A.24 Funktionsscharen (∰)

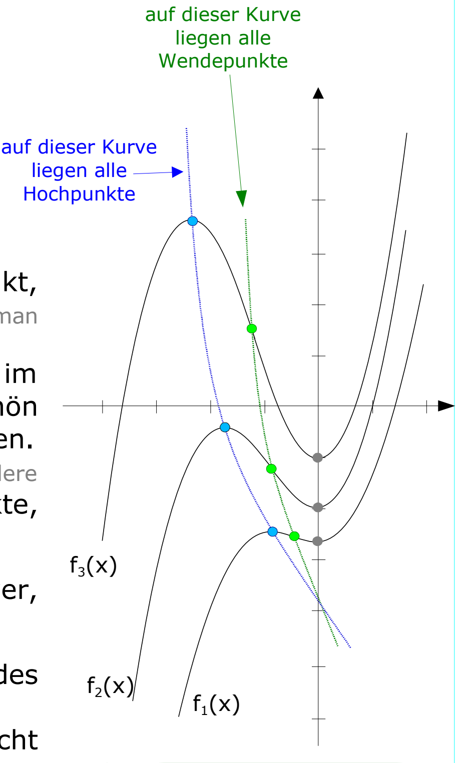
Bemerkung: Im Buch „Kurvenprobleme" gibt es viel Aufgaben zu Funktionen, die einen Parameter enthalten. Falls Sie hier also nicht genug kriegen...

A.24.01 Ortskurven (∰)

Was ist überhaupt eine Ortskurve ?

Ortskurven gibt es nur bei Kurvenscharen.
[Kurvenscharen sind Funktion mit einem Parameter drin.]

Betrachten wir `mal ein Beispiel:
Es sei: $f_t(x) = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}tx^2+t-4$
Nehmen wir `mal an, wir zeichnen diese Funktion für mehrere Werte von t. siehe rechts →



Für jedes „t" erhält man eine Funktion.
Damit erhält man für jedes „t" einen Wendepunkt, einen Tiefpunkt, einen Hochpunkt. [Vielleicht erhält man `mal auch keinen, aber das spielt hier keine Rolle].
Nun liegen all diese Punkte nicht irgendwie wild im Universum herum, sondern reihen sich schön aneinander entlang einer Kurve oder einer Geraden. Diese Kurve [Geraden gelten in Mathe auch als besondere Kurven] sind die **Ortskurven** aller Wendepunkte, Tiefpunkte oder was auch immer.

Ortskurven zu berechnen ist gar nicht so schwer, wie sich das anfangs anhört.

Erst `mal braucht man die Koordinaten des gesuchten Punktes in Abhängigkeit von „t".
Wenn man die Koordinaten des Punktes noch nicht hat, ist das die meiste Arbeit.
Die Gleichung des x-Werts des Punktes löst man nach „t" auf und setzt dies in die y-Gleichung ein.

Bis die Formulierung perfekt ist, machen wir zum Verständnis ein paar Beispiele.

Bsp.1

Es sei $f_t(x) = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}tx^2+t-4$ mit $t>0$.

a) Bestimmen Sie die Ortskurve aller Hochpunkte !
b) Auf welcher Funktion befinden sich alle Tiefpunkte von $f_t(x)$?
c) Bestimmen Sie den geometrischen Ort aller Wendepunkte !

Lösung:
Für die drei Teilaufgaben brauchen wir zuerst die Koordinaten von Hoch-, Tief- und Wendepunkt [in Abhängigkeit von „t“]. Auf die detaillierte Berechnung hiervon möchte ich aus Platz- und Zeitgründen verzichten.
[Falls Sie wünschen, können Sie Hoch-, Tief- und Wendepunkte gerne nachrechnen.]

Für den Hochpunkt von $f_t(x)$ erhält man: $H\left(-t \,\middle|\, \frac{1}{6}t^3+t-4\right)$

Für den Tiefpunkt von $f_t(x)$ erhält man: $T\,(\,0 \mid t-4\,)$

Für den Wendepunkt von $f_t(x)$ erhält man: $W\left(-\frac{1}{2}t \,\middle|\, \frac{1}{12}t^3+t-4\right)$

a) Der Hochpunkt der Funktion liegt bei $H\left(-t \,\middle|\, \frac{1}{6}t^3+t-4\right)$.

Die Koordinaten des Punktes schreibt man sich raus:

$x = -t \qquad\qquad y = \frac{1}{6}t^3+t-4$

$\Rightarrow\ t = -x \qquad$ in y: $\qquad y = \frac{1}{6}(-x)^3+(-x)-4$

Die Gleichung mit „x“ nach dem Parameter „t“ auflösen und in die Gleichung mit „y“ einsetzen.

Vereinfachen und fertig ist die Ortskurve

$$y = -\frac{1}{6}x^3-x-4$$

b) Der Tiefpunkt der Funktion liegt bei $T\,(\,0 \mid t-4\,)$

In der x-Gleichung kommt kein „t“ vor !
Dann ist dieses die Ortskurve aller Tiefpunkte.

$$x_T = 0$$

Enthält eine der Koordinaten des Punktes keinen Parameter, so ist das auch schon die Ortskurve.

c) Der Wendepunkt der Funktion liegt bei $W\left(-\frac{1}{2}t \,\middle|\, \frac{1}{12}t^3+t-4\right)$.

Die Koordinaten des Punktes schreibt man sich raus:

$x = -\frac{1}{2}t \qquad\qquad y = \frac{1}{12}t^3+t-4$

$\Rightarrow\ t = -2x \qquad$ in y: $\qquad y = \frac{1}{12}(-2x)^3+(-2x)-4$

vereinfachen und fertig ist die Ortskurve

$$y_W = \frac{1}{12}(-2x)^3+(-2x)-4 = \frac{1}{12}(-8x^3)-2x-4 \qquad \Rightarrow \qquad y_W = -\frac{2}{3}x^3-2x-4$$

Bsp.2

Gegeben ist die Funktion $f_t(x)$ mit: $f_t(x) = 0{,}25x^4-tx^3+t^2x^2-2{,}25t^2$

a) Bestimme die Ortskurve aller Nullstellen.
b) Bestimme die Ortskurve aller Tiefpunkte.
c) Bestimme die Ortskurve aller Hochpunkte.
d) Bestimme die Ortskurve aller Wendepunkte.

Lösung:

a) Die Ortskurve aller Nullstellen ist natürlich die x-Achse, da Nullstellen logischerweise immer auf der x-Achse liegt. Da ist keine Rechnung notwendig.

b) Erst Tiefpunkte ausrechnen:

$f'_t(x) = x^3 - 3tx^2 + 2t^2x$

$f'_t(x) = 0$

$\Rightarrow\ x^3 - 3tx^2 + 2t^2x = 0$

$x\cdot(x^2 - 3tx + 2t^2) = 0$

$x_1=0$ $\qquad$ $x^2 - 3tx + 2t^2 = 0$

(p-q-Formel) $\qquad$ (a-b-c-Formel)

$x^2 - 3tx + 2t^2 = 0$

$x_{2,3} = +1{,}5t \pm \sqrt{(1{,}5t)^2 - 2t^2} =$

$= 1{,}5t \pm \sqrt{2{,}25t^2 - 2t^2} =$

$= 1{,}5t \pm \sqrt{0{,}25t^2} =$

$= 1{,}5t \pm 0{,}5t$

$x^2 - 3tx + 2t^2 = 0$

$x_{2,3} = \frac{3t \pm \sqrt{(3t)^2 - 4\cdot 1\cdot 2t^2}}{2\cdot 1} =$

$= \frac{3t \pm \sqrt{9t^2 - 8t^2}}{2} =$

$= \frac{3t \pm \sqrt{t^2}}{2} =$

$= \frac{3t \pm t}{2}$

$\Rightarrow\ x_2 = 2t \qquad x_3 = t$

y-Werte:

$y_1 = f_t(0) = 0{,}25\cdot 0^4 - t\cdot 0^3 + t^2\cdot 0^2 - 2{,}25t^2 = -2{,}25t^2$

$y_2 = f_t(2t) = 0{,}25\cdot(2t)^4 - t\cdot(2t)^3 + t^2\cdot(2t)^2 - 2{,}25t^2 =$

$= 4t^4 - 8t^4 + 4t^4 - 2{,}25t^2 = -2{,}25t^2$

$y_3 = f_t(t) = 0{,}25\cdot(t)^4 - t\cdot(t)^3 + t^2\cdot(t)^2 - 2{,}25t^2 =$

$= 0{,}25t^4 - t^4 + t^4 - 2{,}25t^2 = 0{,}25t^4 - 2{,}25t^2$

gucken ob's ein Hoch- oder Tiefpunkt ist:

$f''_t(x) = 3x^2 - 6tx + 2t^2$

$f''_t(0) = 3\cdot 0^2 - 6t\cdot 0 + 2t^2 = 2t^2 > 0 \qquad \Rightarrow T_1(\,0 \mid -2{,}25t^2\,)$

$f''_t(2t) = 3\cdot(2t)^2 - 6t\cdot 2t + 2t^2 = 12t^2 - 12t^2 + 2t^2 = 2t^2 > 0 \qquad \Rightarrow T_2(\,2t \mid -2{,}25t^2\,)$

$f''_t(t) = 3\cdot(t)^2 - 6t\cdot t + 2t^2 = 3t^2 - 6t^2 + 2t^2 = -t^2 < 0 \qquad \Rightarrow H(\,t \mid 0{,}25t^4 - 2{,}25t^2\,)$

Jetzt endlich geht's so richtig mit der Ortskurve los:

Zuerst die Ortskurve von $T_1(\,0 \mid -2{,}25t^2\,)$:
Im x-Wert ist kein „t" drin, damit ist x=0 die Ortskurve.
Jeder dieser Tiefpunkte liegt also auf der y-Achse, $\qquad x = 0$

Die Ortskurve von $T_2(\,2t \mid -2{,}25t^2\,)$:

Den x-Wert: $\quad x=2t$ [nach t auflösen] $\Rightarrow\ t=0{,}5x$

Der y-Wert: $\quad y=-2{,}25t^2$ [t=0,5x einsetzen] $\Rightarrow\ y=-2{,}25\cdot(0{,}5x)^2 = -\frac{9}{16}x^2$

Die Ortskurve aller Tiefpunkte T_2 lautet also: $\qquad y = -\frac{9}{16}x^2$

c) Den Hochpunkt haben wir bereits in b) berechnet, die Berechnung der Ortskurve geht daher schnell.

