A.18 Integrale und Flächeninhalte

A.18.01 Überblick (∰)

Wiederholung:

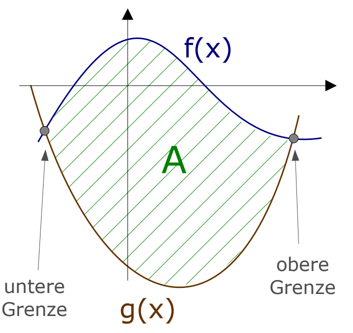
f(x) ist der **y-Wert**

f'(x) ist die **Steigung**

F(x) gibt die **Fläche** an

Ein Integral ist mehr oder weniger das Gleiche, wie eine Stammfunktion. Der Unterschied liegt in der Schreibweise und darin, dass man beim Integral noch Grenzen angeben kann.
Blöd gesagt: Integral, Stammfunktion, Aufleitung ist in Mathe so ziemlich das Gleiche.
Das Wort „Aufleitung" ist jedoch des Teufels. In Wirklichkeit gibt es dieses Wort nicht. Zwar weiß jeder, was gemeint ist, jedoch klingen die Begriffe „Integral" oder „Stammfunktion" für Mathematikerohren VIEL schöner!

Wie bestimmt man allgemein eine Fläche?
Es ist immer das Gleiche:
- man schreibt das Integralzeichen hin.
- unterhalb und oberhalb des Integralzeichens stehen immer die untere und obere Flächengrenze.
- hinter dem Integralzeichen [im eigentliche Integral] stehen immer die obere und untere Funktion, die die Fläche begrenzen [es sind immer zwei Funktionen, auch wenn eine der Funktionen immer die x-Achse ist!]
- zu allerletzt kommt das „dx" [ohne wichtige Bedeutung].



kurzgefasst:

$$A = \int_{\text{untere Grenze}}^{\text{obere Grenze}} \left(\text{obere Funktion}\right) - \left(\text{untere Funktion}\right) dx$$

Wird eine Fläche von mehreren Funktionen eingeschlossen, muss man sie so aufteilen, dass es mehrere Flächenstücke gibt, die jeweils nur durch *eine* Funktion oben und *eine* Funktion unten begrenzt sind.

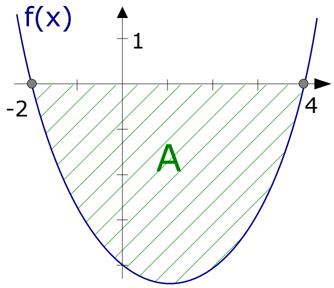
A.18.02 Fläche mit der x-Achse [1] (∰)

Bsp. 1

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-4$

Welche Fläche bildet f(x) mit der x-Achse ?

Lösung:
Zuerst brauchen wir die Grenzen, also die x-Werte bei denen die Fläche links und rechts aufhört.
Das sind die Nullstellen.



$$\frac{1}{2}x^2-x-4 = 0 \qquad |\cdot 2$$

$$x^2-2x-8 = 0$$

$$x_{1,2} = 1\pm\sqrt{1^2+8} = 1 \pm 3 \quad ^{(2)}$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 \qquad x_2 = +4$$

Somit ist die Fläche:

$$A = \left|\int_{-2}^{4} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{-2}^{4} \frac{1}{2}x^2-x-4\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x\right]_{-2}^{4}\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{1}{6}\cdot 4^3-\frac{1}{2}\cdot 4^2-4\cdot 4\right]-\left[\frac{1}{6}\cdot(-2)^3-\frac{1}{2}\cdot(-2)^2-4\cdot(-2)\right]\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{40}{3}\right]-\left[\frac{14}{3}\right]\right| = \frac{54}{3} = 18 \;\; (LE^2)$$

Flächen sind immer positiv definiert. (Es gibt keine Flächeninhalte von -5m².
Daher kommt der Betrag.

Bsp. 2

Welche Fläche schließt $f(x) = x^3-9x$ mit der x-Achse ein ??

Lösung:
Grenzen bestimmen:

$x^3 - 9x = 0$

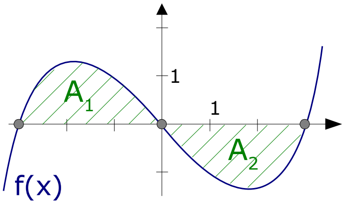
$x\cdot(x^2-9) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = -3 \qquad x_3 = +3$

Beim Berechnen von Flächen sollte man immer eine Zeichnung oder eine gute Skizze haben.

Wir haben *drei* Nullstellen, es gibt also *zwei* Teilflächen.
[Man kann keinesfalls die Funktion direkt von -3 bis+3 integrieren]

1 „x-Achse": Das ist der Strich im Koordinatensystem, der waagerecht von links nach rechts geht und am Ende einen Pfeil hat.
2 Wir haben hier nur die p-q-Formel verwendet. Die a-b-c-Formel eignet sich natürlich ebenso gut.

Es gilt also:



$$A_{ges} = A_1 + A_2 =$$

$$= \left|\int_{-3}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{3} f(x)dx\right| =$$

$$= \left|\int_{-3}^{0} x^3-9x\,dx\right| + \left|\int_{0}^{3} x^3-9x\,dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right]_{-3}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right]_{0}^{3}\right| =$$

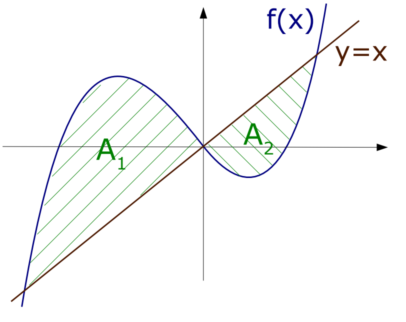
$$= \left|\left[\frac{1}{4}\cdot 0^4-\frac{9}{2}\cdot 0^2\right]-\left[\frac{1}{4}\cdot(-3)^4-\frac{9}{2}\cdot(-3)^2\right]\right| + \left|\left[\frac{1}{4}\cdot 3^4-\frac{9}{2}\cdot 3^2\right]-\left[\frac{1}{4}\cdot 0^4-\frac{9}{2}\cdot 0^2\right]\right| =$$

$$= \left|[0]-\left[-\frac{81}{4}\right]\right| + \left|\left[-\frac{81}{4}\right]-[0]\right| = \frac{81}{4}+\frac{81}{4} = \frac{81}{2} \quad (LE^2)$$

A.18.03 Flächen zwischen zwei Funktionen (∰)

So. langsam kommen wir zum interessanten Bereich.
[In Prüfungsaufgaben sind nämlich fast nur Flächen zwischen mehreren Funktionen zu erwarten.]

