Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter **www.mathe-laden.de** bestellen (falls Sie das möchten).
Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht aus dem Internet herunter geladen werden können.
Dazu gehören:
Inhaltsverzeichnis, **Stichwortverzeichnis**, und viele **Aufgaben zum Selberrechnen**.

Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.
Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

Sie können diese Datei gerne beliebig für den eigenen Gebrauch verwenden.
Nicht gestattet sind Änderungen sowie kommerzielle Nutzung.

mathe seite
Die gute Seite an Mathe.

© Havonix 2015
www.mathe-seite.de

A.41 Exponential-Funktionen

Exponential-Funktionen [oder auch e-Funktionen] sind Funktionen, in welchen das „x" mindestens einmal in der Hochzahl auftaucht. [e=2,71828….]

Typisch für e-Funktionen ist, dass sie [meistens, aber nicht immer!] nur auf einer Seite [also nur links im Schaubild oder nur rechts] eine waagerechte oder schiefe Asymptote haben.
Besonders an e-Funktionen sind:
- die Ableitungen (die Hochzahl ändert sich nämlich nie)
- die Asymptotenberechnung ($e^{+\infty}=\infty$, $e^{-\infty}=0$)

Um an das „x" in einer e-Funktion heran zu kommen, muss man normalerweise das „e" weg kriegen. Das geht mit dem „ln" [dem Logarithmus].
Ganz blöd und unmathematisch gesagt, ist es so, dass sich „ln" und „e" wegkürzen, wenn nichts dazwischen steht.

Bsp.1
$e^{\ln(3)}=3$; $e^{\ln(1,8)}=1,8$; $4e^{\ln(2t^2)}=4\cdot 2t^2$; $2\cdot e^{\ln(x)}=2\cdot x$
$\ln(e^3)=3$; $\ln(e^{1,8})=1,8$; $4\cdot\ln(e^{2t^2})=4\cdot 2t^2$; $2\cdot\ln(e^x)=2\cdot x$

$e^{\ln(A)} = A$
$\ln(e^A) = A$

Was sich nicht sofort vereinfachen lässt, ist z.B.:
$e^{2\cdot\ln(3)}$; $e^{\ln(1,8)+2}$; $e^{\ln(2t^2)\cdot 2}$; $2\cdot e^{5-\ln(x)}$ …
$\ln(1+e^3)$; $\ln(e^{1,8}+2)$; $4\cdot\ln(3\cdot e^{2t^2})$; $2\cdot\ln(e^x\cdot t)$ …

Ab und zu braucht man Logarithmenregeln.
Eigentlich ist nur eine davon richtig wichtig.
Nämlich die, die besagt, dass man Hochzahlen im Logarithmus nach vorne ziehen kann: $\ln(A^B)=B\cdot\ln(A)$
[Meistens benötigt man die Rückwärtsrichtung davon.]

$\ln(A^B) = B\cdot\ln(A)$

Bsp.2
Vereinfachen Sie den Term: $4\cdot e^{3\cdot\ln(x)}$

Lösung:
$4\cdot e^{3\cdot\ln(x)}$ = [„3" in die Hochzahl vom „ln" ziehen] =
$4\cdot e^{\ln(x^3)}$ = [„e" und „ln" kürzen] = $4\cdot x^3$

© Havonix 2015
www.mathe-seite.de

A.41.01 Nullstellen (einfach) (∰)

Es gibt mehrere Typen von „einfachen" e-Funktionen, die bei der Nullstellenberechnung immer wieder häufig vorkommen.

Bsp.3 e-Term ± Zahl:
Bestimmen Sie die Lösung von: $4\cdot e^{2-2x} - 36 = 0$

Lösung:
e-Term isolieren: $e^{2-2x} = 9$ | ln( )

$2-2x=\ln(9) \quad \Rightarrow \dots \Rightarrow \quad x = \frac{\ln(9)-2}{-2} \approx -0{,}1$

Bsp.4 x-Term mal e-Term:
Bestimmen Sie die Lösung von: $(2x-4)\cdot e^{-x+1} = 0$

Lösung:

$(2x-4)\cdot e^{-x+1} = 0$

$(2x-4) = 0$ $\qquad$ $e^{-x+1} = 0$

$\Rightarrow \quad x = 2$ $\qquad$ [ein e-Term wird nie Null] $\qquad \Rightarrow \quad x=2$

Bsp.5 e-Term ± x-Term:
Bestimmen Sie die Lösung von: $e^{1-2x}-2x+2 = 0$

Lösung:
Die Nullstellen sind nicht von Hand berechenbar.

A.41.02 Nullstellen (Herausforderung) (∰)

Bsp.6 e-Term ± e-Term (beide Hochzahlen haben gleiches Vorzeichen)
Bestimmen Sie die Lösung von:
a) $2e^{2x}-4e^{x} = 0$ oder b) $e^{-x}-2e^{-0,5x} = 0$

Lösung: (einen der beiden e-Terme ausklammern)

a) $e^{x}\cdot(2e^{x}-4) = 0$

$e^{x}=0$ k.Lös. $\qquad$ $2e^{x}-4=0$
$e^{x} = 2$
$x=\ln(2)$
$x\approx 0{,}69$

b) $e^{-0,5x}\cdot(e^{-0,5x}-2) = 0$

$e^{-0,5x}=0$ k.Lös. $\qquad$ $e^{-0,5x}-2=0$
$e^{-0,5x} = 2$
$-0{,}5x=\ln(2)$
$x\approx -1{,}38$

© Havonix 2015
www.mathe-seite.de

Bsp.7 e-Term ± e-Term (beide Hochzahlen haben verschiedene Vorzeichen)
Bestimmen Sie die Lösung von:

a) $2e^{2x}-4e^{-x}=0$ oder b) $e^{x}-2e^{-0,5x}=0$

Lösung:

$2e^{2x}-4e^{-x}=0$ oder $e^{x}-2e^{-0,5x}=0$

[Den Term mit der negativen Hochzahl umschreiben und die Gleichung damit multiplizieren]

$2e^{2x}-\frac{4}{e^{x}}=0$	$\vert\cdot e^{x}$	$e^{x}-\frac{2}{e^{0,5x}}=0$	$\vert\cdot e^{0,5x}$
$2e^{3x}-4=0$	$\vert+4\ \ \vert:2$	$e^{1,5x}-2=0$	$\vert+2$
$e^{3x}=2$	$\vert\ \ln(\ )$	$e^{1,5x}=2$	$\vert\ \ln(\ )$
$3x=\ln(2)$	$\vert:3$	$1,5x=\ln(2)$	$\vert:1,5$
$x=\frac{\ln(2)}{3}\approx 0,23$		$x=\frac{\ln(2)}{1,5}=\frac{2\cdot\ln(2)}{3}\approx 0,46$	

Bsp.8 e-Term ± e-Term ± Zahl
Bestimmen Sie die Lösung von: $e^{2x}-2e^{x}-3=0$

Lösung:

Substitution: $e^{x}=u$ [$\Rightarrow e^{2x}=u^2$]

$e^{2x}-2e^{x}-3=0$ $u=e^{x},\ u^2=e^{2x}$

$u^2-2u-3=0$ ← ab dieser Zeile ist's wieder „normal“ ganzrational

(p-q-Formel)

$u_{1,2}=1\pm\sqrt{1^2-(-3)}$

$=1\pm2$

(a-b-c-Formel)

$u_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}$

$=\frac{2\pm4}{2}$

$u_1=-1$ $u_2=3$

statt u wieder e^{x} hinschreiben. (=Resubstitution)

$u_1=-1$	$u_2=3$
$e^{x}=-1$	$e^{x}=3$
k.Lös.	$x_2=\ln(3)\approx 1,1$

A.41.03 Ableitungen (Basiswissen) (∰)

Einen e-Term leitet man so ab:
Der e-Term bleibt unverändert stehen und die Ableitung von der Hochzahl, kommt mit „Mal“ verbunden, dazu. [Im Prinzip wendet man die Kettenregel an.]

$$f(x)=a\cdot e^{b\cdot x+c}$$
$$\Rightarrow f'(x)=a\cdot b\cdot e^{b\cdot x+c}$$

Bsp.9

$f(x)=3e^{4x-6}+7$ ←

$\Rightarrow f'(x)=3e^{4x-6}\cdot4=12e^{4x-6}$

Die „7“ fällt natürlich weg, es ist eine Zahl ohne „x“.
Die Hochzahl „4x-6“ wird zu „4“ abgeleitet und hinter (oder vor) den e-Term geschrieben.