Die Ortskurve von $H(t \mid 0{,}25t^4-2{,}25t^2)$:
$x=t$ [nach t auflösen] $\Rightarrow$ $t=x$
$y=0{,}25t^4-2{,}25t^2$ [t=x einsetzen] $\Rightarrow$ $y = 0{,}25x^4-2{,}25x^2$
Die Ortskurve aller Hochpunkte H lautet also: $y = 0{,}25x^4-2{,}25x^2$

d) Tja.. Für die Ortskurve aller Wendepunkte, müssen wir zuerst natürlich noch die Wendepunkte berechnen: $f''_t(x)=3x^2-6tx+2t^2$

$f''_t(x) = 0$
$\Rightarrow 3x^2 - 6tx + 2t^2 = 0$

(p-q-Formel) (a-b-c-Formel)

$3x^2-6tx+2t^2 = 0 \quad | :3$
$x^2-2tx+\frac{2}{3}t^2 = 0$
$x_{1,2}=t\pm\sqrt{t^2-\frac{2}{3}t^2} =$
$= t\pm\sqrt{\frac{1}{3}t^2} \approx$
$\approx t\pm0{,}58t$

$3x^2-6tx+2t^2 = 0$
$x_{1,2}=\frac{6t\pm\sqrt{(6t)^2-4\cdot3\cdot2t^2}}{2\cdot3} =$
$= \frac{6t\pm\sqrt{12t^2}}{6} \approx$
$\approx \frac{6t\pm3{,}46t}{6}$

$\Rightarrow$ $x_1=1{,}58t$ $x_2=0{,}42t$

y-Werte:
$f_t(1{,}58t) = 0{,}25\cdot(1{,}58t)^4-t\cdot(1{,}58t)^3+t^2\cdot(1{,}58t)^2-2{,}25t^2 = 0{,}11t^4 - 2{,}25t^2$
$f_t(0{,}42t) = 0{,}25\cdot(0{,}42t)^4-t\cdot(0{,}42t)^3+t^2\cdot(0{,}42t)^2-2{,}25t^2 = 0{,}11t^4 - 2{,}25t^2$

gucken ob's tatsächlich Wendepunkte sind:
$f'''_t(x) = 6x - 6t$

$f'''_t(1{,}58t) = 6\cdot1{,}58t-6t = 3{,}48t$ $\Rightarrow$ $W_1(1{,}58t \mid 0{,}11t^4-2{,}25t^2)$
$f'''_t(0{,}42t) = 6\cdot0{,}42t-6t = -3{,}48t$ $\Rightarrow$ $W_2(0{,}42t \mid 0{,}11t^4-2{,}25t^2)$

Die Ortskurve von $W_1(1{,}58t \mid 0{,}11t^4-2{,}25t^2)$:
$x=1{,}58t$ [nach t auflösen] $\Rightarrow$ $t=0{,}633x$
$y=0{,}11t^4-2{,}25t^2$ [t=0,633x einsetzen]
$\Rightarrow y = 0{,}11(0{,}633x)^4-2{,}25(0{,}633x)^2$
Die Ortskurve aller Tiefpunkte T_2 lautet also: $y = 0{,}018x^4 - 0{,}902x^2$

Die Ortskurve von $W_2(0{,}42t \mid 0{,}11t^4-2{,}25t^2)$:
$x=0{,}42t$ [nach t auflösen] $\Rightarrow$ $t=2{,}381x$
$y=0{,}11t^4-2{,}25t^2$ [t=2,381x einsetzen]
$\Rightarrow y = 0{,}11(2{,}381x)^4-2{,}25(2{,}381x)^2$
Die Ortskurve aller Tiefpunkte T_2 lautet also: $y = 3{,}535x^4 - 12{,}756x^2$

Ortskurven kann man natürlich nicht nur von Hoch-, Tief- und Wendepunkten berechnen, sondern auch mit irgendwelchen Schnittpunkten von zwei Funktionen und im Prinzip von jedem Punkt, in dessen Koordinaten ein Parameter vorkommt.
[Im x-Wert immer nach „t" auflösen, in den y-Wert einsetzen... un fertig isch die Kurfe]

A.24.02 **Funktionsanalyse** (von Hand oder mit GTR) (∰)

Bsp.3

$f_t(x) = \frac{1}{t}x^3 + x^2 - 6tx \qquad t \neq 0$

a) Bestimmen Sie $f_t'(x)$, $f_t''(x)$ und $f_t'''(x)$, zeichnen Sie $f_1(x)$.
b) Untersuchen Sie $f_t(x)$ auf Symmetrie.
c) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von $f_t(x)$.
d) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f_t(x)$. Für welchen Wert von t haben die beiden äußersten Nullstellen den Abstand d=10?
e) Bestimmen Sie die Extrempunkte von $f_t(x)$.
Für welchen Wert von t hat der Hochpunkt den y-Wert y=4?
f) Bestimmen Sie den Wendepunkt W von $f_t(x)$.
Für welchen Wert von t liegt W auf der ersten Winkelhalbierenden?
g) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an $f_t(x)$ im Punkt B(t | $f_t(t)$).
Für welchen Wert von t hat diese Tangente die Steigung m=-2?
h) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von $f_t(x)$ mit der Parabel $p_t(x)=-x^2-3tx$.
Gibt es einen Wert von t, so dass es weniger als drei Schnittpunkte gibt?
i) $f_t(x)$ schließt mit $p_t(x)$ eine zweiteilige Fläche ein.
Bestimmen Sie ihren Flächeninhalt A(t).
Für welche Werte von t nimmt die Fläche einen Inhalt von 6(LE²) ein?
j) Für welchen Wert von t ist die Steigung im Punkt Ü(3t–3|f(3t–3)) minimal?
k) Auf welcher Kurve liegen alle Wendepunkte ? [=Ortskurve aller Wendepunkte]
Bestimme den Schnittpunkt dieser Kurve mit $f_t(x)$.

Lösung:

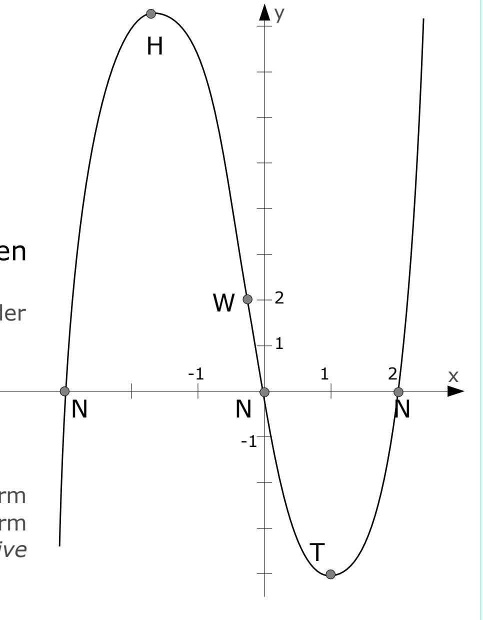
a) Beginn: „ Ojeojeojeeh !! "
Ableitungen:

$f_t'(x) = \frac{3}{t}x^2 + 2x - 6t$

$f_t''(x) = \frac{6}{t}x + 2$

$f_t'''(x) = \frac{6}{t}$

Für die Skizze von $f_1(x)$ macht man am besten eine Wertetabelle von $f_1(x)=x^3+x^2-6x$.
[Die N,H,T,W erhält man natürlich erst am Ende der Funktionsanalyse, also erst nach Teilaufgabe f)]



b) keine Symmetrie erkennbar.
[gerade und ungerade Potenzen vorhanden]

c) Verhalten für $x \to \pm\infty$ [wir setzen für den x-Term mit der höchsten Potenz +∞ bzw. -∞ ein. Der Term „$^1/_t$" interessiert nicht, denn es ist nur irgendeine *positive* Zahl und ändert nichts.]

für $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$
für $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$ [es gibt offensichtlich keine Asymptoten]

d) Nullstellen: $f_t(x) = 0$

$$\frac{1}{t}x^3+x^2-6tx = 0 \qquad |\cdot t \qquad | \text{ x ausklammern}$$

$$x\cdot(x^2+tx-6t^2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1=0 \quad \vee \quad x^2+tx-6t^2 = 0$$

(p-q-Formel)

$$x^2+tx-6t^2 = 0$$

$$x_{2,3} = -\frac{t}{2}\pm\sqrt{\frac{t^2}{4}+6t^2} = -\frac{t}{2}\pm\sqrt{\frac{25t^2}{4}} = -\frac{t}{2}\pm\frac{5t}{2}$$