Bsp. 3
Die Funktion $f(x) = 0{,}5x^3+0{,}5x^2-2x$ schließt mit der ersten Winkelhalbierenden eine mehrteilige Fläche ein. [1]
Bestimme den entstehenden Flächeninhalt !



Lösung:
Die Fläche zwischen zwei Funktionen berechnet man immer, indem man obere minus untere Funktion rechnet und dann integriert. Die Grenzen der Fläche sind die Schnittpunkte der beiden Funktionen. Also Grenzen ausrechnen.

$$f(x) = y$$
$$0{,}5x^3+0{,}5x^2 - x = x \qquad |-x \quad |:0{,}5$$
$$x^3 + x^2 - 6x = 0$$
$$x \cdot (x^2+x-6) = 0$$
$$x_1=0 \quad \vee \quad x^2+x-6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 0$$
$$x_{2,3} = -0{,}5\pm\sqrt{0{,}5^2-(-6)} = -0{,}5 \pm 2{,}5 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = -3 \quad x_3 = 2$$

Spätestens wenn man wie hier *drei* Schnittpunkte erhält, weiß man, dass man *zwei* Teilflächen hat ([selbst wenn man keine Skizze/Zeichnung gemacht hat].

1 Die erste Winkelhalbierende hat die Gleichung: y=x. [Wichtig!!]

$$A_1 = \int_{-3}^{0} f(x)-y\,dx = \int_{-3}^{0} (0{,}5x^3+0{,}5x^2-2x)-(x)\,dx =$$

$$= \int_{-3}^{0} 0{,}5x^3+0{,}5x^2-3x\,dx = \left[\frac{0{,}5}{4}\cdot x^4+\frac{0{,}5}{3}\cdot x^3-\frac{3}{2}\cdot x^2\right]_{-3}^{0} =$$

$$= \left[\frac{0{,}5}{4}\cdot 0^4+\frac{0{,}5}{3}\cdot 0^3-\frac{3}{2}\cdot 0^2\right]-\left[\frac{0{,}5}{4}\cdot(-3)^4+\frac{0{,}5}{3}\cdot(-3)^3-\frac{3}{2}\cdot(-3)^2\right] = 7{,}88\ (LE^2)$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} y-f(x)\,dx = \int_{0}^{2} (x)-(0{,}5x^3+0{,}5x^2-2x)\,dx =$$

$$= \int_{0}^{2} -0{,}5x^3-0{,}5x^2+3x\,dx = \left[-\frac{0{,}5}{4}\cdot x^4-\frac{0{,}5}{3}\cdot x^3+\frac{3}{2}\cdot x^2\right]_{0}^{2} =$$

$$= \left[\frac{0{,}5}{4}\cdot 2^4+\frac{0{,}5}{3}\cdot 2^3-\frac{3}{2}\cdot 2^2\right]-\left[\frac{0{,}5}{4}\cdot 0^4+\frac{0{,}5}{3}\cdot 0^3-\frac{3}{2}\cdot 0^2\right] = \ldots = 2{,}66\ (LE^2)$$

$$\Rightarrow A_{ges} = A_1 + A_2 = 7{,}88 + 2{,}66 = 10{,}54\ (LE^2)$$

Bsp. 4

Die Funktion $f_a(x)=-2x^2+ax+2a$ schließt mit $g_a(x)=x^2-5ax+2a$ eine Fläche A(a) ein. Bestimmen Sie $a>0$ so, dass A(a) einen Flächeninhalt von 13,5(LE²) annimmt.

Lösung:
Wenn man eine Fläche berechnet, braucht man die Integralgrenzen, welches die Schnittpunkte sind.
Daher schneiden wir $f_a(x)$ und $g_a(x)$.

$$f_a(x) = g_a(x)$$
$$-2x^2+ax+2a = x^2-5ax+2a \qquad | -2a$$
$$-2x^2+ax = x^2-5ax \qquad | -x^2+5ax$$
$$-3x^2+6ax = 0 \qquad \text{„3x" ausklammern}$$
$$3x\cdot(-x+2a) = 0$$

$$x_1=0 \quad \vee \quad -x+2a = 0 \qquad | +x$$
$$2a = x_2$$

Wir haben also zwei Integralgrenzen: $x_1=0$ und $x_2=2a$
Da wir *zwei* Grenzen haben, gibt es *eine* Fläche.

Die Fläche berechnet man über:

$$A(a) = \int_{0}^{2a} f_a(x)-g_a(x)\,dx$$

Ein Problem haben wir jedoch noch:
Wir wissen nicht, ob $f_a(x)$ oberhalb von $g_a(x)$ verläuft oder umgekehrt. Daher wissen wir nicht, ob es $\int_{0}^{2a} f_a(x)-g_a(x)\,dx$ heißt oder $\int_{0}^{2a} g_a(x)-f_a(x)\,dx$.

Dummerweise kann man die Funktionen nicht richtig zeichnen, da die Parameter a drinstecken. Man kann natürlich für a eine beliebige Zahl einsetzen und die Funktionen dann vom GTR zeichnen lassen. So kriegt man immerhin ein grobes Gefühl, wie das Ganze aussieht. Natürlich darf man nichts [keine Schnittpunkte oder Flächen] dem GTR entnehmen!