Bsp.10

$f(x) \;= 4e^{0,5x} - e^{2x}$

$\Rightarrow\; f'(x) \;= 4e^{0,5x}\cdot 0,5 - e^{2x}\cdot 2 \;=\; 2e^{0,5x} - 2e^{2x}$

$\Rightarrow\; f''(x) = 2e^{0,5x}\cdot 0,5 - 2e^{2x}\cdot 2 = e^{0,5x} - 4e^{2x}$

Bsp.11

$f(x) \;= e^{2x}\cdot(e^{-5x} + e^{2,5x})$ $\leftarrow$

Zuerst ausmultiplizieren, sonst müsste man die Produktregel anwenden. Die würde auch gehen, mit Ausmultiplizieren wird's aber einfacher.

$\Rightarrow\; f(x) \;= e^{-3x} + e^{4,5x}$

$\Rightarrow\; f'(x) \;= -3e^{-3x} + 4,5e^{4,5x}$

$\Rightarrow\; f''(x) = 9e^{-3x} + 20,25e^{4,5x}$

A.41.04 Ableitungen (Herausforderung) (∰)

Bsp.12

Bestimmen Sie die Ableitung von: $f(x) = (2x-4)\cdot e^{-x}$

$f'(x) \;= u'\cdot v+u\cdot v' \;= 2\cdot e^{-x}+(2x-4)\cdot(-e^{-x}) =$

$= \text{[Klammer auflösen]} = 2e^{-x} - 2x\cdot e^{-x}+4e^{-x} =$

$= -2x\cdot e^{-x}+6e^{-x} = \text{[ausklammern]} = e^{-x}\cdot(-2x+6)$

Produktregel:
$u=2x-4 \;\Rightarrow\; u'=2$
$v=e^{-x} \;\Rightarrow\; v'=e^{-x}\cdot(-1)=-e^{-x}$

Bsp.13

Bestimmen Sie zwei Ableitungen von: $g(x) = 2\cdot e^{-x^2}$

$g'(x) = \text{[Kettenregel]} = 2e^{-x^2}\cdot(-2x) = -4x\cdot e^{-x^2}$

$g''(x) = \text{[Produktregel]} = -4\cdot e^{-x^2}+(-4x)\cdot(-2xe^{-x^2}) =$

$= -4\cdot e^{-x^2}+8x^2\cdot e^{-x^2} = e^{-x^2}\cdot(-4+8x^2)$

Produktregel:
$u=-4x \;\Rightarrow\; u'=-4$
$v=e^{-x^2} \;\Rightarrow\; v'=e^{-x}\cdot(-2x)=-2xe^{-x^2}$

Bsp.14

Bestimmen Sie die Ableitung von: $h(x) = \dfrac{e^{2x}-5}{e^{2x}+2}$

$$h'(x) = \frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2} = \frac{2e^{2x}\cdot(e^{2x}+2)-(e^{2x}-5)\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+2)^2} =$$

$$= \frac{2e^{4x}+4e^{2x}-2e^{4x}+10e^{2x}}{(e^{2x}+2)^2} = \frac{14e^{2x}}{(e^{2x}+2)^2}$$

Quotientenregel:
$u=e^{2x}-5 \;\Rightarrow\; u'=e^{2x}\cdot 2=2\cdot e^{2x}$
$v=e^{2x}+2 \;\Rightarrow\; v'=e^{2x}\cdot 2=2\cdot e^{2x}$

Bsp.15

Bestimmen Sie die Ableitung von: $k(x)=3\cdot\sin(1-e^{4x})$

$k'(x) = \text{[Kettenregel]} = 3\cdot\cos(1-e^{4x})\cdot(-4e^{4x}) = -12e^{4x}\cdot\cos(1-e^{4x})$

© Havonix 2015
www.mathe-seite.de

A.41.05 Integrieren (Basiswissen) (∰)

Die Stammfunktion eines e-Term bestimmt man so: Der e-Term bleibt unverändert stehen und man teilt durch die Ableitung der Hochzahl.

$$f(x) = a\cdot e^{b\cdot x+c}$$
$$\Rightarrow\ F(x) = \frac{a}{b}\cdot e^{b\cdot x+c}$$

Bsp.16

$f(x) = 3e^{4x-6} + 7$

$\Rightarrow\ F(x) = 3e^{4x-6}\cdot\frac{1}{4}+7x = 0{,}75e^{4x-6} + 7x$

Bsp.17

$f(x) = 4e^{0,5x} - e^{2x}$

$\Rightarrow\ F(x) = 4e^{0,5x}\cdot\frac{1}{0{,}5}-e^{2x}\cdot\frac{1}{2} = 8e^{0,5x} - 0{,}5e^{2x}$

Bsp.18

$f(x) = e^{2x}\cdot(e^{-5x} + 3e^{2,5x})$ ←

Zuerst ausmultiplizieren, da man Produkte nicht so einfach aufleiten kann.
[Nur mit Produktregel (→A.41.06)]

$\Rightarrow\ f(x) = e^{-3x} + 3e^{4,5x}$

$\Rightarrow\ F(x) = e^{-3x}\cdot\frac{1}{-3}+3e^{4,5x}\cdot\frac{1}{4{,}5} = -\frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{3}{4{,}5}e^{4,5x} = -\frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{2}{3}e^{4,5x}$

A.41.06 Integrieren (Herausforderungen) (∯)

Die Stammfunktionen von e-Funktionen werden recht schnell kompliziert, wenn man die Produktregel oder die Integration durch Substitution braucht.
In Bsp.19 und Bsp.20 sehen wir zwei Beispiele, die zwar hässlich aussehen, deren Integration aber dann doch nicht so übelst schlimm ist.
Bsp.21 und Bsp.22 wird Produktintegration [=partielle Integration],
Bsp.23 und Bsp.24 wird Integration durch Substitution.

Bsp.19

$f(x) = 0{,}5e^{-2x}\cdot(e^{3x-1}-4)^2$ Bestimmen Sie die Stammfunktion von f(x).

Lösung:
Wir multiplizieren einfach aus.

$f(x) = 0{,}5e^{-2x}\cdot(e^{3x-1}-4)^2 =$ [Binom auflösen] $= 0{,}5e^{-2x}\cdot(e^{6x-2}-8e^{3x-1}+16) =$
$=$ [ausmultiplizieren. Hochzahlen werden addiert!] $= 0{,}5e^{4x-2}-4e^{x-1}+8e^{-2x}$.

$\Rightarrow\ F(x) = \frac{0{,}5}{4}e^{4x-2}-\frac{4}{1}e^{x-1}+\frac{8}{-2}e^{-2x} =$ [vereinfachen] $= \frac{1}{8}e^{4x-2}-4e^{x-1}-4e^{-2x}$

Bsp.20

$g(x) = \frac{(e^{2x}-4)^2}{2e^x}$ Bestimmen Sie die Stammfunktion von f(x).