(a-b-c-Formel)

$$x^2+tx-6t^2 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-t\pm\sqrt{t^2-4\cdot 1\cdot(-6t^2)}}{2\cdot 1} = \frac{-t\pm\sqrt{25t^2}}{2} = \frac{-t\pm 5t}{2}$$

$$\Rightarrow x_2=-3t \qquad x_3=2t$$

$$\Rightarrow \qquad N_1(0|0) \quad N_2(-3t|0) \quad N_3(2t|0)$$

Nun sollen die beiden äußersten Nullstellen einen Abstand von 10 (LE) haben. Die beiden äußersten Nullstellen sind N_2 und N_3.
Deren Abstand ist natürlich die Differenz der beiden x-Werte, also:
$d = 2t-(-3t) = 5t$. Da der Abstand 10 sein soll, gilt $5t=10 \Rightarrow t=2$.

e) Extrempunkte: $f_t'(x) = 0$

$$\frac{3}{t}x^2+2x-6t = 0$$

(p-q-Formel)

$$\frac{3}{t}x^2+2x-6t = 0 \qquad |\cdot\frac{t}{3}$$

$$x^2+\frac{2t}{3}x-2t^2 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{t}{3}\pm\sqrt{\frac{t^2}{9}+2t^2} = -\frac{t}{3}\pm\sqrt{\frac{t^2}{9}+\frac{18t^2}{9}} = -\frac{t}{3}\pm\sqrt{\frac{19t^2}{9}} = -\frac{1}{3}t\pm\sqrt{\frac{19}{9}}\cdot t$$

$$= -0{,}33t \pm 1{,}45t$$

(a-b-c-Formel)

$$\frac{3}{t}x^2+2x-6t = 0 \qquad |\cdot t$$

$$3x^2+2tx-6t^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2t\pm\sqrt{(2t)^2-4\cdot 3\cdot(-6t^2)}}{2\cdot 3} = \frac{-2t\pm\sqrt{4t^2+72t^2}}{6} = \frac{-2t\pm\sqrt{76t^2}}{6} = \frac{-2t\pm\sqrt{76}\cdot t}{6} = \frac{-2t\pm 8{,}72\cdot t}{6}$$

$$\Rightarrow x_1\approx +1{,}12t \qquad x_2\approx -1{,}79t$$

Jetzt müssen wir wissen, ob es sich um Hoch- oder Tiefpunkte handelt. Dafür setzen wir schlauerweise den x-Wert in f''(x) ein.
Desweiteren setzen wir den selben x-Wert in f(x) ein um den y-Wert zu erhalten.

$f_t''(1{,}12t) = 8{,}72 \ > 0 \Rightarrow$ T (1,12t | ?)
$f_t''(-1{,}79t) = -8{,}74 < 0 \quad \Rightarrow$ H(-1,79t | ?)

$f(1{,}12t) = ... = -4{,}06t^2 \quad \Rightarrow \quad T(1{,}12t \mid -4{,}06t^2)$
$f(-1{,}79t) = ... = 8{,}21t^2 \quad \Rightarrow \quad H(-1{,}79t \mid 8{,}21t^2)$

Der Hochpunkt soll den y-Wert $y_H=4$ haben.
Damit muss natürlich gelten: $8{,}21t^2=4 \Rightarrow t^2\approx0{,}487 \Rightarrow t=\pm0{,}70$

f) Wendepunkte: $f_t''(x) = 0$
$\frac{6}{t}x+2 = 0 \Rightarrow ... \Rightarrow x=-\frac{t}{3}$
$f_t'''\left(-\frac{t}{3}\right) = \frac{6}{t} \neq 0 \quad \Rightarrow$ Wendepunkt
$f_t\left(-\frac{t}{3}\right) \approx 2{,}08t^2 \quad \Rightarrow \quad W(-0{,}33t \mid 2{,}08t^2)$

Der Wendepunkt soll auf der ersten Winkelhalbierenden liegen. Nun weiß ja spätestens seit dem Zeitalters des Kindergartens wirklich jeder von uns, dass die erste Winkelhalbierende einfach die Gerade mit der Gleichung y=x ist.
Und weil wir so cool sind und das wissen, setzen wir jetzt noch die Koordinaten des Wendepunktes ein [logischerweise den x-Wert für „x" und y-Wert für „y"].

$y = x \quad \Rightarrow \quad 2{,}08t^2 = -0{,}33t$

Diese Gleichung lösen wir nach t auf.

$2{,}08t^2 = -0{,}33t \qquad | +0{,}33t$
$2{,}08t^2+0{,}33t = 0 \qquad$ t ausklammern
$t\cdot(2{,}08t+0{,}33) = 0$

$t_1=0 \qquad 2{,}08t+0{,}33 = 0$
$\qquad 2{,}08t = -0{,}33 \quad \Rightarrow \quad t_2 \approx 0{,}159$

g) Die Tangente an $f_t(x)$ in $B(t|f_t(x))$ berechnen wir über die Tangentengleichung.
[der Weg über y=mx+b wäre natürlich auch möglich]

$y_{Tan} = f'(u)\cdot(x-u) + f(u) \qquad$ (hier: u=t)
$y_{Tan} = f'(t)\cdot(x-t) + f(t)$

Wir brauchen f'(t): $f_t'(t) = \frac{3}{t}\cdot t^2+2t-6t = 3t+2t-6t = -t$

sowie: $f_t(t) = \frac{1}{t}\cdot t^3+t^2-6t\cdot t = t^2+t^2-6t^2 = -4t^2$

beiden setzen wir in y_{Tan} ein
$\Rightarrow \quad y_{Tan} = -t\cdot(x-t)+(-4t^2) = -tx+t^2-4t^2 = -tx-3t^2$

Nun soll diese Tangente die Steigung m=2 haben. Die Steigung der Tangente kann man ablesen. Wie bei jeder Geraden ist es die Zahl (bzw. der Term) vor dem „x". In diesem Fall ist es also „-t".

Es muss also offensichtlich gelten: $-t = 2 \Rightarrow t=-2$

h) Schnittpunkte berechnet man natürlich immer, indem man die beiden Funktionen gleichsetzt.

$\Rightarrow \quad f_t(x) = p_t(x)$

$\frac{1}{t}x^3+x^2-6tx = -x^2-3tx \qquad | \cdot t$

$x^3+tx^2-6t^2x = -tx^2-3t^2x \qquad | +tx^2+3t^2x$

$x^3+2tx^2-3t^2x = 0 \qquad$ „x" ausklammern

$x\cdot(x^2+2tx-3t^2) = 0$

$x_1=0 \qquad x^2+2tx-3t^2 = 0$

(p-q-Formel)

$x^2+2tx-3t^2 = 0$

$x_{2,3}=-t\pm\sqrt{t^2-(-3t^2)}$

$= -t\pm\sqrt{4t^2}$

$= -t\pm 2t$

(a-b-c-Formel)

$x^2+2tx-3t^2 = 0$

$x_{2,3}=\frac{-2t\pm\sqrt{(2t)^2-4\cdot1\cdot(-3t^2)}}{2\cdot1} = \frac{-2t\pm\sqrt{4t^2+12t^2}}{2} = \frac{-2t\pm\sqrt{16t^2}}{2} = \frac{-2t\pm4t}{2}$

$x_2=t \qquad x_3=-3t$

Wir haben drei x-Werte, also haben wir auch drei Schnittpunkte.
Allerdings brauchen wir noch die zugehörigen y-Werte, die man ja bekanntlich erhält, indem man die x-Werte in eine der beiden Gleichungen einsetzt.
[Ich setze sie in $p_t(x)$ ein, das erscheint mit einfacher.]

$y_1 = p_t(x_1) = p_t(0) = -0^2-3t\cdot0 = 0 \qquad \Rightarrow S_1(\ 0 \mid 0\ )$

$y_2 = p_t(x_2) = p_t(t) = -t^2-3t\cdot t = -t^2-3t^2 = -4t^2 \qquad \Rightarrow S_2(\ t \mid -4t^2)$

$y_3 = p_t(x_3) = p_t(t) = -(-3t)^2-3t\cdot(-3t) = -(9t^2)+9t^2 = 0 \qquad \Rightarrow S_3(-3t \mid 0\ )$

Gibt es einen Wert für t, so dass es weniger als drei Schnittpunkte gibt?
Wir haben ja drei x-Werte erhalten. Damit es nun weniger Schnittpunkte geben soll, müssten z.B. zwei x-Werte gleich sein, also zusammenfallen.

$x_1=x_2 \;\Rightarrow\; 0=t$ (t=0 ist jedoch [laut Aufgabenstellung] nicht zulässig)

$x_1=x_3 \;\Rightarrow\; 0=-3t \;\Rightarrow\; t=0$ (auch wieder keine Lösung)

$x_2=x_3 \;\Rightarrow\; t=-3t \;\Rightarrow\; 4t=0 \;\Rightarrow\; t=0$ (k.Lös.)

Es gibt keinen Wert für t>0, so dass man weniger als drei Schnittpunkte erhält!

i) Um die Fläche zwischen zwei Funktionen zu berechnen, braucht man zuerst die Schnittpunkte.
Welch Glück, dass wir die bereits in der letzten Teilaufgabe berechnet haben.

