicherungen braucht ein H eine Flaumfeder als Verpackungsmaterial, ein G braucht 4 Flaumfedern, wovon dem Osterhasen insgesamt nur 52000 zur Vefügung stehen. Für den Vorgang des Verpackens braucht ein H 2min, ein G nur 1min. Insgesamt haben die Osterhasen-Angestellten 700 Stunden für die Verpackungsprozedur zur Verfügung. Kinder kriegen von jedem Ei jeweils zwei Endorphineinheiten vor lauter Glück. Wie müssen H und G gewählt werden, damit die von den Kindern ausgeschüttete

Endorphinmenge maximal ist ?

[02] Ein Reifenhersteller produziert Autoreifen für PKWs und für LKWs. Im Lager ist Platz für entweder 4.500 LKW-Reifen oder für 9.000 PKW-Reifen oder dementsprechende Zwischenlösungen. Ein LKW-Reifen benötigt ca. 20 Materialeinheiten zur Produktion, während eine PKW-Reifen mit nur 5 davon auskommt. Dummerweise stehen dem Reifensteller davon nur 80.000 zur Verfügung. Ein letzter Engpass entsteht in der Fertigung, wo dem Hersteller insgesamt 30.000 Maschinenstunden zur Verfügung stehen. Ein LKW-Reifen belegt eine Maschine 3 Stunden lang, ein PKW-Reifen benötigt 2 Stunden länger, da er für höhere Geschwindigkeiten ausgelegt ist. Wie müssen die Produktionszahlen gewählt werden, um maximalen Gewinn zu erzielen, wenn an einem PKW-Reifen 10€, an einem LKW-Reifen 20€ verdient wird?

M.08.02 | Rechen-Algorithmus (Simplex)

[01] Wie Aufgabe M.08.01.01, nur eben rechnerische Lösung.

[01] Wie Aufgabe M.08.01.02, nur eben rechnerische Lösung.

M.09 Affine Abbildungen

M.09.01 | Drehungen, Spiegelungen, Streckungen im $\mathbb{R}^2$

[01] Eine Abbildung $M=\begin{pmatrix}\cos(60) & -\sin(60)\\ \sin(60) & \cos(60)\end{pmatrix}$ bildet den Vektor $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ auf den Vektor $\vec{v}$ ab. Bestimmen Sie $\vec{v}$. Um wieviel Grad wurde der Vektor $\vec{u}$ gedreht? Wie hat sich die Länge des Vektors geändert?

[02] Bestimmen Sie die Umkehrabbildung von: $M=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$

[03] Der Vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ wird um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht und anschließend an der y-Achse gespiegelt. Auf welchen Vektor $\vec{b}$ wird $\vec{a}$ abgebildet?

[04] Bestimmen Sie diejenige Abbildung, die einen Vektor des $\mathbb{R}^2$ um 50° in positive Richtung dreht und anschließend um den Faktor 3 am Ursprung streckt.

[05] Der Vektor $\vec{x}$ wird mit dem Faktor 3 an der x-Achse gestreckt, mit dem Faktor 2 an der y-Achse gestreckt und anschließend am Ursprung gespiegelt, so dass man $\vec{y}=\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$ erhält. Bestimmen Sie $\vec{x}$.

[06] Welche Abbildung spiegelt an der x-Achse, dreht um 60° im Uhrzeigersinn und staucht mit dem Faktor ½ in y-Richtung?

M.09.02 | Drehungen, Spiegelungen, Streckungen im $\mathbb{R}^3$

[01] Bestimmen Sie eine Abbildung, die an der x-y-Ebene spiegelt und an der y-Achse um 30° dreht.

[02] $(2|3|4)^T$ wird um 45° an der y-Achse und um -60° an der z-Achse gedreht. Bestimmen Sie den Ergebnisvektor.

[03] Welchen Vektor muss man um den Faktor 3 in x-Richtung, um den Faktor 2 in z-Richtung strecken und zum Schluss an der y-z-Ebene spiegeln, um $(3|2|1)^T$ zu erhalten?

[04] Der Vektor $(6|3|2)^T$ wird durch eine lineare Abbildung in den Vektor $(4|7|-4)^T$ überführt. Zeigen Sie, dass eine die Abbildung keine Drehung sein kann. Geben Sie eine mögliche Abbildung an, die nur auf Streckungen zurück zu führen ist.