Die einfachste Möglichkeit das Problem zu lösen, wäre die Fläche mit dem Betrag des Integrals zu berechnen.

$$A(a) = \left| \int_0^{2a} f_a(x)-g_a(x)\,dx \right| = \left| \int_0^{2a} (-2x^2+ax+2a)-(x^2-5ax+2a)\,dx \right| =$$
$$= \left| \int_0^{2a} -2x^2+ax+\cancel{2a}-x^2+5ax-\cancel{2a}\,dx \right| = \left| \int_0^{2a} -3x^2+6ax\,dx \right| =$$
$$= \left| \left[-x^3+3ax^2\right]_0^{2a} \right| = \left| \left[-(2a)^3+3a\cdot(2a)^2 \right] - \left[-0^3 + 3a\cdot 0^2 \right] \right| =$$
$$= \left| \left[-(8a^3) + 3a\cdot(4a^2) \right] - \left[0 \right] \right| = \left| -8a^3+12a^3 \right| = |4a^3|$$

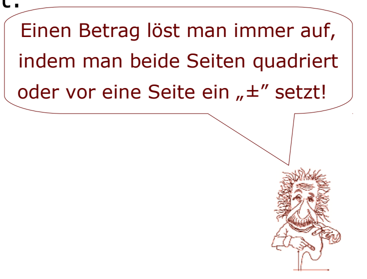
Da A(a) einen Flächeninhalt von 13,5 annehmen soll, „gilt:

$A(a) = |4a^3| = 13{,}5$

$\Rightarrow\ 4a^3 = \pm 13{,}5 \qquad | : 4$

$a^3 = \pm\, 3{,}375 \qquad | \sqrt[3]{\ }$

$a = \pm 1{,}5$

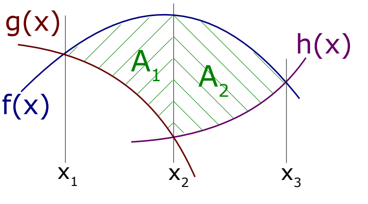


Da laut Aufgabenstellung a>0, ist die richtige Lösung:

$a = 1{,}5$

A.18.04 Fläche zwischen drei Funktionen (∯)

Wir sind ja jetzt bereits die absoluten Superintegratoren und wissen, dass man immer obere Funktion minus untere Funktion rechnen muss.
Was passiert aber, wenn man unten [oder oben] zwei Funktionen hat, so dass die Fläche von insgesamt drei Funktionen eingeschlossen wird ?



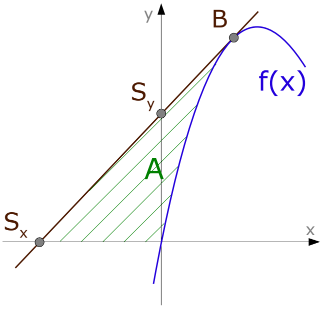
Man muss eben diese Fläche derart in zwei Teilflächen aufspalten, dass man in jeder Teilfläche oben nur eine und unten auch nur eine begrenzende Funktion hat. Die Grenzen der Flächen sind die Schnittpunkte von jeweils zwei Funktionen: ($x_1=f\cap g \quad x_2=g\cap h \quad x_3=f\cap h$)

$$A_1 = \int_{x_1}^{x_2} f(x)-g(x)\,dx \qquad\qquad A_2 = \int_{x_2}^{x_3} f(x)-h(x)\,dx$$

Bsp. 5 [umgewandeltes Bsp.13]

Die Tangente an $f(x) = x^3-8x^2+15x$ im Punkt B(1|8) schließt mit f(x) und der x-Achse eine Fläche ein. Bestimme den entstehenden Flächeninhalt.

Lösung:
Die Fläche wird oben durch die Tangente begrenzt. [Soweit kein Problem]
Unten: links von der y-Achse wird die Fläche von der x-Achse begrenzt, rechts von der y-Achse ist f(x) die untere Grenze. Es entstehen also zwei Teilflächen. Links von der y-Achse ist die eine, auf der rechten Seite der y-Achse ist die andere Teilfläche.
Die Teilfläche links von der y-Achse ist ein Dreieck. Diese Dreiecksfläche haben wir bereits in Bsp.5 berechnet.



$A_1 = A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6 = 9$ LE²

Die Teilfläche rechts von der y-Achse ist eine Fläche zwischen einer Geraden und einer Funktion, deren Integralgrenzen festgelegt sind durch:
Linke Grenze ist x=0 [y-Achse], rechte Grenze ist x=1 [Berührpunkt].

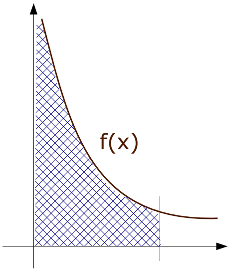
$$A_2 = \int_0^1 y_{Tan} - f(x)\,dx = \int_0^1 (2x-6)-(x^3-8x^2+15x)\,dx = \int_0^1 2x-6-x^3+8x^2-15x\,dx =$$

$$= \int_0^1 -x^3+8x^2-13x+6\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{8}{3}x^3-\frac{13}{2}x^2+6x\right]_0^1 = \ldots = \left[\frac{23}{12}\right]-[0] = \frac{23}{12}$$

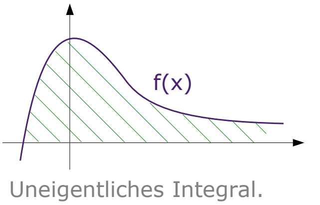
$$\Rightarrow A_{ges} = A_1 + A_2 = 9+\frac{23}{12} = \frac{131}{12} \text{ (LE}^2\text{)}$$

A.18.05 Uneigentliche Integrale (∯)

Beeindruckender Name. Allerdings sind uneigentliche Integrale wie pubertierende Vierzehnjährige. Sie tun nur so, als ob sie Angst einjagen könnten. In Wirklichkeit steckt nicht viel dahinter. Uneigentliche Integrale sind einfach nur Flächeninhalte, die auf der einen Seite unendlich dünn und lang sind, auf einer Seite also von +∞ oder -∞ begrenzt sind.
Uneigentliche Integrale tauchen also immer zwischen Funktionen und deren Asymptoten auf.
Da ganzrationale Funktionen [=Polynome] keine Asymptoten haben, betrachten wir in diesem Unterkapitel ausnahmsweise Bruch-Funktionen und Exponential-Funktionen. [Wenn Sie Glück haben, dürfen Sie also dieses Kapitel überspringen.]