$(x_1=-3t \quad x_2=0 \quad x_3=t)$

Jetzt brauchen wir natürlich noch das Integral. (Im Inneren des Integrals zieht man immer die untere Funktion von der größeren ab).
Betrachten wir die linke Teilfläche, die sich innerhalb der Grenzen x=-3t und x=0 befindet.
Diese Fläche wird oben von $f_t(x)$ begrenzt und unterhalb von $p_t(x)$. Also:

$A_1 = \int_{-3t}^{0} f_t(x)-p_t(x)\,dx = \int_{-3t}^{0} \left(\frac{1}{t}x^3+x^2-6tx\right)-\left(-x^2-3tx\right)dx =$ [vereinfachen] $=$

$= \int_{-3t}^{0} \frac{1}{t}x^3+x^2-6tx+x^2+3tx\,dx = \int_{-3t}^{0} \frac{1}{t}x^3+2x^2-3tx\,dx =$ [integrieren] $=$

$= \left[\frac{1}{4t}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{3t}{2}x^2\right]_{-3t}^{0}$ = [Grenzen einsetzen] =

$= \left[\frac{1}{4t}\cdot 0^4+\frac{2}{3}\cdot 0^3-\frac{3t}{2}\cdot 0^2\right]-\left[\frac{1}{4t}\cdot(-3t)^4+\frac{2}{3}\cdot(-3t)^3-\frac{3t}{2}\cdot(-3t)^2\right]$ = [vereinfachen] =

$= [0+0-0]-\left[\frac{1}{4t}\cdot(81t^4)+\frac{2}{3}\cdot(-27t^3)-\frac{3t}{2}\cdot(9t^2)\right] =$

$= 0-\left[\frac{81}{4}t^3-18t^3-\frac{27}{2}\cdot t^3\right] = 0-\left[-\frac{45}{4}t^3\right] = \frac{45}{4}t^3$

Und habt ihr in eurem kurzen und langweiligen Leben jemals `was Schärferes, als diese Teilfläche gesehen? Natürlich nicht! Weil's so schön war, berechnen wir noch die zweite Fläche.

Bei dieser zweiten Fläche liegt $p_t(x)$ oberhalb und $f_t(x)$ begrenzt die Fläche am unteren Rand.
Damit sieht's so aus:

$A_2 = \int_0^t p_t(x)-f_t(x)\,dx = \int_0^t (-x^2-3tx)-\left(\frac{1}{t}x^3+x^2-6tx\right)dx$ = [vereinfachen] =

$= \int_0^t -x^2-3tx-\frac{1}{t}x^3-x^2+6tx\,dx = \int_0^t -\frac{1}{t}x^3-2x^2+3tx\,dx$ = [integrieren] =

$= \left[-\frac{1}{4t}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{3t}{2}x^2\right]_0^t$ = [Grenzen einsetzen] =

$= \left[-\frac{1}{4t}\cdot t^4-\frac{2}{3}\cdot t^3+\frac{3t}{2}\cdot t^2\right]-\left[-\frac{1}{4t}\cdot 0^4-\frac{2}{3}\cdot 0^3+\frac{3t}{2}\cdot 0^2\right]$ = [vereinfachen] =

$= \left[-\frac{1}{4}t^3-\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}\cdot t^3\right] = \frac{7}{12}t^3$

Nun haben wir die beiden Teilflächen.

Wissenschaftliche Untersuchungen haben ergeben, dass man zwei Teilflächen addieren kann, wenn man eine große Fläche haben will. Diese herrlichen neuen Erkenntnisse möchten wir uns natürlich nicht entgehen lassen und schreiben daher:

$A_{ges} = A_1+A_2 = \frac{45}{4}t^3+\frac{7}{12}t^3 = \frac{71}{6}t^3$ ← herrlich

Für welche Werte von t nimmt diese Fäche einen Inhalt von 6(LE) ein?
Na ja ... wir setzen die Fläche A_{ges} dann halt eben =6

$A_{ges} = 6$
$\frac{71}{6}t^3 = 6 \quad |\cdot 6$
$71t^3 = 36 \quad |:71$
$t^3 \approx 0{,}5 \quad |\sqrt[3]{\ }$
$t \approx 0{,}794$

j) Erst mal ein paar kleine Infos vorab:
Es gibt in der Formulierung zwei wichtige Stichworte:
→ „Steigung": das ist immer die erste Ableitung der Funktion
→ „minimal": um Egal-Was minimal hinzukriegen, muss man es ableiten und =Null setzen
[oder das Minimum mit dem GTR berechnen lassen, sofern das erlaubt ist]

Verlangt ist ja, dass „die Steigung im Punkt Ü minimal ist".
Wir machen das also so, dass wir zuerst die Steigung im Punkt Ü berechnen und uns erst später dann um das „minimal-Zeug" kümmern.

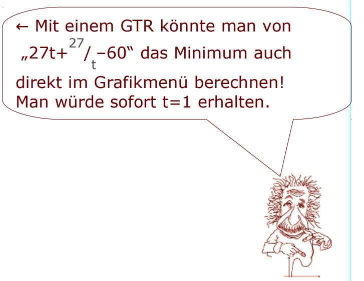
Die Steigung der Funktion im Punkt Ü:

$f_t'(x_Ü) = f_t'(3t-3) = \frac{3}{t}\cdot(3t-3)^2+2\cdot(3t-3)-6t$ = [ausrechnen] =

$= \frac{3}{t}\cdot(9t^2-18t+9)+6t-6-6t \;=\; \frac{27t^{\cancel{2}}}{\cancel{t}}-\frac{54\cancel{t}}{\cancel{t}}+\frac{27}{t}-6 \;=\; 27t-54+\frac{27}{t}-6 \;=\; 27t+\frac{27}{t}-60$

So. Nun haben wir die Steigung im Punkt Ü. Diese nennen wir m(t) und die soll jetzt minimal sein. Also brauchen wir das Minimum von $m(t)=27t+\frac{27}{t}-60$, welches man immer berechnet, in dem man die Ableitung des Terms =0 setzt.

Wir werden also die Ableitung $27t+\frac{27}{t}-60$ nochmal ableiten und Null setzen!



Um das Minimum von $m(t)=27t+\frac{27}{t}-60$ zu berechnen, schreiben wir m(t) noch kurz um:

$m(t) = 27t+27t^{-1}-60$

$\Rightarrow\; m'(t) = 27+(-1)\cdot 27t^{-2} = 27-\frac{27}{t^2}$

$m'(t) = 0$

$27-\frac{27}{t^2} = 0 \qquad | \cdot t^2$

$27t^2-27 = 0 \qquad | +27 \qquad | : 27$

$t^2 = 1 \qquad | \sqrt{\;}$

$t = \pm 1$

So. Die Werte von „t“ haben wir. Jetzt sollten wir nur noch wissen, ob da ein Maximum oder ein Minimum vorliegt. Dafür müssen wir diese beiden Werte von „t“ in die zweite Ableitung von m(t) einsetzen.

$m'(t) = 27-\frac{27}{t^2} = \text{[umschreiben]} = 27-27t^{-2}$

$\Rightarrow\; m''(t) = 0-27\cdot(-2)t^{-3} = 54t^{-3} = \frac{54}{t^3}$

$m''(1) = \frac{54}{1^3} = 54 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad$ Minimum bei t=+1

$m''(-1) = \frac{54}{(-1)^3} = -54 < 0 \qquad \Rightarrow \qquad$ Maximum bei t=−1

Die Antwort: Der gesuchte Wert für t wurde bei t=1 gefunden, weil da ein Minimum der Steigung vorliegt. Jetzt ist alles wieder gut!

k) Auf welcher Kurve liegen alle Wendepunkte ?
Ganz gleich ob nach der Ortskurve von einem Wendepunkt, Hoch- oder Tief- oder irgendeinem Schnittpunkt gefragt ist, man wendet immer den gleichen „Trick“ an:
Zuerst braucht man x- und y-Wert von diesem Punkt.

In unserem Fall haben wir das schon: $W(-0{,}33t \mid 2{,}08t^2)$

Wir schreiben noch `mal raus: x-Wert: $x = -0{,}33t$
y-Wert $y = 2{,}08t^2$

Nun lösen wir in der „x-Gleichung“ nach t auf. $x=-0{,}33t \;\Rightarrow\; t=-\frac{1}{0{,}33}x \approx -3x$

Dieses t setzen wir die „y-Gleichung“ ein $y=2{,}08\cdot(-3x)^2 = +18{,}72x^2$

Das war's auch schon. Alle Wendepunkte liegen auf der Kurve: $y=18{,}72x^2$

Die Frage nach dem Schnittpunkt der Ortskurve mit der Funktion $f_t(x)$ ist natürlich eine Scherzfrage, denn: die Ortskurve ist ja die Kurve auf der alle Wendepunkte der Funktion liegen.
Diese Kurve hat ja logischerweise mit $f_t(x)$ alle Wendepunkte gemeinsam!
Also müssen die Wendepunkte auch die Schnittpunkte sein.

$\Rightarrow$ Die gesuchten Schnittpunkte sind: $W(-0{,}33t \mid 2{,}08t^2)$

Bsp.4

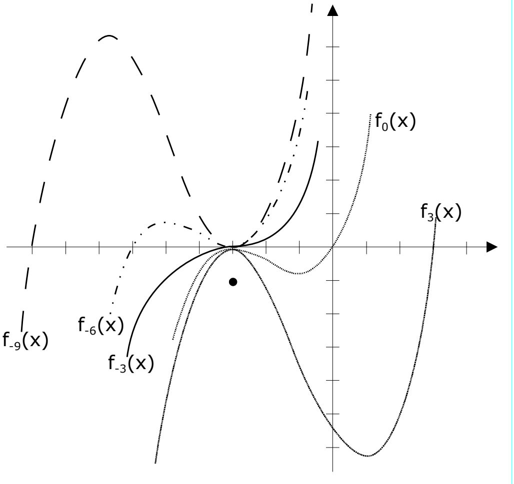
Ein hochbezahlter Mathematiker soll eine futuristische Funktion konzipieren.
Sein wirklich alle überzeugendes Resultat ist dieses:

$$f_t(x) = 0{,}2\cdot(x+3)^2\cdot(x-t)$$

a) Zeichnen Sie $f_{-9}(x)$, $f_{-6}(x)$, $f_{-3}(x)$, $f_0(x)$ und $f_3(x)$.
b) Für für welche Werte von t besitzt f(x) nur eine Nullstelle?
c) Für welche Werte von t, liegt der Hochpunkt von $f_t(x)$ auf der x-Achse ?
d) Für welchen Wert von t, liegt der Wendepunkt auf der y-Achse ?
e) Für welchen Wert von t>0, schließt $f_t(x)$ mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt von $\frac{125}{12}$ [FE] ein ?
f) Eine quadratische Parabel hat die gleichen Nullstellen wie $f_6(x)$ und schließt mit der x-Achse auch noch den gleichen Flächeninhalt ein. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Parabel.
g) Eine Gerade g geht durch den Tiefpunkt von $f_{-9}(x)$ und hat mit $f_{-9}(x)$ einen einzigen weiteren Berührpunkt gemeinsam. Bestimmen Sie die Gleichung von g!