Lösung:
Hässlich an f(x) ist, dass ein Bruch enthalten ist. Das Gute ist aber, dass im Nenner keine Strichrechnung enthalten ist [also kein „+" und kein „–"]. Wir spalten daher den Bruch auf, müssen allerdings vorher oben die Klammer auflösen.

$$\Rightarrow f(x)=\frac{(e^{2x}-4)^2}{2e^x}=[\text{Binom auflösen}]=\frac{e^{4x}-8e^{2x}+16}{2e^x}=[\text{aufspalten}]=\frac{e^{4x}}{2e^x}-\frac{8e^{2x}}{2e^x}+\frac{16}{2e^x}=[\text{kürzen}]=$$

$$=\frac{1}{2}e^{3x}-4e^x+\frac{8}{e^x}=[\text{umschreiben}]=\frac{1}{2}e^{3x}-4e^x+8e^{-x}$$

Nun ist die Stammfunktion einfach.

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{3x}-4e^x+8e^{-x} \quad \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2\cdot 3}e^{3x}-\frac{4}{1}e^x+\frac{8}{-1}e^{-x} = \frac{1}{6}e^{3x}-4e^x-8e^{-x}$$

Bsp.21

Bestimmen Sie die Fläche zwischen der wunderschönen Exponentialfunktion $f(x)=(-2x+6)\cdot e^{-x+2}$ und der x-Achse im Intervall I=[0;3].

Lösung:
Wir brauchen das Integral $\int_0^3(-2x+6)\cdot e^{-x+2}dx$ und für F(x) die Produktintegration [=partielle Integration].

> Produktintegration:
> $\int u\cdot v' = u\cdot v - \int u'\cdot v$
> [Siehe Kapitel: →A.14.05]
> $u=-2x+6 \Rightarrow u'=-2$
> $v'=e^{-x+2} \Rightarrow v=-e^{-x+2}$

$$\int_0^3(-2x+6)\cdot e^{-x+2}dx =$$

$$= \left[(-2x+6)\cdot(-e^{-x+2})\right]_0^3 - \int_0^3 -2\cdot(-e^{-x+2})dx = [\text{vereinfachen}]$$

$$= \left[(2x-6)\cdot e^{-x+2}\right]_0^3 - \int_0^3 2e^{-x+2}dx = [\text{integrieren}]$$

$$= \left[(2x-6)\cdot e^{-x+2}\right]_0^3 - \left[2\cdot(-e^{-x+2})\right]_0^3 = [\text{vereinfachen}]$$

$$= \left[(2x-6)\cdot e^{-x+2} + 2\cdot e^{-x+2}\right]_0^3 = [\text{vereinfachen}]$$

$$= \left[(2x-4)\cdot e^{-x+2}\right]_0^3 = \left[(2\cdot 3-4)\cdot e^{-3+2}\right] - \left[(2\cdot 0-4)\cdot e^{-0+2}\right] = 2\cdot e^{-1}+4\cdot e^2 \approx \mathbf{30{,}29}$$

Bsp.22

f(x) = Bestimmen Sie die in Unendliche reichende Fläche, die $f(x)=x\cdot e^{-0,5x+1}$ mit der x-Achse bildet.

Lösung:
Um überhaupt mal zu verstehen worum es im Detail geht, machen wir eine grobe Skizze. Dafür brauchen wir die Nullstellen und das Verhalten links und rechts von der Funktion [also für $x\to\pm\infty$].

$f(x)=0 \Rightarrow x\cdot e^{-0,5x+1}=0$

$x=0$ v $e^{-0,5x+1}=0$ [ein e-Term kann nie Null werden]

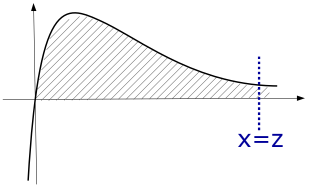
Man erhält eine einzige Nullstelle: bei x=0 ⇒ N(0|0)

© Havonix 2015
www.mathe-seite.de

Verhalten von $x \to \pm\infty$:

$$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) = \underbrace{x}_{\to\infty} \cdot \underbrace{e^{-0,5x+1}}_{\to e^{-\infty} \to 0} \to 0$$

$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) = \underbrace{\underbrace{x}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{e^{-0,5x+1}}_{\to e^{+\infty} \to \infty}}_{(-\infty)\cdot(+\infty) \to -\infty} \to -\infty$$



Wir haben also eine Funktion, die im Ursprung eine Nullstelle hat, links [bei $x \to -\infty$] runter [$f(x)=y \to -\infty$] geht und rechts [bei $x \to +\infty$] an die x-Achse [$f(x)=y \to 0$] geht.

Die Fläche wird links offensichtlich von $x=0$ begrenzt, rechts ist sie jedoch unbegrenzt. Wir müssen also ein sogenanntes „uneigentliches Integral" berechnen [→A.18.05]. Der übliche Trick, ist eine Grenze rechts einzuführen, die man irgendwie nennt, z.B. $x=z$ und zum Schluss z gegen Unendlich laufen lässt.

$$A(z) = \int_0^z x \cdot e^{-0,5x+1} dx = \text{[Produktintegration]}$$
$$= \left[x \cdot (-2) \cdot e^{-0,5x+1} \right]_0^z - \int_0^z 1 \cdot (-2) e^{-0,5x+1} dx =$$
$$= \left[-2x \cdot e^{-0,5x+1} \right]_0^z + \int_0^z 2e^{-0,5x+1} dx =$$
$$= \left[-2x \cdot e^{-0,5x+1} \right]_0^z + \left[\frac{2}{-0,5} e^{-0,5x+1} \right]_0^z =$$
$$= \left[-2x \cdot e^{-0,5x+1} \right]_0^z + \left[-4e^{-0,5x+1} \right]_0^z = \text{[ausklammern]}$$
$$= \left[(-2x-4) \cdot e^{-0,5x+1} \right]_0^z = \left[(-2z-4) \cdot e^{-0,5z+1} \right]_0^z - \left[(-2 \cdot 0 - 4) \cdot e^{-0,5 \cdot 0+1} \right] =$$
$$= \left[(-2z-4) \cdot e^{-0,5z+1} \right] - \left[-4 \cdot e^1 \right] = (-2z-4) \cdot e^{-0,5z+1} + 4e$$

Produktintegration:

$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$

[Siehe Bsp.21 oder Kap. A.14.05]

$u = x \qquad v' = e^{-0,5x+2}$

$\Rightarrow u' = 1 \qquad \Rightarrow v = -e^{-0,5x+2} \cdot {}^1/_{(-0,5)}$

$= -2 \cdot e^{-0,5x+1}$

Nun lassen wir die rechte Grenze ins Unendliche laufen, also $z \to \infty$.

$$\lim_{z \to \infty} A(z) = \lim_{z \to \infty} \underbrace{(-2z-4)}_{\to -\infty} \cdot \underbrace{e^{-0,5z+1}}_{\to e^{-\infty} \to 0} + 4 \cdot e = (-\infty) \cdot 0 + 4e = 4e$$

Bsp.23

$f(x) = e^{2x+3} \cdot (e^{2x+3} - 1)^4$ Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x)$.