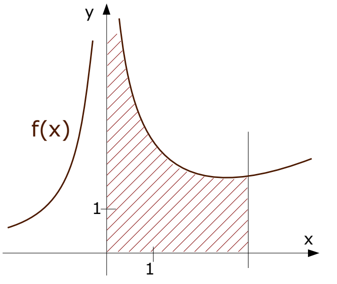
Uneigentliches Integral.
Die Fläche geht entlang der y-Achse ins Unendliche.



Uneigentliches Integral.
Die Fläche geht entlang der x-Achse ins Unendliche.

Bsp. 6

Die Funktion $f(x) = \frac{x^3+2x^2+1}{2x^2}$ bildet mit der Geraden $x=3$ und den Koordinatenachsen eine, ins Unendliche reichende Fläche. Bestimme ihren Inhalt !



Lösung:

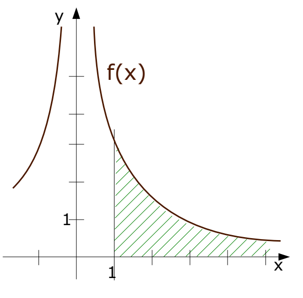
Normalerweise würden wir schreiben: $A = \int_0^3 f(x)\,dx$

Dummerweise darf man 0 gar nicht in die Funktion einsetzen, [da ist ja eine senkrechte Asymptote], daher nehmen wir als linke Grenze nicht Null, sondern „u" und lassen „u" am Schluss gegen Null gehen. Also so:

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{u\to 0} \int_u^3 f(x)\,dx = \lim_{u\to 0} \int_u^3 \frac{x^3+2x^2+1}{2x^2}\,dx = \\
&= \lim_{u\to 0} \int_u^3 \frac{x^3}{2x^2}+\frac{2x^2}{2x^2}+\frac{1}{2x^2}\,dx = \lim_{u\to 0} \int_u^3 \frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2}x^{-2}\,dx = \\
&= \lim_{u\to 0} \left[\frac{1}{4}x^2+x-\frac{1}{2x}\right]_u^3 = \lim_{u\to 0} \left[\left(\frac{1}{4}\cdot 3^2+3-\frac{1}{2\cdot 3}\right)-\left(\frac{1}{4}u^2+u-\frac{1}{2u}\right)\right] = \\
&= \lim_{u\to 0} \left[\left(\frac{61}{12}\right)-\left(\underbrace{\frac{1}{4}u^2}_{\to 0}+\underbrace{u}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{2u}}_{\to \infty}\right)\right] = \left(\frac{61}{12}\right)-(0+0-\infty) = \infty
\end{aligned}
$$

Bsp. 7

Die Funktion $f(x) = \frac{3}{x^2}$ bildet mit der Geraden $x=1$ und der positiven x-Achse eine, ins Unendliche reichende Fläche. Bestimme ihren Inhalt!



Lösung:

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{u\to \infty} \int_1^u f(x)\,dx = \lim_{u\to \infty} \int_1^u \frac{3}{x^2}\,dx = \lim_{u\to \infty} \int_1^u 3\cdot x^{-2}\,dx = \\
&= \lim_{u\to \infty} \left[-3\cdot x^{-1}\right]_1^u = \lim_{u\to \infty} \left[-\frac{3}{x}\right]_1^u = \lim_{u\to \infty} \left[\left(\underbrace{-\frac{3}{u}}_{\to 0}\right)-\left(-\frac{3}{1}\right)\right] = +3
\end{aligned}
$$

Bsp. 8

Die Funktion $f(x) = -e^{-2x}+3e^{-x}$ bildet mit der y-Achse und der positiven x-Achse eine, ins Unendliche reichende Fläche. Bestimme ihren Inhalt!

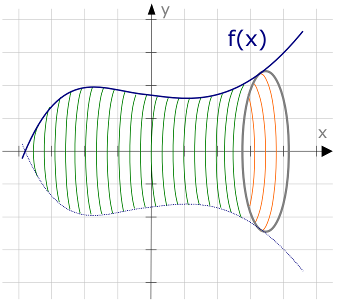
Lösung:

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{u\to \infty} \int_0^u f(x)\,dx = \lim_{u\to \infty} \int_0^u -e^{-2x}+3e^{-x}\,dx = \lim_{u\to \infty} \left[\frac{1}{2}e^{-2x}-3e^{-x}\right]_0^u = \\
&= \lim_{u\to \infty} \left[\left(\frac{1}{2}e^{-2u}-3e^{-u}\right)-\left(\frac{1}{2}e^{-2\cdot 0}-3e^{-0}\right)\right] = \lim_{u\to \infty} \left[\frac{1}{2}\underbrace{e^{-2u}}_{\to 0}-3\underbrace{e^{-u}}_{\to 0}+2{,}5\right] = 2{,}5
\end{aligned}
$$

A.18.06 Rotationsvolumen von Funktionen um die x-Achse (∯)

Wenn sich eine Funktion um die x-Achse dreht, entsteht normalerweise kein Körper, der einen Namen hat, also kein Zylinder oder Kegel oder so … [(Ausnahmen sind in den nächsten Unterkapiteln beschrieben)].
Es entstehen normalerweise nur komische Rotationsgebilde.
Wir Mathematiker nennen sie „*Rotationskörper*".

Wie ich finde, ist diese Namensgebung eine Leistung, die uns Mathematiker von allem irdischen Schnöden weit abhebt.



kreist eine Funktion um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper.

Für das Volumen des entstehenden Rotationskörper gilt dabei die Formel:

Volumen eines Rotationskörpers:

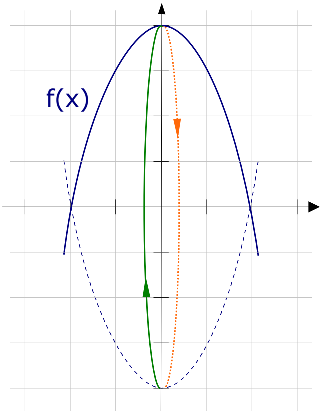
$$V_x = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

a und b sind hierbei die linke und rechte x-Grenzen, wo der Rotationskörper beginnt bzw. endet.
Zu beachten: Die Funktion muss zuerst quadriert werden und erst das Ergebnis integriert werden !!