Lösung

a) Skizze: Ich glaube, fünf Funktionen mit dem Taschenrechner zu zeichnen, wird Sie nicht unbedingt überfordern.
Mit dem GTR ist es sehr einfach. Ohne GTR muss man fünf Wertetabellen machen, Das ist zwar aufwändig, aber intellektuell nicht höchstes Niveau.
Aufgaben, in denen Ihr zeichnen müsst, sind meist auch nur ein Wink mit dem Zaunpfahl, damit Ihnen etwas für die nächsten Teilaufgaben auffällt.



b) Nullstellen:
Wir berechnen einfach 'mal die Nullstellen und lassen uns überraschen.

$$f_t(x) = 0$$
$$0{,}2\cdot(x+3)^2\cdot(x-t) = 0$$

$(x+3)^2 = 0$ $\qquad$ $(x-t) = 0$
$x+3 = 0$ $\qquad$ $x_2 = t$
$x_1 = -3$

Man erhält offensichtlich immer zwei x-Werte. Die einzige Möglichkeit, dass es nicht zwei verschiedene Nullstellen sind, ist, wenn t=-3. Dann fallen beide Nullstellen zusammen. [Übrigens haben Sie ja genau diese Funktion bereits gezeichnet!]

c) Extrempunkte (Hochpunkt auf der x-Achse):
Wenn man diese Teilaufgabe rechnerisch lösen will, wird man alt und grau. Dafür sind die Zeichnungen gut. Es sollte Ihnen auffallen, dass für alle t<-3 im Punkt (-3|0) ein Tiefpunkt ist und für alle t>-3 bei (-3|0) der Hochpunkt (welcher natürlich auf der x-Achse liegt [y=0]).
Also: Für t<-3 liegt der Hochpunkt links von x=-3 und oberhalb der x-Achse.
Für t>-3 liegt der Hochpunkt immer bei (-3|0).
Die Antwort lautet also: Für t<-3 liegt der Hochpunkt immer auf der x-Achse.

d) Wendepunkt:
Hier kann man nichts mehr aus der Zeichnung erkennen, wir müssen rechnen. Wenn der Wendepunkt auf der y-Achse liegen soll, muss sein x-Wert = 0 sein. Wir brauchen also die Koordinaten vom Wendepunkt, also f''(x) = 0 setzen.

$$\begin{aligned} f_t(x) &= 0{,}2\cdot(x+3)^2\cdot(x-t) \\ &= 0{,}2\cdot(x^2+6x+9)\cdot(x-t) \\ &= 0{,}2\cdot(x^3+6x^2+9x - tx^2-6tx-9t) \\ &= 0{,}2x^3+1{,}2x^2+1{,}8x-0{,}2tx^2-1{,}2tx-1{,}8t \\ f_t'(x) &= 0{,}6x^2+2{,}4x+1{,}8-0{,}4tx-2{,}4t \\ f_t''(x) &= 1{,}2x+2{,}4-0{,}4t \end{aligned}$$

$$f_t''(x) = 0$$

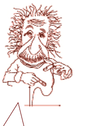
$$\Rightarrow\ 1{,}2x+2{,}4t-0{,}4t = 0 \quad\Rightarrow\quad 1{,}2x=0{,}4t-2{,}4t \quad\Rightarrow\quad x_W = \frac{0{,}4t-2{,}4}{1{,}2}$$

Der Wendepunkt liegt auf der y-Achse für $\Leftrightarrow\ x_w = 0$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{0{,}4t-2{,}4}{1{,}2} = 0 \qquad |\cdot 1{,}2$$

$$0{,}4t-2{,}4 = 0 \qquad |+2{,}4 \quad |:0{,}4$$

$$t = 6$$



e) Fläche mit x-Achse:
Es geht um die Fläche mit der x-Achse als obere Funktion, $f_6(x)$ als untere Funktion und den Nullstellen x_1=-3 und x_2=t als Grenzen.

$$\Rightarrow A = \int_{-3}^{t}(y=0)-(f_t(x))\,dx = \int_{-3}^{t} 0-(0{,}2x^3+1{,}2x^2+1{,}8x-0{,}2tx^2-1{,}2tx-1{,}8t)\,dx =$$

$$= \int_{-3}^{t} 0-(0{,}2x^3+1{,}2x^2+1{,}8x-0{,}2tx^2-1{,}2tx-1{,}8t)\,dx =$$

$$= \int_{-3}^{t} -0{,}2x^3-1{,}2x^2-1{,}8x+0{,}2tx^2+1{,}2tx+1{,}8t\,dx =$$

$$= \left[-0{,}05x^4-0{,}4x^3-0{,}9x^2+\tfrac{0{,}2t}{3}x^3+0{,}6tx^2+1{,}8tx\right]_{-3}^{t} =$$

$$= \left[-0{,}05t^4-0{,}4t^3-0{,}9t^2+\tfrac{0{,}2t}{3}t^3+0{,}6t\cdot t^2+1{,}8t\cdot t\right] -$$

$$- \left[-0{,}05\cdot(-3)^4-0{,}4\cdot(-3)^3-0{,}9\cdot(-3)^2+\tfrac{0{,}2t}{3}\cdot(-3)^3+0{,}6t\cdot(-3)^2+1{,}8t\cdot(-3)\right] =$$

$$= \left[-0{,}05t^4-0{,}4t^3-0{,}9t^2+\tfrac{0{,}2}{3}t^4+0{,}6t^3+1{,}8t^2\right]-\left[-\frac{27}{20}-\tfrac{9}{5}t\right] =$$
$$= \left[\tfrac{1}{60}t^4+\tfrac{1}{5}t^3+\tfrac{9}{10}t^2\right]-\left[-\tfrac{27}{20}-\tfrac{9}{5}t\right] = \tfrac{1}{60}t^4+\tfrac{1}{5}t^3+\tfrac{9}{10}t^2+\tfrac{9}{5}t+\tfrac{27}{20}$$

Das ist unsere Fläche. Diese soll den Wert $\frac{125}{12}$ annehmen.

$$\Rightarrow \tfrac{1}{60}t^4+\tfrac{1}{5}t^3+\tfrac{9}{10}t^2+\tfrac{9}{5}t+\tfrac{27}{20} = \tfrac{125}{12} \qquad |-\tfrac{125}{12}$$
$$\tfrac{1}{60}t^4+\tfrac{1}{5}t^3+\tfrac{9}{10}t^2+\tfrac{9}{5}t-\tfrac{136}{15} = 0 \qquad |\cdot 60$$
$$t^4+12t^3+54t^2+108t-544 = 0$$

Lösung ohne GTR

Die Gleichung muss man mit der Polynomdivision oder mit dem Horner-Schema lösen. An dieser Stelle machen wir das nicht. Schauen Sie bitte im Kap.A.46.01 bzw. A.46.02 jeweils unter Bsp.03 nach. Da lösen wir genau diese Aufgabe.

Lösung mit GTR

Falls man einen GTR verwenden darf, löst man die Gleichung entweder mit dem „solve"-Befehl oder man gibt die Gleichung als Funktion im Grafikmenü ein und bestimmt dann von dieser Funktion die Nullstellen.

Wie auch immer Sie die Gleichung lösen: Sie sollten t=2 erhalten.

$x^4+12x^3+54x^2+108x-544 = 0 \quad \Rightarrow \quad t=2.$

f) Funktionsgleichung bestimmen:

Eine Möglichkeit wäre dies:

Jede quadratische Parabel hat die Form: $p(x) = ax^2+bx+c$.

Wenn sie die gleichen Nullstellen wie $f_6(x)$ hat, gilt:

① $p(-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9a-3b+c = 0$

② $p(6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 36a+6b+c = 0$

Mit dem gleichen Flächeninhalt gilt desweiteren:

③ $\int_{-3}^{6} ax^2+bx+c\,dx = \frac{125}{12} \quad \Rightarrow$ integrieren … ausrechnen …

Mit diesen drei Gleichungen kann man dann a,b und c bestimmen.

Einfacher wird es jedoch, wenn wir folgenden Ansatz für p(x) machen:

Da wir alle beide Nullstellen von p(x) kennen, muss p(x) die Form haben:

$p(x) = a\cdot(x+3)\cdot(x-6)$ [siehe → Kap.A.46.04 „Aufstellen von Funktionen"]

$= a\cdot(x^2+3x-6x-18)$

$= ax^2-3ax-18a$

Nun verwenden wir die Idee, dass p(x) mit der x-Achse den Flächeninhalt von $\frac{125}{12}$ einschließen soll. Das bedeutet, dass das Integral von p(x) innerhalb der Grenzen der Nullstellen diesen Wert annehmen muss.