Lösung

Die innere Ableitung der Klammer ist „$2e^{2x+3}$". Bis auf die Konstante „2" steht dieser Term vor der Klammer. Also wird Integration durch Substitution klappen.

$$F(x) = \int e^{2x+3} \cdot (e^{2x+3} - 1)^4 \, dx = \text{[Substitution]} =$$
$$= \int e^{2x+3} \cdot (u)^4 dx = \int e^{2x+3} \cdot (u)^4 \frac{du}{u'} =$$
$$= \int \cancel{e^{2x+3}} \cdot u^4 \frac{du}{2\cancel{e^{2x+3}}} = \frac{1}{2} \cdot \int u^4 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot u^5 =$$
$$= \frac{1}{10} \cdot u^5 = \text{[Resubstitution]} = \frac{1}{10} \cdot (e^{2x+3} - 1)^5$$

Integration durch Substitution

$dx = \frac{du}{u'}$ [Kap. A.14.06]

$u = e^{2x+3} - 1 \Rightarrow u' = 2 \cdot e^{2x+3}$

Bsp.24

$f(x) = \frac{12e^{2x}}{e^{2x}-1}$ bildet mit der x-Achse und den Geraden x=a und x=2a eine Fläche. Bestimmen Sie den Parameter a>0 so, dass die Fläche einen Wert von 12 annimmt.

Lösung:

Die Fläche mit der x-Achse berechnet man natürlich mit dem Integral. x=a und x=2a sind die Integralgrenzen. Dass das Ergebnis den Wert 12 annehmen soll, ist uns vorerst egal.

Wählt man den Nenner als „u", so steht die Ableitung davon im Zähler.
$u=e^{2x}-1 \quad \Rightarrow \quad u'=2\cdot e^{2x}$
Bei Substitution gilt: $dx={}^{du}/_{u'}$

$$A = \int_a^{2a} \frac{12e^{2x}}{e^{2x}-1}dx = [\text{Substitution } u=e^{2x}-1] =$$
$$= \int_{x=a}^{x=2a} \frac{12e^{2x}}{u}\,dx = [dx={}^{du}/_{u'}] = \int_a^{2a} \frac{12e^{2x}}{u}\,\frac{du}{u'} =$$
$$= [u'=2\cdot e^{2x}] = \int_{x=a}^{x=2a} \frac{12\cancel{e^{2x}}}{u}\,\frac{du}{2\cancel{e^{2x}}} = \frac{12}{2}\cdot\int_{x=a}^{x=2a} \frac{1}{u}\,du =$$
$$= 6\cdot\left[\ln(u)\right]_{x=a}^{x=2a} = [\text{Resubstitution } u=e^{2x}-1] =$$
$$= 6\cdot\left[\ln(e^{2x}-1)\right]_{x=a}^{x=2a} = [6\cdot\ln(e^{2(2a)}-1)]-[6\cdot\ln(e^{2(a)}-1)] =$$
$$= 6\cdot\ln(e^{4a}-1)-6\cdot\ln(e^{2a}-1) = 6\cdot[\ln(e^{4a}-1)-\ln(e^{2a}-1)] =$$
$$= [\text{Logarithmenregel anwenden}] = 6\cdot\ln\left(\frac{e^{4a}-1}{e^{2a}-1}\right)$$

Diese Fläche soll nun den Wert 12 annehmen

$$\Rightarrow \quad 6\cdot\ln\left(\frac{e^{4a}-1}{e^{2a}-1}\right) = 12$$

[Falls Sie das Glück haben sollten einen GTR oder CAS verwenden zu dürfen, können Sie diesen jetzt verwenden. Anderenfalls sollten Sie sich jetzt noch ein bisschen durchkämpfen☺.]

$$6\cdot\ln\left(\frac{e^{4a}-1}{e^{2a}-1}\right) = 12 \qquad |:6$$
$$\ln\left(\frac{e^{4a}-1}{e^{2a}-1}\right) = 2 \qquad \text{Im Zähler binomische Formel anwenden.}$$
$$\ln\left(\frac{\cancel{(e^{2a}-1)}(e^{2a}+1)}{\cancel{e^{2a}-1}}\right) = 2$$
$$\ln(e^{2a}+1) = 2 \qquad |\ e^{(\,)}$$
$$e^{2a}+1 = e^2 \qquad |-1$$
$$e^{2a} = e^2-1 \qquad |\ \ln(\,)$$
$$2a = \ln(e^2-1) \qquad |\ :2$$
$$a = \tfrac{1}{2}\cdot\ln(e^2-1)$$

© Havonix 2015
www.mathe-seite.de

A.41.07 Asymptoten (∰)

$e^{+\infty} \rightarrow \infty$

$e^{-\infty} \rightarrow 0$

e-Funktionen haben im Normalfall keine **senkrechte Asymptoten**, es sei denn der e-Term steht im Nenner. In diesem Fall setzt man natürlich wieder den Nenner gleich Null und löst nach „x" auf.

Um waagerechte oder schiefe Asymptoten zu bestimmen, lässt man x gegen $\pm\infty$ laufen und guckt, was für die Funktion f(x) rauskommt.
Wichtig hierbei ist: $e^{\infty}\rightarrow\infty$, $e^{-\infty}\rightarrow 0$.
Das Hauptproblem bei Asymptoten liegt wohl darin, dass die Vorgehensweise neu und ungewohnt ist und meistens schon allein beim Namen „e-Funktion" der Denkprozess aussetzt.

Bsp.25

[→siehe Bsp.31]

Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten von: $f(x) = 3e^{x+1}$

Lösung:
für $x\rightarrow+\infty$ geht $x+1 \rightarrow +\infty$, also wird aus $f(x)=3e^{x+1} \rightarrow f(x)= 3e^{+\infty}$
Da $e^{+\infty}\rightarrow+\infty$, geht die Funktion gegen: $f(x)\rightarrow 3e^{+\infty}\rightarrow 3\cdot\infty\rightarrow+\infty$
Mathematische Schreibweise: $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\cdot e^{x+1} = \infty$

für $x\rightarrow-\infty$ geht $x+1 \rightarrow -\infty$, also wird aus $f(x)=3e^{x+1} \rightarrow f(x)= 3e^{-\infty}$
Da $e^{-\infty}\rightarrow 0$, geht die Funktion gegen: $f(x)\rightarrow 3e^{+\infty}\rightarrow 3\cdot 0 = 0$
Mathematische Schreibweise: $\lim\limits_{x\to-\infty} 3\cdot e^{x+1} = 0$

In anderer Schreibweise:
$x\rightarrow+\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \rightarrow +\infty$
$x\rightarrow-\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \rightarrow 0$

Wegen $f(x)\rightarrow 0$, ist **y=0** [die x-Achse] waagerechte Asymptote.

Bsp.26

[→siehe Bsp.32]

Bestimmung der Asymptoten von: $f(x) = e^{-3x-1}-3$

Lösung:
Vorüberlegung: $x\rightarrow+\infty \Rightarrow -3x-1\rightarrow-\infty \Rightarrow e^{-3x-1}\rightarrow e^{-\infty}\rightarrow 0$
$x\rightarrow-\infty \Rightarrow -3x-1\rightarrow+\infty \Rightarrow e^{-3x-1}\rightarrow e^{+\infty}\rightarrow\infty$

Limes-Schreibweise: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x-1}-3 = 0-3 = -3$
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-3x-1}-3 = \infty-3 = \infty$

Alternativ-Schreibweise:
$x\rightarrow+\infty \Rightarrow f(x)=e^{-3x-1}-3 \rightarrow 0-3 = -3$
$x\rightarrow-\infty \Rightarrow f(x)=e^{-3x-1}-3 \rightarrow \infty-3 = \infty$

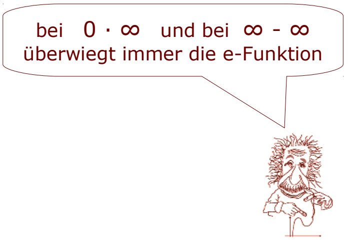
$\Rightarrow$ waagerechte Asymptote bei **y=-3**

Bsp.27

[→siehe Bsp.34, Bsp.49]