Bsp. 9
Die Funktion $f(x) = -x^2+4$ bildet mit der x-Achse eine Fläche, die um die x-Achse rotiert. Bestimmen Sie das entstehende Volumen.

Lösung:
Eigentlich wenden wir stupide die Formel an. Das einzige Problem ist, dass wir die Grenzen a und b noch nicht kennen.
Laut Skizze endet der Rotationskörper links und rechts an den Nullstellen der Funktion. Also berechnen wir erst die Nullstellen:

$$f(x) = 0$$
$$-x^2+4 = 0 \qquad | -4 \quad | :(-1)$$
$$x^2 = 4 \qquad | \sqrt{\ }$$
$$x = \pm 2$$



f(x) rotiert um die x-Achse und erzeugt dabei einen Rotationskörper.

Die Grenzen sind also offensichtlich a=-2 und b=2.
Nun versuchen wir mit unserem nahezu unglaublichen

Intellekt, diese Grenzen und diese gegeben Funktion auf die oben genannte Volumenformel anzuwenden:

$$V = \pi\cdot\int_{-2}^{+2}\left[f(x)\right]^2 dx = \pi\cdot\int_{-2}^{+2}\left[-x^2+4\right]^2 dx =$$

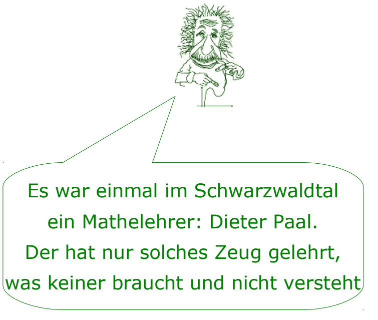
[Die meisten Aufgaben zu Rotationsvolumen dürfen mit dem GTR berechnet werden. Hier machen wir´s natürlich wieder von Hand und „binomieren" zuerst aus.]

$$= \pi\cdot\int_{-2}^{+2} +x^4-8x^2+16\,dx = \pi\cdot\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_{-2}^{+2} =$$

$$= \pi\cdot\left[\left(\frac{1}{5}\cdot2^5-\frac{8}{3}\cdot2^3+16\cdot2\right)-\left(\frac{1}{5}\cdot(-2)^5-\frac{8}{3}\cdot(-2)^3+16\cdot(-2)\right)\right] =$$

$$= \pi\cdot\left[\left(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32\right)-\left(-\frac{32}{5}+\frac{64}{3}-32\right)\right] =$$

$$= \pi\cdot\left[\left(\frac{256}{15}\right)-\left(-\frac{256}{15}\right)\right] = \pi\cdot\left(\frac{512}{15}\right) \approx 107{,}2\ [LE^3]$$ [1].



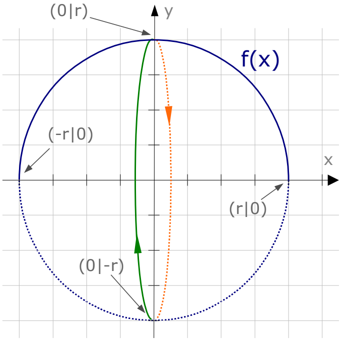
Bsp.10

Bestimmen Sie das Volumen namens „Hugo", das der Rotationskörper einnimmt, der bei Rotation der Funktion $f_r(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ um die x-Achse entsteht. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der Formel für das Kugelvolumen.

Lösung:

Selbstverständlich hätte man die obige Aufgabe auch verständlich formulieren können. Aber das hätte uns, Pseudointelektuellem, keinen Kick gegeben.

Die Funktion $f_r(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ beschreibt einen Halbkreis [mit dem Radius „r"]. Man nennt sie in der Mathematik auch *Halbkreisfunktion*. Jede(r), dessen Hirn noch freie Speicherkapazität hat, kann es sich ja merken, ansonsten ist es nicht absolut lebensnotwendig.



Wir gehen bei dieser Aufgabe also so vor:
Zuerst lassen wir uns vom Taschenrechner eine Skizze machen. [Für „r" irgendeine Zahl einsetzen]. Damit wissen wir ungefähr wie die Funktion aussieht.
Die Integrationsgrenzen a und b sind wieder die Nullstellen der Funktion, da der Rotationskörper „Hugo" bei den Nullstellen endet.
Also berechnen wir zuerst die Nullstellen von $f_r(x)$.

$$f_r(x) = 0$$
$$\sqrt{r^2-x^2} = 0 \qquad |\ (\ )^2$$
$$r^2 - x^2 = 0 \qquad |\ +x^2$$
$$r^2 = x^2 \qquad |\ \sqrt{\ } \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm r$$

$$\Rightarrow\ V = \pi\cdot\int_{-r}^{+r}\left[\sqrt{r^2-x^2}\right]^2 dx = \qquad \text{Wurzel und Quadrat gegenrechnen}$$

---

1 LE³ sind natürlich Längeneinheiten hoch 3 (also cm³ oder so). Statt LE³ kann man auch VE (=Volumeneinheiten) schreiben.

$$= \pi\cdot\int_{-r}^{+r} r^2 - x^2\,dx =$$

$$= \pi\cdot\left[r^2\cdot x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{+r} =$$

Grenzen einsetzen ...

$$= \pi\cdot\left[\left(r^2\cdot r - \frac{1}{3}\cdot r^3\right) - \left(r^2\cdot(-r) - \frac{1}{3}\cdot(-r)^3\right)\right] =$$

$$= \pi\cdot\left[\left(\frac{2}{3}\cdot r^3\right) - \left(-\frac{2}{3}\cdot r^3\right)\right] = \pi\cdot\frac{4}{3}r^3 \quad \Rightarrow$$

„r^2“ ist nur eine Zahl und bekommt beim Integrieren nur ein „x“ angehängt.

Hugo beträgt $\frac{4}{3}\pi\cdot r^3$!

Färtick !