[Da wir jedoch nicht wissen, ob p(x) oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt bzw. ob damit die Fläche ober- oder unterhalb der x-Achse liegt, setzen wir das Integral in den Betrag.]

$$\Rightarrow \left|\int_{-3}^{6} ax^2-2ax-18a\,dx\right| = \frac{125}{12} \qquad \text{integrieren …}$$
$$\left|\left[\tfrac{1}{3}ax^3-ax^2-18ax\right]_{-3}^{6}\right| = \frac{125}{12}$$
$$\left|\left[\tfrac{1}{3}\cdot a\cdot 6^3-a\cdot 6^2-18a\cdot 6\right]-\left[\tfrac{1}{3}\cdot a\cdot(-3)^3-a\cdot(-3)^2-18a\cdot(-3)\right]\right| = \frac{125}{12}$$

$\left|[-72a]-[-36a]\right| = \frac{125}{12}$

$\left|[-36a]\right| = \frac{125}{12}$ Den Betrag lösen wir mit ± auf..

$-36a = \pm\frac{125}{12}$ | : (-36)

$a = \pm\frac{125}{432} \Rightarrow a_1=+\frac{125}{432} \quad a_2=-\frac{125}{432}$

Es gibt also zwei Lösungen für die gesuchten Parabeln:

$$p_{1,2}(x) = \pm\frac{125}{432}\cdot(x+3)\cdot(x-6)$$

g) Schnittpunkte: [Gerade hat mit $f_t(x)$ den Tiefpunkt und einen Berührpunkt gemeinsam]

Eine Gerade hat natürlich die Form: $y=m\cdot x+b$

Da sie durch den Tiefpunkt T(-3|0) geht, kann man eine Punktprobe machen.

$x=-3$ und $y=0$ in $y=mx+b \Rightarrow 0=m\cdot(-3)+b \Rightarrow b=3m$

$b=3m$ setzen wieder in $y=mx+b$ ein und erhalten: $g: y=mx+3m$

[Das ist besser als vorher, denn jetzt haben wir nur noch eine Unbekannte!]

Die Gerade g soll mit $f_{-9}(x)$ zwei gemeinsame Punkte haben, also muss folgende Gleichung genau zwei Lösungen haben:

$$f_{-9}(x) = g(x)$$

$$0{,}2\cdot(x+3)^2\cdot(x+9) = mx+3m$$

Es gibt hier nur eines, was Sie falsch machen können. Und zwar, dass Sie $0{,}2\cdot(x+3)^2\cdot(x+9)$ ausmultiplizieren. Vielleicht merken Sie das nicht sofort, aber spätestens nach ein paar Schritten sollte Ihnen auffallen, dass alles total bekackt aussieht und nichts mehr geht. Andererseits könnte es sein, dass Ihnen spätestens dann aufällt, dass man auf der rechten Seite m ausklammern kann. Es würde $m\cdot(x+3)$ übrig bleiben. Da auf der linken Seite ebenfalls dieser „x+3"-Term steht, kann man daraus sicherlich irgendwas machen.

$0{,}2\cdot(x+3)^2\cdot(x+9) = mx+3m$ rechts „m" ausklammern

$0{,}2\cdot(x+3)^2\cdot(x+9) = m\cdot(x+3)$ | − m(x+3)

$0{,}2\cdot(x+3)^2\cdot(x+9) - m\cdot(x+3) = 0$ | (x+3) ausklammern

$(x+3)\cdot[\,0{,}2(x+3)\cdot(x+9) - m\,] = 0$

$x+3=0$ $\qquad 0{,}2(x+3)\cdot(x+9) - m = 0$

$x_1=-3$ $\qquad 0{,}2\cdot(x^2+12x+27)-m = 0$

$0{,}2x^2+2{,}4x+5{,}4-m = 0$

Das wir als erste Lösung $x_1=-3$ erhalten ist klar [der Tiefpunkt]. Wichtig ist vor allem, dass es bereits *eine* Lösung ist. Da es insgesamt genau zwei Lösungen geben muss, darf $0{,}2x^2+2{,}4x+5{,}4-m=0$ nur genau eine Lösung haben! Wir lösen diese Gleichung also mit p-q- oder a-b-c-Formel und erinnern uns natürlich daran, dass es genau eine Lösung gibt, wenn unter der Wurzel Null steht!

$0{,}2x^2+2{,}4x+5{,}4-m = 0$ | : 0,2

$x^2+12x+27-5m = 0$

(p-q-Formel)

$x^2+12x+27-5m=0$

$x_{2,3}=-6\pm\sqrt{6^2-(27-5m)}$

$= -6\pm\sqrt{9+5m}$

(a-b-c-Formel)

$x^2+12x+27-5m=0$

$x_{2,3}=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot1\cdot(27-5m)}}{2\cdot1}$

$= \frac{-12\pm\sqrt{36+20m}}{2}$

Unter der Wurzel muss Null stehen, damit man nur *eine* Lösung erhält!

$\Rightarrow \quad 9+5m=0 \qquad\qquad \Rightarrow \quad 36+20m=0$

$\Rightarrow \quad m = -\frac{9}{5} \qquad\qquad \Rightarrow \quad m = -\frac{36}{20} = -\frac{9}{5}$

Es gibt nur *eine* Lösung, wenn $9+5m = 0$, also wenn $m = -\frac{9}{5}$.

Unsere gesuchte Gerade lautet also: $g: y = -\frac{9}{3}\cdot x - \frac{27}{5}$

A.24.03 Funktionsanalyse mit CAS (∯)

Bsp.5

$f_t(x) = \frac{1}{t}x^3+x^2-6tx \qquad t\neq 0$

a) Bestimmen Sie $f_t'(x)$, $f_t''(x)$ und $f_t'''(x)$, zeichnen Sie $f_1(x)$.
b) Untersuchen Sie $f_t(x)$ auf Symmetrie.
c) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von $f_t(x)$.
d) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f_t(x)$. Für welchen Wert von t haben die beiden äußersten Nullstellen den Abstand d=10?
e) Bestimmen Sie die Extrempunkte von $f_t(x)$.
Für welchen Wert von t hat der Hochpunkt den y-Wert y=4?
f) Bestimmen Sie den Wendepunkt W von $f_t(x)$.
Für welchen Wert von t liegt W auf der ersten Winkelhalbierenden?
g) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an $f_t(x)$ im Punkt B(t | $f_t(t)$).
Für welchen Wert von t hat diese Tangente die Steigung m=-2?
h) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von $f_t(x)$ mit der Parabel $p_t(x)=-x^2-3tx$.
Gibt es einen Wert von t, so dass es weniger als drei Schnittpunkte gibt?
i) $f_t(x)$ schließt mit $p_t(x)$ eine zweiteilige Fläche ein.
Bestimmen Sie ihren Flächeninhalt A(t).
Für welche Werte von t nimmt die Fläche einen Inhalt von 6(LE²) ein?
j) Für welchen Wert von t ist die Steigung im Punkt Ü(3t–3|f(3t–3)) minimal?
k) Auf welcher Kurve liegen alle Wendepunkte ? [=Ortskurve aller Wendepunkte]
Bestimme den Schnittpunkt dieser Kurve mit $f_t(x)$.

Lösung:
a) Beginn: „ Ojeojeojeeh !! "
Ableitungen vom CAS machen lassen:
$f_t'(x) = \frac{3}{t}x^2+2x-6t \qquad f_t''(x) = \frac{6}{t}x+2 \qquad f_t'''(x) = \frac{6}{t}$
Für die Skizze von $f_1(x)$ macht man am besten eine Wertetabelle von $f_1(x)=x^3+x^2-6x$.
[N,H,T,W erhält man natürlich erst am Ende der Funktionsanalyse, also erst nach Teilaufgabe f)]

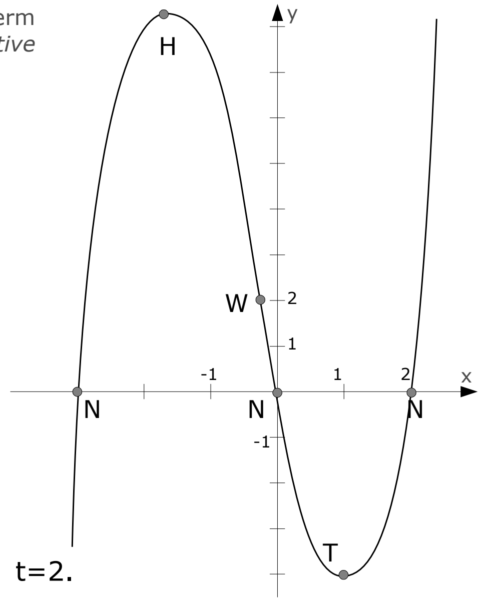
b) keine Symmetrie erkennbar. [gerade und ungerade Potenzen vorhanden]

c) Verhalten für $x\to\pm\infty$ [wir setzen für den x-Term mit der höchsten Potenz $+\infty$ bzw. $-\infty$ ein. Der Term „$^1/_t$" interessiert nicht, denn es ist nur irgendeine *positive* Zahl und ändert nichts.]

für $x\to+\infty \quad\Rightarrow\quad f(x)\to+\infty$

für $x\to-\infty \quad\Rightarrow\quad f(x)\to-\infty$

[es gibt offensichtlich keine Asymptoten]



d) Nullstellen: $f_t(x)=0$ setzen.

Der CAS liefert die Lösungen:

$x_1=0 \quad x_2=-3t \quad x_3=2t$

$\Rightarrow N_1(0|0) \quad N_2(-3t|0) \quad N_3(2t|0)$

Nun sollen die beiden äußersten Nullstellen einen Abstand von 10 (LE) haben. Die beiden äußersten Nullstellen sind N_2 und N_3. Deren Abstand ist natürlich die Differenz der beiden x-Werte, also:

$d = 2t-(-3t) = 5t$.