[05] Der Vektor $(-4|4|2)^T$ wird um den Faktor 6 entlang der x-Achse gestreckt, um

den Faktor 3 entlang der y-Achse und um den Faktor 4 entlang der z-Achse. Anschließend wird er um den Winkel von 35° um die x-Achse gedreht, um -60° um die y-Achse und im 90° um die z-Achse. Um welchen Faktor hat sich die Länge des Vektors vergrößert?

[06] Der Vektor $(3|\sqrt{2}|0)^T$ wird um den Winkel α um die x-Achse gedreht und um den Winkel β um die z-Achse. Bestimmen Sie α und β, wenn man als Ergebnis den Vektor $(1|-3|1)^T$ erhält.

M.09.03 | Abbildungen der Form: y=M·x+v

[01] Gegeben sei die Abbildung $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie das Bild des Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

[02] Bestimmen Sie die Parameter „p" und „q" so, dass der Urbildvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ wird durch die Abbildung $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & p \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} q \\ 2 \end{pmatrix}$ auf den Bildvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \end{pmatrix}$ abgebildet wird.

[03] Der Vektor $\vec{x}$ wurde an der y-Achse gespiegelt und anschließend um $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ verschoben, so dass man $\vec{y} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ erhielt. Bestimmen Sie $\vec{x}$.

[04] Eine Abbildung überführt die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in die Vektoren $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b}' = \begin{pmatrix} 7 \\ 21 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Bestimme die zugehörige Abbildung!

[05] Eine Abbildung dreht die Vektoren des $\mathbb{R}^3$ um 90° um die y-Achse und verschiebt anschließend den Punkt A(3|2|1) auf den Punkt B(2|4|-2). Auf welchen Bildpunkt wird P(-2|5|1) abgebildet?

[06] Der Ursprung wird durch Verkettung einer Streckung mit einer Verschiebung auf P(-3|1|2) abgebildet, der Punkt A(2|-2|6) auf B(5|5|5). Um welche Abbildung handelt es sich?

M.09.04 | Eigenwerte, Eigenvektoren

[01] Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

[02] Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

[03] Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

[04] Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

[05] Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $M = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 8 \\ 2 & 6 & -4 \\ -5 & -3 & 10 \end{pmatrix}$.

[06] Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 11 \\ -4 & -8 & -10 \end{pmatrix}$.

Lösungen der Aufgaben

[M.02.01]
[01] L={1;3}   [02] L={1;2;3}   [03] L={0;8;15}   [04] L={4;3;2;1}

[M.02.02]
[01] $L=\left(2+\frac{2}{3}t;1+\frac{7}{3}t;t\right)$ [02] L=(7−3t;6−2t;t)

[M.02.03]
[01] keine Lösung   [02] keine Lösung

[M.02.04]
[01] $L=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ [02] $L=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ [03] $L=\begin{pmatrix}0\\8\\15\end{pmatrix}$ [04] $L=\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$

[M.02.05]
[01] $L=\begin{pmatrix}2+\frac{2}{3}t\\1+\frac{7}{3}t\\t\end{pmatrix}$ [02] $L=\begin{pmatrix}7-3t\\6-2t\\t\end{pmatrix}$

[M.02.06]
[01] keine Lösung   [02] keine Lösung

[M.02.07]
[01] für alle $a\in\mathbb{R}$ existiert genau eine Lösung
[02] a=1: ∞-viele Lösungen,   a≠1: genau eine Lösung
[03] a=-3: ∞-viele Lösungen, a≠-3: genau eine Lösung

[M.02.08]
[01] $t=\frac{1}{3}$: ∞-viele Lösungen, $t\neq\frac{1}{3}$: genau eine Lösung
[02] t=3 oder t=-2: keine Lösungen, t≠2 und t≠-3: genau eine Lösung
[03] t=-2: keine Lösung; t=0: ∞-viele Lösungen; t≠-2 und t≠0: eine Lösung

[M.03.01]
[01] $\begin{pmatrix}-1 & -21\\1 & -11\end{pmatrix}$ [02] $\begin{pmatrix}-6 & 6 & 1\\4 & -2 & 22\\-1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ [03] $\begin{pmatrix}4 & 10 & 4\\0 & 14 & 8\end{pmatrix}$