Asymptotisches Verhalten von: $f(x) = (2x-4)\cdot e^{-x+1}$

Lösung:



Vorüberlegung: $x\to+\infty \Rightarrow -x\to-\infty \Rightarrow e^{-x+1}\to e^{-\infty}\to 0$

$x\to-\infty \Rightarrow -x\to+\infty \Rightarrow e^{-x+1}\to e^{+\infty}\to\infty$

Limes-Schreibweise: $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-4)\cdot e^{-x+1} = \infty\cdot 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-4)\cdot e^{-x+1} = -\infty\cdot\infty = -\infty$

Alternativ-Schreibweise:

$x\to+\infty \Rightarrow f(x)=(2x-4)\cdot e^{-x+1} \to \infty\cdot 0 = 0$

$x\to-\infty \Rightarrow f(x)=(2x-4)\cdot e^{-x+1} \to -\infty\cdot\infty = -\infty$

Denkweise: $x\to+\infty \Rightarrow f(x) \to (2\cdot\infty-4)\cdot e^{-\infty} \to \infty\cdot e^{-\infty} \to \infty\cdot 0 \to 0$

$x\to-\infty \Rightarrow f(x) \to (2\cdot(-\infty)-4)\cdot e^{-(-\infty)} \to -\infty\cdot e^{+\infty} \to -\infty\cdot\infty \to -\infty$

$\Rightarrow$ waagerechte Asymptote bei **y=0** (die x-Achse)

Bsp.28

[→siehe Bsp.35]

Bestimmung der Asymptoten von: $f(x) = 2e^{x}-5e^{-2x}$

Lösung:

Vorüberlegung: $x\to+\infty \Rightarrow e^{x}\to\infty$ und $x\to+\infty \Rightarrow e^{-2x}\to 0$

$x\to-\infty \Rightarrow e^{x}\to 0$ und $x\to-\infty \Rightarrow e^{-2x}\to\infty$

Limes-Schreibweise: $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{x}-5e^{-2x} = \infty-0 = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{x}-5e^{-2x} = 0-\infty = -\infty$

Alternativ-Schreibweise:

$x\to+\infty \Rightarrow f(x)=2e^{x}-5e^{-2x} \to \infty-0 = \infty$

$x\to-\infty \Rightarrow f(x)=2e^{x}-5e^{-2x} \to 0-\infty = -\infty$

keine Asymptoten [es kommt nirgends eine Zahl raus]

Bsp.29

[→siehe Bsp.36]

Bestimmung der Asymptoten von: $f_t(x) = (e^{2x}-t)^2$

Lösung:

Vorüberlegung: $x\to+\infty \Rightarrow e^{2x}\to\infty$ und $x\to-\infty \Rightarrow e^{2x}\to 0$

Limes-Schreibweise: $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x}-t)^2 = (\infty-t)^2 = (\infty)^2 = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}-t)^2 = (0-t)^2 = (-t)^2 = t^2$

Alternativ-Schreibweise:

$x\to+\infty \Rightarrow f(x) \to (e^{2\cdot\infty}-t)^2 \to (\infty-t)^2 \to \infty^2 \to \infty$

$x\to-\infty \Rightarrow f(x) \to (e^{2\cdot(-\infty)}-t)^2 \to (0-t)^2 \to (-t)^2 \to t^2$

waagerechte Asymptote bei **$y=t^2$**

© Havonix 2015
www.mathe-seite.de

Bsp.30 [→siehe Bsp.37]
Bestimmung der Asymptoten von: $f(x) = (1-2x)\cdot e^{0,5x}$

Lösung:
Vorüberlegung: $x\to+\infty \Rightarrow e^{0,5x}\to\infty$ und $x\to-\infty \Rightarrow e^{0,5x}\to 0$

Limes-Schreibweise:
$$\lim_{x\to+\infty} (1-2x)\cdot e^{0,5x} = (-\infty)\cdot\infty = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} (1-2x)\cdot e^{0,5x} = (+\infty)\cdot 0 = 0$$

Alternativ-Schreibweise:
$$x\to+\infty \Rightarrow f(x) \to (1-\infty)\cdot e^{0,5\cdot\infty} \to -\infty\cdot e^{+\infty} \to -\infty\cdot\infty \to -\infty$$
$$x\to-\infty \Rightarrow f(x) \to (1+\infty)\cdot e^{0,5\cdot(-\infty)} \to \infty\cdot e^{-\infty} \to \infty\cdot 0 \to 0$$

y=0 (also die x-Achse) ist waagerechte Asymptote

Meistens ist es so, dass man, um Asymptoten zu berechnen, einfach den e-Term weglassen kann, ebenso alles was mit „Mal" verbunden ist.
Das, was übrig bleibt, ist die Asymptote.
- Leider stimmt das nur *meistens,* nicht immer.
- Diese „Eselbrücke" zählt *nie* als Begründung!

(Es stimmt dann nicht, wenn in der Funktion zwei e-Terme auftauchen, in deren Hochzahlen unterschiedliche Vorzeichen auftauchen. [z.B. $f(x)=e^{-x}+e^{x}$, oder siehe Bsp.28]).

Gehen wir Bsp.25 bis Bsp.30 nochmal mit dieser „Abkürzung" durch.

Bsp.31 $f(x) = 3e^{x+1}$ [→siehe Bsp.25]
Wir lassen den e-Term weg und die „3", die mit dem e-Term mit „Mal" verbunden ist. Es bleibt nichts übrig! Die Asymptote ist also y=0.

Bsp.32 $f(x) = e^{-3x-1}-3$ [→siehe Bsp.26]
Wir lassen den e-Term wegfallen, die „-3" bleibt übrig $\Rightarrow$ die Asymptote ist: y=-3

Bsp.33 $f(x)=3-2\cdot e^{-x}$ [→siehe Bsp.47]
Wir lassen den e-Term wegfallen, die „3" bleibt übrig $\Rightarrow$ die Asymptote ist: y=3

Bsp.34 $f(x) = (2x-4)\cdot e^{-x+1}$ [→siehe Bsp.27, Bsp.49]
Der e-Term fällt mit der Klammer „(2x–4)" weg.
Es bleibt nichts übrig, die Asymptote ist y=0.

© Havonix 2015
www.mathe-seite.de

Bsp.35 $f(x) = 2e^{x}-5e^{-2x}$ [→siehe Bsp.28]

Beide e-Terme fallen weg, es bleibt nicht übrig.
Die Asymptote wäre Null, was aber falsch ist.
Bei diesem Beispiel stimmt die Eselsbrücke NICHT.

Bsp.36 $f_t(x) = (e^{2x}-t)^2$ [→siehe Bsp.29]

Der e-Term fällt weg, es bleibt $(-t)^2$ übrig.
Die Asymptote ist also $y=t^2$

Bsp.37 $f(x) = (1-2x)\cdot e^{0,5x}$ [→siehe Bsp.30]

Der e-Term fällt mitsamt Klammer weg. Es bleibt nichts übrig. Die Asymptote ist $y=0$.

Die Asymptotenbestimmung mit Hilfe dieser „Eselsbrücke" ist auch sehr hilfreich bei der Bestimmung von schiefen Asymptoten.

Schiefe Asymptoten erhält man bei e-Funktionen, wenn der e-Term mit einem Term der Form „mx+b" mit „+" oder „–" verbunden ist.

Bsp.38 $f(x) = e^{2x}+3x$

Der e-Term fällt weg, es bleibt „3x" übrig. $y=3x$ ist eine Gerade. Die **schiefe Asymptote** ist $\mathbf{y=3x}$.