Da der Abstand 10 sein soll, gilt $5t=10 \quad\Rightarrow\quad t=2$.

e) Extrempunkte: $f_t'(x)=0$ setzen. Der CAS liefert die Lösungen:

$x_1\approx+1{,}12t \quad x_2\approx-1{,}79t$

Jetzt müssen wir wissen, ob es sich um Hoch- oder Tiefpunkte handelt. Dafür setzen wir schlauerweise den x-Wert in $f''(x)$ ein.

Desweiteren setzen wir den selben x-Wert in $f(x)$ ein um den y-Wert zu erhalten.

$f_t''(1{,}12t) = 8{,}72 > 0 \quad\Rightarrow T(1{,}12t \mid ?)$

$f_t''(-1{,}79t) = -8{,}74 < 0 \quad\Rightarrow H(-1{,}79t \mid ?)$

$f(1{,}12t) = \dots = -4{,}06t^2 \quad\Rightarrow\quad T(1{,}12t \mid -4{,}06t^2)$

$f(-1{,}79t) = \dots = 8{,}21t^2 \quad\Rightarrow\quad H(-1{,}79t \mid 8{,}21t^2)$

Der Hochpunkt soll den y-Wert $y_H=4$ haben.

Damit muss natürlich gelten: $8{,}21t^2=4 \quad\Rightarrow$ [CAS] $\Rightarrow \quad t_{1,2}=\pm0{,}70$

f) Wendepunkte: $f_t''(x)=0$ setzen. Der CAS liefert die Lösung: $x=-\frac{t}{3}$

$f_t'''\left(-\frac{t}{3}\right) = \frac{6}{t} \neq 0 \quad\Rightarrow\quad$ Wendepunkt

$f_t\left(-\frac{t}{3}\right) \approx 2{,}08t^2 \quad\Rightarrow\quad W(-0{,}33t \mid 2{,}08t^2)$

Der Wendepunkt soll auf der ersten Winkelhalbierenden liegen. Nun weiß ja spätestens seit dem Zeitalters des Kindergartens wirklich jeder von uns, dass die erste Winkelhalbierende einfach die Gerade mit der Gleichung $y=x$ ist.

Und weil wir so cool sind und das wissen, setzen wir jetzt noch die Koordinaten des Wendepunktes ein [logischerweise den x-Wert für „x" und y-Wert für „y"].

$y=x \;\Rightarrow\; 2{,}08t^2=-0{,}33t \;\Rightarrow$ [CAS] $\Rightarrow \quad t_1=0 \quad t_2\approx0{,}159$

g) Die Tangente an $f_t(x)$ in $B(t|f_t(x))$ berechnen wir über die Tangentengleichung.
[Der CAS stellt Ihnen einen Befehl zur Verfügung, mit dem Sie die Tangentengleichung in einem bestimmten Punkt bestimmen können. Vermutlich heißt er „tangentenlinie()“ oder so ähnlich. Falls Sie den Befehl nicht kennen, schauen Sie in der Bedienungsanleitung nach.]
angente mit Berührpunkt u=t. Der CAS sollte Ihnen die Gleichung liefern:

$$y_{Tan} = -tx-3t^2$$

Nun soll diese Tangente die Steigung m=2 haben. Die Steigung der Tangente kann man ablesen. Wie bei jeder Geraden ist es die Zahl (bzw. der Term) vor dem „x“. In diesem Fall ist es also „-t“.

Es muss also offensichtlich gelten: $-t = 2 \Rightarrow t=-2$

h) Schnittpunkte berechnet man natürlich immer, indem man die beiden Funktionen gleichsetzt.

$$\Rightarrow \quad f_t(x) = p_t(x) \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad x_2=t \quad x_3=-3t$$

Wir haben drei x-Werte, also haben wir auch drei Schnittpunkte.
Allerdings brauchen wir noch die zugehörigen y-Werte, die man ja bekanntlich erhält, indem man die x-Werte in eine der beiden Gleichungen einsetzt.
[Ich setze sie in $p_t(x)$ ein, das erscheint mit einfacher.]

$$y_1 = p_t(x_1) = p_t(0) = -0^2-3t\cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow S_1(\,0\mid 0\,)$$
$$y_2 = p_t(x_2) = p_t(t) = -t^2-3t\cdot t = -t^2-3t^2 = -4t^2 \quad \Rightarrow S_2(\,t\mid -4t^2)$$
$$y_3 = p_t(x_3) = p_t(t) = -(-3t)^2-3t\cdot(-3t) = -(9t^2)+9t^2 = 0 \quad \Rightarrow S_3(-3t\mid 0\,)$$

Gibt es einen Wert für t, so dass es weniger als drei Schnittpunkte gibt?
Wir haben ja drei x-Werte erhalten. Damit es nun weniger Schnittpunkte geben soll, müssten z.B. zwei x-Werte gleich sein, also zusammenfallen.

$x_1=x_2 \Rightarrow 0=t$ (t=0 ist jedoch [laut Aufgabenstellung] nicht zulässig)
$x_1=x_3 \Rightarrow 0=-3t \Rightarrow t=0$ (auch wieder keine Lösung)
$x_2=x_3 \Rightarrow t=-3t \Rightarrow 4t=0 \Rightarrow t=0$ (k.Lös.)

Es gibt keinen Wert für t>0, so dass man weniger als drei Schnittpunkte erhält!

i) Um die Fläche zwischen zwei Funktionen zu berechnen, braucht man zuerst die Schnittpunkte.
Welch Glück, dass wir die bereits in der letzten Teilaufgabe berechnet haben.

$$(x_1=-3t \quad x_2=0 \quad x_3=t)$$

Jetzt brauchen wir natürlich noch das Integral.
Betrachten wir die linke Teilfläche, die sich innerhalb der Grenzen x=-3t und x=0 befindet.
Diese Fläche wird oben von $f_t(x)$ begrenzt und unterhalb von $p_t(x)$. Also:

$$A_1 = \int_{-3t}^{0} f_t(x)-p_t(x)\,dx = \text{[CAS]} = \frac{45}{4}t^3$$

Bei der zweiten Fläche liegt $p_t(x)$ oberhalb und $f_t(x)$ begrenzt die Fläche am unteren Rand.

$$A_2 = \int_{0}^{t} p_t(x)-f_t(x)\,dx = \text{[CAS]} = \frac{7}{12}t^3$$

Nun haben wir die beiden Teilflächen. $A_{ges} = A_1+A_2 = \frac{45}{4}t^3+\frac{7}{12}t^3 = \frac{71}{6}t^3$

Für welche Werte von t nimmt diese Fäche einen Inhalt von 6(LE) ein?
Na ja ... wir setzen die Fläche A_{ges} dann halt eben =6

$A_{ges} = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{71}{6}t^3 = 6 \quad \Rightarrow$ [CAS] $\Rightarrow \quad t \approx 0{,}794$

j) Erst mal ein paar kleine Infos vorab:
Es gibt in der Formulierung zwei wichtige Stichworte:
→ „Steigung“: das ist immer die erste Ableitung der Funktion
→ „minimal“: um Egal-Was minimal hinzukriegen, muss man es ableiten und =Null setzen
[oder das Minimum mit dem GTR berechnen lassen, sofern das erlaubt ist]

Verlangt ist ja, dass „die Steigung im Punkt Ü minimal ist“.
Wir machen das also so, dass wir zuerst die Steigung im Punkt Ü berechnen und uns erst später dann um das „minimal-Zeug“ kümmern.

Die Steigung der Funktion im Punkt Ü:

$f_t'(x_Ü) = f_t'(3t-3) =$ [CAS] $= 27t+\frac{27}{t}-60$

So. Nun haben wir die Steigung im Punkt Ü. Diese nennen wir m(t) und die soll jetzt minimal sein. Also brauchen wir das Minimum von $m(t)=27t+\frac{27}{t}-60$.

Wir lassen also das Minimum von $27t+\frac{27}{t}-60$ berechnen und erhalten: $t=1$

Die Antwort: Der gesuchte Wert für t wurde bei t=1 gefunden, weil da ein Minimum der Steigung vorliegt. Jetzt ist alles wieder gut!

k) Auf welcher Kurve liegen alle Wendepunkte ?
Ganz gleich ob nach der Ortskurve von einem Wendepunkt, Hoch- oder Tief- oder irgendeinem Schnittpunkt gefragt ist, man wendet immer den gleichen „Trick“ an:
Zuerst braucht man x- und y-Wert von diesem Punkt.
In unserem Fall haben wir das schon: $W(-0{,}33t|2{,}08t^2)$

Wir schreiben noch `mal raus: x-Wert: $x = -0{,}33t$
y-Wert $y = 2{,}08t^2$

Nun lösen wir in der „x-Gleichung“ nach t auf. $x=-0{,}33t \Rightarrow t=-\frac{1}{0{,}33}x \approx -3x$
Dieses t setzen wir die „y-Gleichung“ ein $y=2{,}08\cdot(-3x)^2 = +18{,}72x^2$

Das war's auch schon. Alle Wendepunkte liegen auf der Kurve: $y=18{,}72x^2$

Die Frage nach dem Schnittpunkt der Ortskurve mit der Funktion $f_t(x)$ ist natürlich eine Scherzfrage, denn: die Ortskurve ist ja die Kurve auf der alle Wendepunkte der Funktion liegen.
Diese Kurve hat ja logischerweise mit $f_t(x)$ alle Wendepunkte gemeinsam!
Also müssen die Wendepunkte auch die Schnittpunkte sein.