Vergleich von Hugo mit der Formel vom Kugelvolumen:
Die Formelsammlung liefert für´s Kugelvolumen die Formel: $V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3$

Wir sehen: „Ohh, das ist ja das Gleiche wie Hugo.
Wunderbar! Supertoll! Oh Glück und Freude!“

A.18.07 Mittelwerte bzw. Durchschnittswerte (∯)

Den Mittelwert (oder Durchschnitt) einer Funktion berechnet man einfach mit einer Formel.
Im Prinzip braucht man einfach nur das Integral, vor welches man noch den Bruch $^1/_{b-a}$ setzt.

a und b sind hierbei die linke und die rechte x-Grenze.

Die Mittelwertsformel

$$\mathbf{m = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx}$$

Bsp. 11

Bestimmen Sie den durchschnittlichen Funktionswert von $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ im Intervall $I = [-1 ; 4]$.

Lösung:
Die Intervallgrenzen sind auch unsere Integralgrenzen.
Es gilt also: $a=-1$; $b=4$
Um den Mittelwert m zu berechnen, setzt man einfach in die Mittelwertsformel ein:

$$m = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{4-(-1)}\cdot\int_{-1}^{4} f(x)\,dx \quad \leftarrow$$

$$= \frac{1}{4+1}\int_{-1}^{4} x^3 - 6x^2 + 9x\,dx = \frac{1}{5}\cdot\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}4^4 - 2\cdot4^3 + \frac{9}{2}\cdot4^2\right) - \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot(-1)^4 - 2\cdot(-1)^3 + \frac{9}{2}\cdot(-1)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot(8) - \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{27}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

ab hier könnte man theoretisch alles mit dem GTR lösen (falls das erlaubt ist).

Bsp. 12 (ein bisschen anwendungsbezogen)
Durch $T(t) = -0{,}1t^2 + 6t$ wird die Temperatur in einem Backofen beschrieben. Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperatur im Zeitraum von $t_1=5$ bis $t_2=45$.

Lösung:
Die durchschnittliche Temperatur berechnet man über:

$$T_{mittel} = \frac{1}{45-5}\cdot\int_5^{45} T(t)\,dt = \frac{1}{40}\cdot\int_5^{45} -0{,}1t^2+6t\,dt = \frac{1}{40}\left[\frac{-0{,}1}{3}t^3+3t^2\right]_5^{45} =$$

$$= \frac{1}{40}\cdot\left(\frac{-0{,}1}{3}\cdot45^3+3\cdot45^2\right) - \frac{1}{40}\cdot\left(\frac{-0{,}1}{3}\cdot5^3+3\cdot5^2\right) =$$

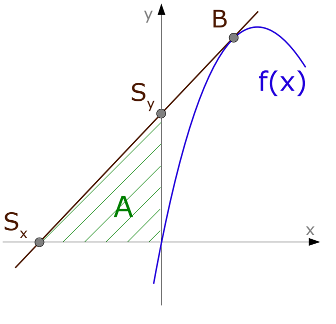
$$= \frac{1}{40}\cdot\left(3057{,}5\right) - \frac{1}{40}\cdot\left(62{,}5\right) = 74{,}375$$

Antwort: Die durchschnittliche Temperatur im Intervall von $t_1=5$ bis $t_2=45$ liegt bei ca. 74,4 (Grad).

A.18.08 Dreiecksflächen (∰)

Bsp.13 [umgewandeltes Bsp.5]
Die Tangente an die Funktion $f(x) = x^3-8x^2+15x$ im Punkt B(1 | 8) schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein. Wie groß ist sie ?

Lösung:
Nun isses ja so: Wenn eine Tangente [welche eine Gerade ist] mit den Koordinatenachsen eine Fläche bildet, dann ist das ja eine Dreiecksfläche. Und die müssen wir nicht zwingend mit dem Integral berechnen wir, sondern können sie mit der Dreiecksformel $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$ berechnen.



Zuerst ableiten: $f'(x) = 3x^2 - 16x + 15$,
Steigung berechnen: $m_T = f'(1) = 3\cdot1^2-16\cdot1+15 = 2$,
dann Tangentengleichung aufstellen.

Möglichkeit 1, über Tangentenformel:
$y_{Tan} = f'(u)\cdot(x-u)+f(u) = f'(1)\cdot(x-1)+f(1) = 2\cdot(x-1)+8 \;\Rightarrow\; y_{Tan} = 2x + 6$

Möglichkeit 2, über $y = mx+b$
$x=1,\ y=8,\ m=f'(1)=2$ [x, y und m in y=mx+b einsetzen]
$y = m\cdot x+b \;\Rightarrow\; 8 = 2\cdot1+b \;\Rightarrow\; b=6 \qquad \Rightarrow y_{Tan} = 2x + 6$

Die Grundlinie des Dreiecks wird durch den

Schnittpunkt S_x der Tangente mit der x-Achse bestimmt, die Höhe durch den Schnittpunkt S_y mit der y-Achse. Also Schnittpunkte ausrechnen.

Tangente ∩ x-Achse:
$y = 0 \;\Rightarrow\; 2x+6 = 0 \;\Rightarrow\; x = -3 \qquad\Rightarrow\qquad S_x(-3 \mid 0)$

Tangente ∩ y-Achse:
$x = 0 \;\Rightarrow\; y = 2\cdot 0+6 \;\Rightarrow\; y = +6 \qquad\Rightarrow\qquad S_y(0 \mid 6)$

Nun können wir die Dreiecksfläche berechnen
[g = Abstand von S_x zum Ursprung = 3,
h = Abstand von S_y zum Ursprung = 6]

$A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6 = 9\ (LE^2)$

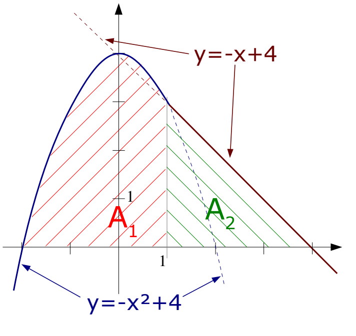
Natürlich könnte man die Dreiecksfläche auch über $A = \int_{-3}^{0} 2x+6\,dx$ berechnen.
[Das wäre nicht so arg viel kürzer geworden, denn die Tangentengleichung hätte man trotzdem aufstellen müssen und den Schnittpunkt mit der x-Achse hätte man auch berechnen müssen.]