Bsp.39 $f(x) = (x^2-1)\cdot e^{x+1}+2x-3$

Es gibt eine schiefe Asymptote bei $y = 2x-3$

Bsp.40 $f(x) = 2\cdot e^{x}+e\cdot x-4$

Es gibt eine schiefe Asymptote bei $y = e\cdot x-4$
(e·x ist *kein* e-Term!!)

Bsp.41 $f(x) = e^{2x}\cdot(x+7)$

Es gibt keine schiefe Asymptote. (Eine waagerechte bei $y=0$)

Bsp.42 $f(x) = 1+2x+3e^{4x}$

Es gibt eine schiefe Asymptote bei $y = 1+2x$

© Havonix 2015
www.mathe-seite.de

A.41.08 Asymptoten (Herausforderung) (∯)

Bsp.43

Bestimmen Sie die Asymptoten von: $f(x) = \frac{e^x}{e^x-2}$

Lösung:
Es fällt auf, dass die Funktion einen Nenner hat. Deswegen gibt es eventuell senkrechte Asymptoten, denn diese berechnet man immer, indem man den Nenner Null setzt. Damit haben wir eine senkrechte Asymptote bei:
Nenner=0 $\Rightarrow$ $e^x-2=0$ $\Rightarrow$ $e^x=2$ $\Rightarrow$ **$x=\ln(2)$**.

Um waagerechte Asymptoten zu bestimmen, lässt man x gegen $+\infty$ bzw $-\infty$ laufen.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-2} = \text{[ausklammern und kürzen]} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\cdot\left(1-\frac{2}{e^x}\right)} = \frac{1}{1\cdot(1-0)} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x-2} = \frac{0}{0-2} = 0$$

Zusammengefasst:
Für $x\to+\infty$ laufen die y-Werte gegen 1 $\Rightarrow$ waagerechte Asymptote bei **y=1**.
Für $x\to-\infty$ laufen die y-Werte gegen 0 $\Rightarrow$ waagerechte Asymptote bei **y=0**.
Diese Funktion hat also zwei waagerechte Asymptoten und eine senkrechte!

Bsp.44

Bestimmen Sie die Asymptoten von: $f(x) = (e^{2x}-t)^2$

Lösung:
Vorüberlegung: $x\to+\infty \Rightarrow e^{2x}\to\infty$ und $x\to-\infty \Rightarrow e^{2x}\to 0$
In der Limes-Schreibweise: $\lim_{x\to+\infty}(e^{2x}-t)^2 = (\infty-t)^2 = (\infty)^2 = \infty$
$\lim_{x\to-\infty}(e^{2x}-t)^2 = (0-t)^2 = (-t)^2 = t^2$

Alternativ-Schreibweise:
$x\to+\infty \Rightarrow f(x) \to (e^{2\cdot\infty}-t)^2 \to (\infty-t)^2 \to \infty^2 \to \infty$
$x\to-\infty \Rightarrow f(x) \to (e^{2\cdot(-\infty)}-t)^2 \to (0-t)^2 \to (-t)^2 \to t^2$

Es gibt eine waagerechte Asymptote bei **$y=t^2$.**
Natürlich gibt es keine senkrechte Asymptote, da es ja keinen Nenner gibt.

Bsp.45

Bestimmen Sie die Asymptoten von: $f(x) = (3x+5)\cdot e^{-0,4x+2}$

Lösung:
Vorüberlegung: $x\to+\infty \Rightarrow e^{-0,4x+2}\to e^{-\infty}\to 0$ und $x\to-\infty \Rightarrow e^{-0,4x+2}\to e^{+\infty}\to\infty$
In der Limes-Schreibweise: $\lim_{x\to+\infty}(3x+5)e^{-0,4x+2} = (\infty)\cdot e^{-\infty} = \infty\cdot 0 = 0$

$$\lim_{x\to-\infty}(3x+5)e^{-0,4x+2} = (-\infty)\cdot e^{+\infty} = -\infty\cdot\infty = -\infty$$

Alternativ-Schreibweise:

$$x\to+\infty \Rightarrow f(x) = (3x+5)\cdot e^{-0,4x+2} \to (\infty)\cdot e^{-\infty} \to \infty\cdot 0 = 0$$
$$x\to-\infty \Rightarrow f(x) = (3x+5)\cdot e^{-0,4x+2} \to (-\infty)\cdot e^{+\infty} \to -\infty\cdot\infty \to -\infty$$

waagerechte Asymptote bei **y=0.**

Natürlich gibt es keine senkrechte Asymptote, da es ja keinen Nenner gibt.

Bsp.46

Bestimmen Sie die Asymptoten von: $f(x) = \dfrac{2}{0,4+0,1\cdot e^{-0,01x}}$

Lösung:

waagerechte Asymptoten:

Vorüberlegung: $x\to+\infty \Rightarrow e^{-0,01x}\to e^{-\infty}\to 0$ und $x\to-\infty \Rightarrow e^{-0,01x}\to e^{+\infty}\to\infty$

$$\Rightarrow \quad x\to+\infty \Rightarrow f(x)=\frac{2}{0,4+0,1\cdot e^{-0,01x}} \to \frac{2}{0,4+0,1\cdot 0} = \frac{2}{0,4} = 5$$
$$x\to-\infty \Rightarrow f(x)=\frac{2}{0,4+0,1\cdot e^{-0,01x}} \to \frac{2}{0,4+0,1\cdot\infty} = \frac{2}{\infty} \to 0$$

Es gibt also zwei waagerechte Asymptoten:

Eine bei **y=5** [rechts, für $x\to\infty$] und eine bei **y=0** [links, für $x\to-\infty$].

senkrechte Asymptoten:

Den Nenner Null setzen:

$0,4+0,1\cdot e^{-0,01x} = 0$ $\quad |-0,4 \quad |:0,1$

$e^{-0,01x} = -4$ $\quad \leftarrow$ ein e-Term kann nie negativ werden!

$\Rightarrow$ keine Lösung, also keine senkrechten Asymptoten.

A.41.09 von der Funktionsgleichung zum Schaubild (∰)

Um das Schaubild einer Funktion zu skizzieren, funktionieren meist folgende Überlegungen:

→ zuerst überlegt/bestimmt man die Asymptoten

→ man bestimmt die Nullstellen [falls das umständlich ist, kann man darauf verzichten]

→ falls es schnell geht: schauen, ob die Funktion monoton ist bzw. ob sie immer oberhalb bzw. immer unterhalb der x-Achse verläuft.

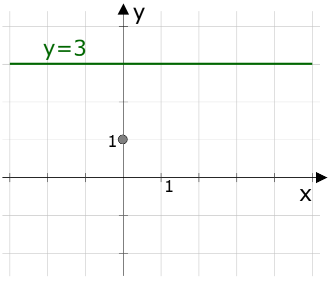
→ in den Bereichen, in denen man immer noch keine Ahnung hat, wie die Funktion verläuft, zeichnet man einfach Punkte ein [also irgendwelche x-Werte in f(x) einsetzen und die y-Werte berechnen]

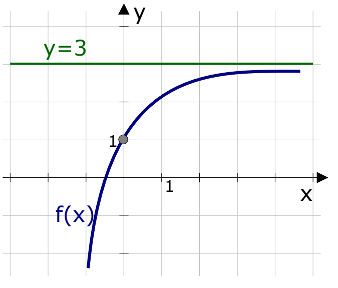
→ hoffen und beten.

© Havonix 2015
www.mathe-seite.de

Bsp.47
Fertigen Sie eine Skizze von $f(x)=3-2\cdot e^{-x}$.