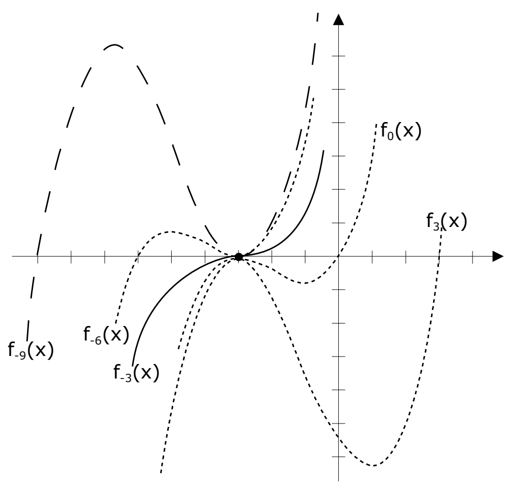
$\Rightarrow$ Die gesuchten Schnittpunkte sind: $W(-0{,}33t \mid 2{,}08t^2)$

Bsp.4
Ein hochbezahlter Mathematiker soll eine futuristische Funktion konzipieren.
Sein wirklich alle überzeugendes Resultat ist dieses:

$$f_t(x) = 0{,}2\cdot(x+3)^2\cdot(x-t)$$

a) Zeichnen Sie $f_{-9}(x)$, $f_{-6}(x)$, $f_{-3}(x)$, $f_0(x)$ und $f_3(x)$.
b) Für für welche Werte von t besitzt f(x) nur eine Nullstelle?
c) Für welche Werte von t, liegt der Hochpunkt von $f_t(x)$ auf der x-Achse ?
d) Für welchen Wert von t, liegt der Wendepunkt auf der y-Achse ?
e) Für welchen Wert von t>0, schließt $f_t(x)$ mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt von $\frac{125}{12}$ [FE] ein ?
f) Eine quadratische Parabel hat die gleichen Nullstellen wie $f_6(x)$ und schließt mit der x-Achse auch noch den gleichen Flächeninhalt ein. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Parabel.
g) Eine Gerade g geht durch den Tiefpunkt von $f_{-9}(x)$ und hat mit $f_{-9}(x)$ einen einzigen weiteren Punkte gemeinsam. Bestimmen Sie die Gleichung von g!

Lösung
a) Skizze: Ich glaube, fünf Funktionen mit dem Taschenrechner zu zeichnen, wird Sie nicht unbedingt überfordern.
Aufgaben, in denen Sie zeichnen müssen, sind meist auch nur ein Wink mit dem Zaunpfahl, damit Ihnen etwas für die nächsten Teilaufgaben auffällt.



b) Nullstellen:
Wir berechnen einfach 'mal die Nullstellen und lassen uns überraschen.

$$f_t(x) = 0$$

Des CAS liefert Ihnen die Lösungen:

$$x_1=-3 \qquad x_2 = t$$

Man erhält offensichtlich immer zwei x-Werte. Die einzige Möglichkeit, dass es nicht zwei verschiedene Nullstellen sind, ist, wenn t=-3. Dann fallen beide Nullstellen zusammen. [Übrigens haben Sie ja genau diese Funktion bereits gezeichnet!]

c) Extrempunkte (Hochpunkt auf der x-Achse):
Recnerisch ist diese Teilaufgabe nicht gut zu lösen.
Wir betrachten die Zeichnungen noch einmal. Es sollte Ihnen auffallen, dass für alle t<-3 im Punkt (-3|0) ein Tiefpunkt ist und für alle t>-3 bei (-3|0) der Hochpunkt (welcher natürlich auf der x-Achse liegt [y=0]).
Also: Für t<-3 liegt der Hochpunkt links von x=-3 und oberhalb der x-Achse.
Für t>-3 liegt der Hochpunkt immer bei (-3|0).
Die Antwort lautet also: Für t<-3 liegt der Hochpunkt immer auf der x-Achse.

d) Wendepunkt:

Hier kann man nichts mehr aus der Zeichnung erkennen, wir müssen rechnen. Wenn der Wendepunkt auf der y-Achse liegen soll, muss sein x-Wert = 0 sein. Wir brauchen also die Koordinaten vom Wendepunkt, also f''(x) = 0 setzen. Dafür lassen wir den CAS die Ableitungen bestimmen.

$f_t(x) = 0{,}2\cdot(x+3)^2\cdot(x-t)$

$f_t'(x) = $ [CAS] $= 0{,}6x^2+2{,}4x+1{,}8-0{,}4tx-2{,}4t$ [evtl auch] $0{,}2\cdot(x+3)\cdot(3x-2t+3)$

$f_t''(x) = 1{,}2x+2{,}4-0{,}4t$

$f_t''(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad 1{,}2x+2{,}4t-0{,}4t=0 \quad\Rightarrow\quad x_W = \frac{0{,}4t-2{,}4}{1{,}2}$

Der Wendepunkt liegt auf der y-Achse für $\Leftrightarrow$ $x_w = 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{0{,}4t-2{,}4}{1{,}2} = 0 \qquad |\cdot 1{,}2$

$0{,}4t-2{,}4 = 0 \qquad |+2{,}4 \quad |:0{,}4$

$t = 6$

e) Fläche mit x-Achse:

Es geht um die Fläche mit der x-Achse als obere Funktion, $f_6(x)$ als untere Funktion und den Nullstellen $x_1=-3$ und $x_2=t$ als Grenzen.

$f_t(x)$ haben wir schon ein paar Zeilen weiter oben ausgerechnet!

$\Rightarrow A = \int_{-3}^{t} (y=0)-(f_t(x))dx = $ [CAS] $= \frac{1}{60}t^4+\frac{1}{5}t^3+\frac{9}{10}t^2+\frac{9}{5}t+\frac{27}{20}$

Das ist unsere Fläche. Diese soll den Wert $\frac{125}{12}$ annehmen.

$\Rightarrow \frac{1}{60}t^4+\frac{1}{5}t^3+\frac{9}{10}t^2+\frac{9}{5}t+\frac{27}{20} = \frac{125}{12} \quad\Rightarrow$ [CAS] $\Rightarrow t=6$

f) Funktionsgleichung bestimmen:

Jede quadratische Parabel hat die Form: $p(x) = ax^2+bx+c$.

Wenn sie die gleichen Nullstellen wie $f_6(x)$ hat, gilt:

① $p(-3) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 9a-3b+c = 0$

② $p(6) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 36a+6b+c = 0$

Mit dem gleichen Flächeninhalt gilt desweiteren:

③ $\int_{-3}^{6} ax^2+bx+c\,dx = \frac{125}{12} \quad\Rightarrow$ integrieren … ausrechnen …

Mit diesen drei Gleichungen kann man den CAS a,b und c bestimmen lassen.

Es gibt zwei Lösungen: $a_1=+\frac{125}{432}$, $b_1=-\frac{125}{144}$, $c_1=-\frac{125}{24}$

$a_2=-\frac{125}{432}$, $b_2=+\frac{125}{144}$, $c_2=+\frac{125}{24}$

Es gibt daher auch zwei Lösungen für die gesuchten Parabeln:

$p_1(x) = +\frac{125}{432}x^2-\frac{125}{144}x-\frac{125}{24}$ bzw. $p_2(x) = -\frac{125}{432}x^2+\frac{125}{144}x+\frac{125}{24}$

g) Schnittpunkte: [Gerade hat mit $f_t(x)$ den Tiefpunkt und einen weiteren Punkt gemeinsam]

[Laut Zeichnung muss dieser weitere Punkt ein Berührpunkt sein. Das ist aber hier nicht wichtig.]

Eine Gerade hat natürlich die Form: $y=m\cdot x+b$

Da sie durch den Tiefpunkt T(-3|0) geht, kann man eine Punktprobe machen.

$x=-3$ und $y=0$ in $y=mx+b \quad\Rightarrow\quad 0=m\cdot(-3)+b \quad\Rightarrow\quad b=3m$

b=3m setzen wieder in y=mx+b ein und erhalten: $g: y=mx+3m$

[Das ist besser als vorher, denn jetzt haben wir nur noch eine Unbekannte!]

Die Gerade g soll mit $f_{-9}(x)$ zwei gemeinsame Punkte haben, also muss folgende Gleichung genau zwei Lösungen haben:

$$f_{-9}(x) = g(x)$$
$$0{,}2\cdot(x+3)^2\cdot(x+9) = mx+3m$$

Sie lassen den CAS diese Gleichung nach „x" auflösen und die Lösungen:

$x_1=-3$ $\quad x_2=-6+\sqrt{9+5m}$ $\quad x_3=-6-\sqrt{9+5m}$

Dummer Weise sind das drei Lösungen und nicht *zwei*.

Es gibt nur eine Möglichkeit, aus diesen drei Lösungen nur zwei zu machen: Zwei der Lösungen müssen zusammenfallen.

$x_1=x_2$: $-3=-6+\sqrt{9+5m} \;\Rightarrow$ [CAS] $\Rightarrow\; m=0$

Diese Lösung ist uninteressant, denn wenn Sie die Gerade g für m=0 einzeichnen, werden Sie feststellen, das es die x-Achse ist und die hat außer dem Tiefpunkt keinen weiteren *Berühr*punkt mit $f_{-9}(x)$ sondern nur einen *Schnitt*punkt gemeinsam.

$x_1=x_3$: $-3=-6-\sqrt{9+5m} \;\Rightarrow$ [CAS] $\Rightarrow$ keine Lösung

$x_2=x_3$: $-6+\sqrt{9+5m}\;\; -6-\sqrt{9+5m} \;\Rightarrow$ [CAS] $\Rightarrow\; m=-1{,}8$

Unsere gesuchte Gerade lautet also: $g: y=-1{,}8x-5{,}4$