[04] unmöglich   [05] $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

[M.03.02]
[01] $\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 4\end{pmatrix}$ [02] $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 4 & 6\\2 & -3 & -5\end{pmatrix}$ [03] $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 2\\6 & -3 & -5\end{pmatrix}$

[M.03.03]
[01] $\begin{pmatrix}-4 & 3\\3 & -2\end{pmatrix}$ [02] $\begin{pmatrix}2 & -17 & 11\\-1 & 11 & -7\\0 & 3 & -2\end{pmatrix}$ [03] $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 1 & 3\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

[04] $\begin{pmatrix} -7 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ [05] nicht invertierbar [06] $\begin{pmatrix} 0{,}5 & -1{,}5 & 2{,}3 \\ 0{,}1 & -0{,}4 & 0{,}5 \\ -0{,}3 & 1{,}2 & -1{,}3 \end{pmatrix}$

[M.03.04]
[01] $X = (2A-4E)^{-1}\cdot(-4A-3B)$
[02] $X = (A^T+3E-3A)^{-1}$
[03] $X = (2E+3B)^{-1}\cdot(2A^{-1}+B)$

[M.04.01]
[01] det = -1 [02] det = -3 [03] det = -13

[M.04.02]
[01] det = 35 [02] det = -1 [03] det = 0

[M.04.03]
[01] det = 0 [02] det =-125 [03] det = -5

[M.05.01]
[01] $(RE)=\begin{pmatrix} 18 & 18 & 27 \\ 8 & 8 & 14 \\ 11 & 11 & 17 \end{pmatrix}$ [03] $(RZ)=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 9 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

[02] $(ZE)=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Für 1 ME von E_1 braucht man: 2 Z_1, 2 Z_2, 1 Z_3,
für 1 ME von E_2 braucht man: 4 Z_1, 0 Z_2, 2 Z_3,
für 1 ME von E_3 braucht man: 3 Z_1, 1 Z_2, 4 Z_3.

[M.05.02]
[01] a) $1E_1$: 220, $1E_2$: 220, $1E_3$: 300
b) $1Z_1$: 48, $1Z_2$: 62, $1Z_3$: 24

[02] a) $1E_1$: 155, $1E_2$: 193, $1E_3$: 239
b) $1Z_1$: 31, $1Z_2$: 18, $1Z_3$: 29
c) Gesamtkosten: 6.281 (GE)

[03] Gesamtkosten=180.000, Umsatz=233.000 $\Rightarrow$ Gewinn=53.000

[M.05.03]
[01] a) $\vec{z}=\begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ 31 \end{pmatrix}$, $\vec{r}=\begin{pmatrix} 297 \\ 142 \\ 184 \end{pmatrix}$ b) Gesamtkosten: 1.649 (GE) c) $\vec{r}_{neu}=\begin{pmatrix} 215 \\ 126 \\ 139 \end{pmatrix}$

[02] a) Für 1ME von E_2: 4ME von Z_1, 0 ME von Z_2, 2 ME von Z_3.
b) 1628 ME von R_1, 724 ME von R_2, 904 ME von R_3.

[03] a) 117 Weihnachtssterne, 129 Karten, 135 Baumschmuck
b) 243€ Umsatz
c) 1920min $\triangleq$ 32h

[M.05.04]
[01] $E_2=12$, $E_3=24$, $Z_1=220$, $Z_2=88$

[02] $R_1=1016$ und $R_3=1160$. ($E_1=4$, $E_2=10$, $E_3=6$)

[03] Gesamte Rohstoffmenge: $R_{ges}=-37t^2+148t+602$. Maximum: $R_{max}=750$

[M.06.01]

[01] $A=\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}16 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}15 & 0{,}05 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ $\qquad (E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 2{,}49 & 1{,}41 & 2{,}0 \\ 1{,}21 & 2{,}47 & 2{,}47 \\ 0{,}65 & 0{,}52 & 2{,}2 \end{pmatrix}$

[02] $x=360, \quad y=20, \quad z=75.$ $\qquad A=\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{5}{12} & \frac{5}{16} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{16} \\ \frac{5}{24} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

[M.06.02]

[01] a) Marktabgabe: $y_1=24, \; y_2=152, \; y_3=4$
b) Neuer Konsumvektor: $y_1=76, \; y_2=3, \; y_3=106$
c) $y_1=201, \; y_2=201, \; y_3=201 \;\Rightarrow\; x_1=670, \; x_2=670, \; x_3=670$

[02] a) $A=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$
b) Produktion: $x_1=500, \; x_2=600, \; x_3=450$
c) Produktion: $x_1=-22, \; x_2=-20, \; x_3=68 \;\Rightarrow$ unmöglich.