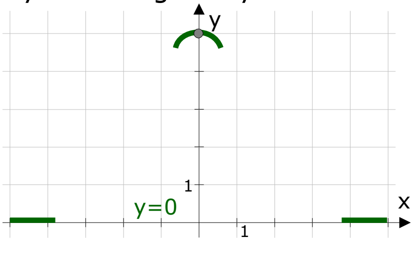
Lösung:
→Es gibt eine waagerechte Asymptote bei $y=3$ [→siehe Bsp.33].
→Schnittpunkt mit der y-Achse: $x=0 \Rightarrow y=f(0)=3-2\cdot e^{-0}=3-2\cdot 1=1 \Rightarrow S_y(0|1)$
→Der Schnittpunkt mit der x-Achse lässt sich nicht in 5 Sekunden bestimmen, den lassen wir weg, wir brauchen ihn auch nicht wirklich.
→Wir berechnen die Ableitung: $f'(x)=-2\cdot e^{-x}\cdot(-1)=2e^{-x}$
Da ein e-Term *immer* positiv ist, ist $f'(x)$ immer positiv, die Funktion $f(x)$ steigt also immer.
Wir haben also folgende Infos:
Unsere Funktion hat bei $y=3$ eine waagerechte Asymptote, schneidet die y-Achse bei $y=1$ [siehe linke Grafik] und sie steigt immer.
Also muss sie in etwa so aussehen wie in der rechten Grafik.



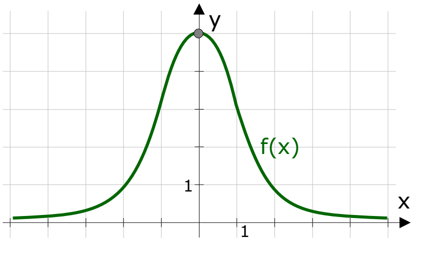


Bsp.48
Skizzieren Sie die Funktion $f(x)=5\cdot e^{-0,5x^2}$.

Lösung:
→Für $x\to\pm\infty$ geht $f(x)$ gegen Null, denn:
$x\to\infty \Rightarrow f(x) = 5\cdot e^{-0,5x^2} \to 5\cdot e^{-0,5\cdot\infty^2} = 5\cdot e^{-0,5\cdot\infty} \to 5\cdot e^{-\infty} \to 5\cdot 0=0$
$x\to-\infty \Rightarrow f(x) = 5\cdot e^{-0,5x^2} \to 5\cdot e^{-0,5\cdot(-\infty)^2}=5\cdot e^{-0,5\cdot\infty} \to 5\cdot e^{-\infty} \to 5\cdot 0=0$
[die Eselsbrücke von Seite 12 würde auch funktionieren]
→Die Funktion ist achsensymmetrisch, denn es gibt nur gerade Hochzahlen.
Deswegen muss auf der y-Achse natürlich ein Extrempunkt liegen, logischerweise mit dem x-Wert $x=0$.
Der y-Wert liegt bei $y=5\cdot e^{-0,5\cdot 0^2}=5\cdot e^0=5$



→



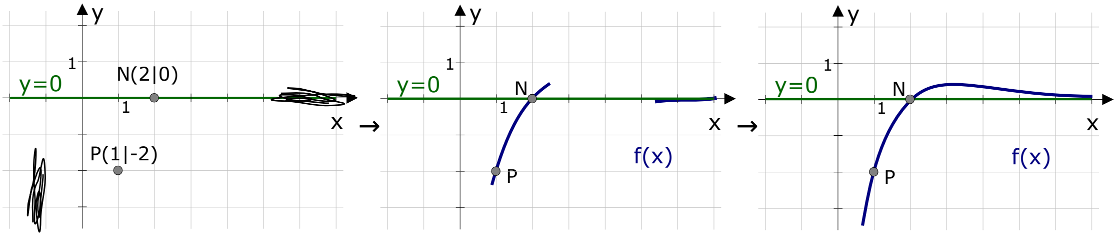
© Havonix 2015
www.mathe-seite.de

Bsp.49
Skizzieren Sie die Funktion $f(x)=(2x-4)\cdot e^{-x+1}$.

Lösung:
→f(x) hat rechts, bei $x\to+\infty$, eine waagerechte Asymptote bei y=0.
links, bei $x\to-\infty$ geht f(x) runter [→Bsp.27, Bsp.34]
→f(x) hat eine Nullstelle bei x=2
denn: $(2x-4)\cdot e^{-x+1}=0$, der e-Term wird nie Null ⇒ $2x-4=0$ ⇒ $x=2$ [siehe auch Bsp.4]
→e^0 kann man immer gut ohne Taschenrechner ausrechnen, also setzt man x=1 in f(x) ein. $x=1 \Rightarrow y=(2\cdot1-4)\cdot e^{-1+1}=(-2)\cdot e^0=-2\cdot1=-2 \Rightarrow P(1|-2)$

Wir wissen also, dass die Funktion links nach unten läuft und rechts asymptotisch an die x-Achse. Bei N(2|0) gibt es eine Nullstelle. Von der Nullstelle aus gesehen, muss die Funktion nach links unten laufen, denn sie muss ja zum Punkt P(-1|2) hin. Von der Nullstelle wird sie vermutlich nach rechts oben laufen.

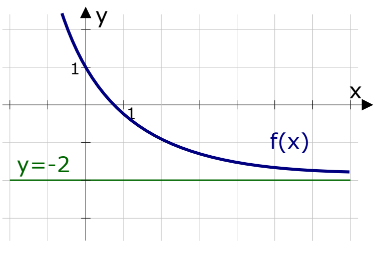
Mit all diesen Infos kann sich nach und nach zur Skizze hin arbeiten.



A.41.10 vom Schaubild zur Funktionsgleichung (∰)

Wenn von der Funktion eine Gleichung gegeben ist [in Abhängigkeit von diversen Parametern], so ist die Sache normalerweise einfach: man setzt verschiedene Punkte ein und hofft, dass man damit die Parameter bestimmen kann.
Bei e-Funktionen kann man oft noch die Asymptoten verwenden.

Bsp.50
Das Schaubild zeigt den Graphen der Funktion $f(x)=a+b\cdot e^{-0,5x}$
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.



Lösung:
Zuerst fällt uns auf, dass der Graph eine waagerechte Asymptote bei y=-2 hat.
Die Gleichung der Funktion $f(x)=a+b\cdot e^{-0,5x}$ hat eine Asymptote bei y=a [man lässt den e-Term weg und alles was mit „Mal" verbunden ist]. Daher gilt: **a=-2**

© Havonix 2015
www.mathe-seite.de

Wir wissen also bisher, dass die Gleichung lautet: $f(x)=-2+b\cdot e^{-0,5x}$.

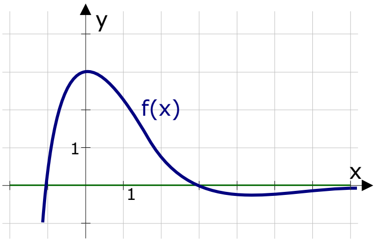
Nun setzen wir noch einen Punkt in f(x) ein. Der Punkt (0|1) ist so ziemlich der einzige Punkt, dessen Koordinaten man gut ablesen kann. Also setzen wir die Koordinaten dieses Punktes ein:

x=0 und y=1 in $f(x)=-2+b\cdot e^{-0,5x}$:

$1=-2+b\cdot e^{-0,5\cdot 0} \Rightarrow 1=-2+b\cdot 1 \Rightarrow 1=-2+b \Rightarrow \mathbf{3=b} \Rightarrow \mathbf{f(x)=-2+4\cdot e^{-0,5x}}$.

Bsp.51

Das rechtsstehende Schaubild beschreibt den Graph der Funktion $f(x)=(ax^2+bx+c)\cdot e^{-x}$.
Bestimmen Sie die Werte von a, b und c mit Hilfe des Schaubilds.