A.18.09 Zusammengesetzte Funktionen (∮)

Bsp.14

Sei $f(x) = \begin{cases} -x^2+4x & \text{für } x<1 \\ -x+4 & \text{für } x\geqslant 1 \end{cases}$

f(x) bildet mit der x-Achse eine Fläche. Bestimme ihren Inhalt.



Lösung:
Eine zusammengesetzte Funktion besteht immer aus zwei oder mehreren Funktionen, die jeweils nur in einem bestimmten Bereich gültig sind.
In diesem Fall geht es um die Parabel $y_1=-x^2+4$, die nur links von x=1 gültig ist und die Gerade $y_2=-x+4$, die nur rechts von x=1 gültig ist.
Zuerst zeichnen wir beide Funktionen in ihrem jeweils gültigen Bereich,
danach berechnen wir beide Nullstellen.

$-x^2+4 = 0 \;\Rightarrow\; x_1=2 \quad x_2=-2 \qquad\Rightarrow\qquad N_1(-2|0)$
[x=+2 interessiert nicht, da nur x<1 interessant ist]
$-x+4 = 0 \;\Rightarrow\; x = 4 \qquad\Rightarrow\qquad N_2(4|0)$

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-2}^{4} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} -x^2+4\,dx + \int_{0}^{4} -x+4\,dx =$$
$$= \left[-\tfrac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{1} + \left[-\tfrac{1}{2}x^2+4x\right]_{0}^{4} =$$
$$= \left[\left(-\tfrac{1}{3}\cdot 1^3+4\cdot 1\right)-\left(-\tfrac{1}{3}\cdot(-2)^3+4\cdot(-2)\right)\right] + \left[\left(-\tfrac{1}{2}\cdot 4^2+4\cdot 4\right)-\left(-\tfrac{1}{2}\cdot 0^2+4\cdot 0\right)\right] =$$
$$= \left[\left(\tfrac{11}{3}\right)-\left(\tfrac{-16}{3}\right)\right] + \left[(8)-(0)\right] = [\ 9\ ] + [\ 8\ ] = 17$$

A.18.10 Integralfunktionen (∰)

Eine Integralfunktion ist einfach nur ein stinknormales Integral, in welchem die obere [oder untere] Grenze nicht als Zahl angegeben wird, sondern als Parameter.

Nehmen wir als Beispiel die Funktion $f(x) = 3x^2-6x+5$
Die Stammfunktion davon ist ja $F(x) = x^3-3x^2+5x$

Wenn ich nun die Fläche bestimmen will, die f(x) mit der x-Achse in den Grenzen von x=1 bis x=5 einschließt, berechne ich:
$$A = \int_1^5 f(x)dx = \int_1^5 3x^2-6x+5\,dx = \left[x^3-3x^2+5x\right]_1^5 = 5^3-3\cdot 5^2+5\cdot 5-1^3+3\cdot 1^2-5\cdot 1 = 72$$

Wenn ich nun wieder die Fläche berechnen will, jedoch als obere Grenze nicht 5 haben will, sondern einen Parameter „a", sieht das Ganze ähnlich aus:
$$A = \int_1^a f(x)dx = \int_1^a 3x^2-6x+5\,dx = \left[x^3-3x^2+5x\right]_1^a = a^3-3\cdot a^2+5\cdot a-1^3+3\cdot 1^2-5\cdot 1$$
Nun bleibt im Ergebnis der Parameter „a" übrig.
Streng genommen sollte man also die Fläche nicht „A" nennen, sondern „A(a)".

Nun nähern wir uns der Integralfunktion:

„A" nennen wir jetzt „I", den Parameter „a" nennen wir „x", deswegen müssen wir das „normale" „x" auch irgendwie anders nennen, z.Bsp. „t". Unsere Fläche sieht jetzt also so aus:
$$I(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x 3t^2-6t+5\,dt = \left[t^3-3t^2+5t\right]_1^x = x^3-3\cdot x^2+5\cdot x-1^3+3\cdot 1^2-5\cdot 1$$

So das war im Prinzip alles an einer Integralfunktion.

Bsp.15

Sei $f(x) = x^2+4x+3$ gegeben, sowie $I(x) = \int_0^x f(t)dt$
Bestimme die Nullstellen und Extremstellen von I(x).

Lösung:
Erst `mal kann man die Integralfunktion ausschreiben [wenn man will].

$$I(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x t^2+4t+3\,dt = \left[\tfrac{1}{3}t^3+2t^2+3t\right]_0^x =$$
$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3+2x^2+3x\right]-\left[\tfrac{1}{3}\cdot 0^3+2\cdot 0^2+3\cdot 0\right] = \tfrac{1}{3}x^3+2x^2+3x \quad\Rightarrow\quad I(x) = \tfrac{1}{3}x^3+2x^2+3x$$

Nullstellen:

Eine Nullstelle von I(x) kennt man sofort, denn die untere Grenze der Integralfunktion ist immer eine Nullstelle. In diesem Fall ist die untere Grenze „0", daher ist x=0 tatsächlich eine Nullstelle von I(x). Leider bringt das in diesem Fall nichtsl, denn setzt man I(x)=0, kommt x=0 sowieso als Lösung raus.

$I(x) = 0$

$\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x = 0 \qquad | \cdot 3$

$x^3+6x^2+9x = 0 \qquad$ „x" ausklammern

$x\cdot(x^2+6x+9) = 0$

$\Rightarrow\ x_1=0$ oder $x^2+6x+9=0 \ \Rightarrow\ x_{2,3} =...=-3$ (@)

Die Nullstellen von I(x) sind bei x=0 und x=-3

> Eine Integralfunktion
> $$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$
> hat immer bei x=a eine **Nullstelle.**
>
> Die **Extremstellen** von I(x) sind die Nullstellen von f(x).

Zu den Extremstellen von I(x)

Wenn man die Nullstellen von f(x) wüsste, wäre man bereits fertig, denn die Extremstellen der Integralfunktion sind die Nullstellen der Funktion. Da wir die Nullstellen von f(x) nicht kennen, können wir die Extrema ganz normal berechnen [über die Ableitung von I(x)].