[M.06.03]

[01] $A=\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

[02] $\vec{x}=\begin{pmatrix} 1200 \\ 1010 \\ 360 \end{pmatrix}$

	A	B	C	Y	X
A	480	202	108	410	1200
B	120	404	36	450	1010
C	0	202	108	50	360

[03] $G=5200$ [unabhängig von „x"]
Produktionsmengen von B: $x=\{9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14;\ 15\}$

[04] Marktabgabe: $y_t=0{,}04t^3-t^2+8t \;\Rightarrow$ Minimum für $t=10$.

[M.06.04]

[01] $A=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

[02] Produktion: $x_1=660, \; x_2=880, \; x_3=1460$

[03] Lieferanteil von B an C : 0,1 $\qquad$ Eigenverbrauch von C: 280ME
Produktionsvektor: $x_1=400, \; x_2=200, \; x_3=800$

[04] $x_B = 28\cdot\ln(x)+14x+\frac{210}{x} \;\Rightarrow$ Min bei $x=3$. Abnahme ab $x=15$.

[M.07.01]

[01] $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ $\qquad$ [02] $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3{,}5 & 1 \\ 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ [03] $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 1{,}2 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[M.07.02]

[01] a) A:56, B:86, C:58
b) A:200, B:300, C=160

[02] a) 900 Hasenbabys, 30 einjährige, 70 zweijährige, 60 dreijährige.
b) 395+180+15+35=625

[03] a) ?
b) ?

[M.07.03]

[01] $\begin{pmatrix} 11 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix}$ oder Vielfache. [02] $\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder Vielfache. [03] $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder Vielfache.

[M.07.04]

[01] $M_\infty = \begin{pmatrix} 0{,}289 & 0{,}289 & 0{,}289 \\ 0{,}529 & 0{,}529 & 0{,}529 \\ 0{,}184 & 0{,}184 & 0{,}184 \end{pmatrix}$

[03] $P_\infty = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

[02] $K_\infty = \begin{pmatrix} 0{,}741 & 0{,}741 & 0{,}741 & 0{,}741 \\ 0{,}148 & 0{,}148 & 0{,}148 & 0{,}148 \\ 0{,}071 & 0{,}071 & 0{,}071 & 0{,}071 \\ 0{,}037 & 0{,}037 & 0{,}037 & 0{,}037 \end{pmatrix}$

[M.08.01]

[01] G=6000, H=18.000

[02] Pkw=2000, Lkw=3500

[M.08.02]

[01] G=6000, H=18.000

[02] Pkw=2000, Lkw=3500

[M.09.01]

[01] $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2{,}1 \\ 2{,}37 \end{pmatrix}$, Drehung um 60°, keine Längenänderung.

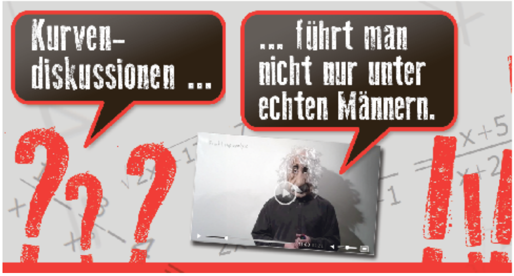
[02] $M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

[03] $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

[04] $M = \begin{pmatrix} 1{,}928 & -2{,}298 \\ 2{,}298 & 1{,}928 \end{pmatrix}$

[05] $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

[06] $M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}866 \\ -0{,}433 & -0{,}25 \end{pmatrix}$



Damit die Mathe-Seite.de kostenlos bleiben kann, braucht sie deine Hilfe!

facebook.com/matheseite

Bitte empfiehl die Mathe-Seite deinen Freunden.

h[x]=
MatheSeite