$I(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x \ \Rightarrow\ I'(x)=x^2+4x+3 \qquad$ ←natürlich ist I'(x)=f(x) !

$I'(x)=0 \ \Rightarrow\ x^2+4x+3=0 \ \Rightarrow\ x_1=-1 \ \ x_2=-3$ (@)

Die Extremstellen von I(x) sind bei x=-1 und x=-3.

[y-Werte waren nicht gefragt, wegen Extrem*stellen*].

Bsp.16

Zeigen Sie, dass $I(x)=\int_4^x \frac{t^2+1}{e^t+3}\,dt$ eine einzige Nullstelle besitzt!

Lösung:

Wir werden diesen Beweis in zwei Schritten durchführen.
Zuerst zeigen wir, dass es überhaupt eine Nullstelle gibt.
Danach zeigen wir, dass es keine weitere Nullstelle gibt.

a) I(x) hat bei x=4 eine Nullstelle, da x=4 die untere Grenze der Integralfunktion ist. [Warum ist das überhaupt so? Wenn man den x-Wert 4 betrachtet, geht es um $I(4)=\int_4^4 ...\,dt$. Es geht dabei um ein Integral, dass bei 4 beginnt und bei 4 endet. Dieses Integral / diese Fläche hat auf jeden Fall den Wert 0, völlig egal was für eine Funktion im Integral steht.]

b) I(x) hat keine weitere Nullstelle außer x=4, denn I(x) ist monoton wachsend. Warum ist I(x) monoton wachsend? Eine Funktion ist genau dann mo.wa., wenn

@ über p-q-Formel oder a-b-c-Formel

die Ableitung positiv ist. Die Ableitung von I(x) ist die Funktion im Inneren des Integrals, also: $I'(x)=\frac{x^2+1}{e^x+3}$

Dieser Bruch ist deswegen positiv, weil sowohl Zähler immer positiv ist [ein Quadrat ist positiv, x^2+1 ist erst recht positiv] als auch der Nenner [ein e-Term ist positiv, e^x+3 ist erst recht positiv].

A.18.11 A Gerade dreed sisch um de Aksä (∯)

Wenn sich eine Gerade um die x-Achse dreht, vereinfacht sich die Sache deutlich, denn nun entsteht im kompliziertesten Fall ein Kegelstumpf, im Normalfall ein Zylinder oder Kegel. Die Sache ist bei Gerade derart einfach, dass man das Gerät nun auch um die y-Achse drehen könnte, ohne dass die Aufgabe schwieriger wird.

Bsp.17

Rotiert die Gerade $y=\frac{1}{2}x+2$ innerhalb der Grenzen x=-4 und x=3 um die x-Achse, entsteht ein Körper namens Berta.

a) Bestimmen Sie Bertas Volumen.
b) Die Gerade bildet mit beiden Achsen ein Dreieck, dass um die y-Achse rotiert. Bestimmen Sie das Volumen dieses Rotationskörpers. [Zufällig heißt er „Sidonia".]

Lösung

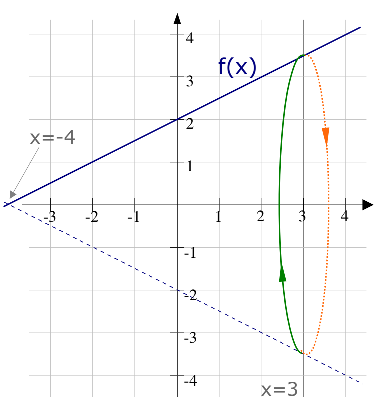
a)

Lösungsmöglichkeit 1)

$$V = \pi\cdot\int_{-4}^{+3}\left[\frac{1}{2}x+2\right]^2 dx = \pi\cdot\int_{-4}^{+3}\frac{1}{4}x^2+2x+4\,dx =$$

$$= \pi\cdot\left[\frac{1}{12}x^3+x^2+4x\right]_{-4}^{+3} = \ldots = 89{,}80 \text{ [VE]}$$

[Die Rechnung erfolgt mit dem GTR oder von Hand, je nachdem was erlaubt ist. Ich verzichte hier auf eine detaillierte Ausführung der Rechnung.]



Lösungsmöglichkeit 2)

Die Grenze x=-4 ist eine Nullstelle der Funktion. Damit entsteht als Rotationskörper ein Kegel.

Laut Formelsammlung gilt für´s Kegelvolumen:

$$V = \frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$$

Der Radius ist in diesem Fall der y-Wert der Gerade beim x-Wert x=3, also gilt: r=f(3)=3,5

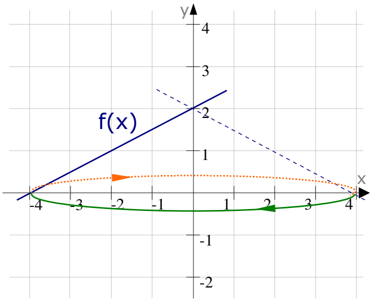
Die Höhe des Kegels geht von x=-4 bis x=3, ⇒ h=7

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\cdot 3{,}5^2\cdot 7 = 89{,}80 \text{ [VE]}$$

Diese Funktion war natürlich sehr einfach. Vor allem bei komplizierteren Funktion geht diese letzte Methode, Möglichkeit 2), meist deutlich schneller, als die erste. Also Merkzettel schreiben und merken!

b)

Diesmal rotiert die Gerade [oder Fläche, falls diese Vorstellung besser ist] um die y-Achse. Man *muss* das Problem also als Kegelvolumen betrachten [es sei denn, man kennt die etwas kompliziertere Formel der Rotation von Funktionen um die y-Achse].



Also, wenn dieses wirklich überaus interessante Dreieck um die y-Achse rotiert, entsteht ein Kegel, dessen Symmetrieachse die y-Achse ist.

Der Radius des Kegels ist r=4

[Die Gerade schneidet die x-Achse bei x=-4!]

Die Höhe des Kegels ist h=2

[Die Gerade schneidet die y-Achse bei y=2!]

Das Kegelvolumen ist also:

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 2 = 33{,}51$ [LE³]

Verwandte Themen:

Stammfunktionen → Kap.A.14

Schaubilder von Stammfunktionen: → Kap.A.27.03, A.27.04