Lösung:
Wir haben drei unbekannte Parameter [a,b,c]. Dafür müssen wir drei Punkte einsetzen. Man kann drei Punkte gut ablesen: $P_1(-1|0)$, $P_2(0|3)$ und $P_3(3|0)$.

P_1 in f(x): $0=(a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c)\cdot e^{-(-1)}$
$0=(a-b+c)\cdot e^1 \quad |:e^1$
$0=a-b+c$

P_2 in f(x): $3=(a\cdot 0^2+b\cdot 0+c)\cdot e^{-0}$
$3=(0+0+c)\cdot 1 \Rightarrow 3=c\cdot 1 \Rightarrow \mathbf{c=3}$

P_3 in f(x): $0=(a\cdot 3^2+b\cdot 3+c)\cdot e^{-3}$
$0=(9a+3b+c)\cdot e^{-3} \quad |:e^{-3}$
$0=9a+3b+c$

Nun betrachten wir die Gleichungen aus P_1 und P_3 und setzen da c=3 ein.

$0=a-b+3$ bzw. $0=9a+3b+3$

Es handelt sich um zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, die wir nun irgendwie lösen müssen. Man kann z.B. in der ersten Gleichung nach „a" auflösen und in die zweite Gleichung einsetzen.

$0=a-b+3 \Rightarrow b-3=a$ in zweite Gleichung einsetzen $\Rightarrow$
$0=9\cdot(b-3)+3b+3 \Rightarrow 0=9b-27+3b+3 \Rightarrow 0=12b-24 \Rightarrow 24=12b \Rightarrow \mathbf{b=2}$

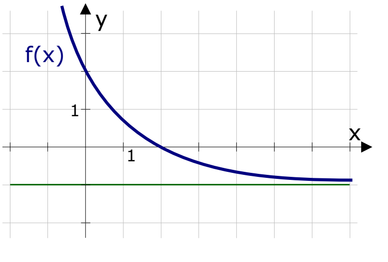
b=2 und c=3 in die erste Gleichung einsetzen

$0=a-2+3 \Rightarrow 0=a+1 \Rightarrow \mathbf{a=-1}$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $f(x)=(-x^2+2x+3)\cdot e^{-x}$

Bsp.52

Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion, die zum gezeigten Graphen gehört.



Lösung:
Wenn Sie von einer Funktion gar nichts gegeben haben, also keinen Ansatz mit Parameter, wie im

Bsp.50 oder Bsp.51, so brauchen Sie wahrscheinlich immer nur: $f(x)=a+b\cdot e^{k\cdot x}$
Danach setzen Sie Asymptoten und Punkte ein.
In unserem Beispiel sieht man im Schaubild die Asymptote y=-1.
Die Funktionsgleichung $f(x)=a+b\cdot e^{x}$ hat „y=a“ als Asymptote.

[siehe auch Eselsbrücke von Seite 12]

Daher muss gelten: a=-1 $\Rightarrow$ $f(x)=-1+b\cdot e^{k\cdot x}$

Nun gibt es im Schaubild noch zwei Punkte, deren Koordinaten man gut ablesen kann: $P_1(0|2)$ und $P_2(2|0)$
Diese Punkte setzen wir ein.

$P_1(0|2)$ in f(x): $2=-1+b\cdot e^{k\cdot 0} \Rightarrow 2=-1+b\cdot 1 \Rightarrow 3=b \Rightarrow$ $f(x)=-1+3\cdot e^{k\cdot x}$
$P_2(2|0)$ in f(x): $0=-1+3\cdot e^{k\cdot 2} \Rightarrow 1=3\cdot e^{2k} \Rightarrow {}^1/_3=e^{2k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln({}^1/_3)=2k \Rightarrow k=\frac{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{2} \approx -0{,}55 \Rightarrow$ $\mathbf{f(x)=-1+3\cdot e^{-0,55\cdot x}}$

A.41.11 Funktionsanalyse von e-Funktionen (∰)

[wir rechnen alle Aufgaben ohne Verwendung von GTR oder CAS]

Bsp.53 $f(x) = (2x-1)\cdot e^{0,5x+1}$

Aufgabenstellung:

a) Untersuchen Sie f(x) auf Asymptoten, Nullstellen, Hoch-, Tief-, Wendepunkte. Fertigen Sie eine Skizze von f(x).
b) Zeige dass $F(x) = (4x-10)\cdot e^{0,5x+1}$ eine Stammfunktion von f(x) ist.
c) Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente von f(x).
d) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von f(x), der Wendetangente und der y-Achse eingeschlossen wird.

Lösung:

a)

Ableitungen [mit Produktregel]:

$f'(x) = 2\cdot e^{0,5x+1} + (2x-1)\cdot 0{,}5\cdot e^{0,5x+1} =$
$= [\ 2+(2x-1)\cdot 0{,}5\ ]\cdot e^{0,5x+1} = [\ 2+x-0{,}5\ ]\cdot e^{0,5x+1} \quad \Rightarrow f'(x) = (x+1{,}5)\cdot e^{0,5x+1}$
$f''(x) = 1\cdot e^{0,5x+1}+(x+1{,}5)\cdot 0{,}5\cdot e^{0,5x+1} =$
$= [1+(x+1{,}5)\cdot 0{,}5]\cdot e^{0,5x+1} = [1+0{,}5x+0{,}75]\cdot e^{0,5x+1} \Rightarrow f''(x)= (0{,}5x+1{,}75)\cdot e^{0,5x+1}$
$f'''(x) = 0{,}5\cdot e^{0,5x+1}+(0{,}5x+1{,}75)\cdot 0{,}5\cdot e^{0,5x+1} =$
$= [0{,}5+(0{,}5x+1{,}75)\cdot 0{,}5]\cdot e^{0,5x+1} = \ldots \quad \Rightarrow f'''(x)=(0{,}25x+1{,}375)\cdot e^{0,5x+1}$

Das hamma ganz toll gemacht!

© Havonix 2015
www.mathe-seite.de

Asymptoten [= Verhalten für $x\to\pm\infty$]

für $x\to+\infty \Rightarrow f(x)\to \infty\cdot e^{\infty} \to \infty\cdot\infty \to \infty$

für $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to -\infty\cdot e^{-\infty} \to -\infty\cdot 0 \to 0$

Das sagt uns, dass die Funktion am rechten Rand [bei $x\to+\infty$] nach oben geht [$f(x)\to+\infty$]

und am linken Rand der Zeichnung [$x\to-\infty$] gegen die x-Achse geht [$f(x)\to 0$]

Die x-Achse ist also waagerechte Asymptote [für $x\to-\infty$] waag.Asy. bei **y=0**

Nullstellen: $f(x) = 0$

$(2x-1)\cdot e^{0,5x+1} = 0$

$\Rightarrow 2x-1 = 0 \qquad e^{0,5x+1} = 0$

$x_1 = 0,5 \qquad$ k.L. $\qquad \Rightarrow$ **N(0,5 | 0)**

Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$(x+1,5) \cdot e^{0,5x+1} = 0$

$\Rightarrow x+1,5 = 0 \qquad e^{0,5x+1} = 0$

$x_1 = -1,5 \qquad$ k.L.

überprüfen in f''(x):

$f''(-1,5) = (0,5 \cdot(-1,5)+1,75)\cdot e^{0,5\cdot(-1,5)+1} = 1,28.. > 0 \Rightarrow T(-1,5 \mid ?)$

y-Wert: x=-1,5 in f(x) einsetzen

$f(-1,5) = (2\cdot(-1,5)-1)\cdot e^{0,5\cdot(-1,5)+1} = -4\cdot e^{0,25} \approx -5,14 \qquad \Rightarrow$ **T(-1,5|-4·e^0,25)**

Wendepunkte: $f''(x) = 0$

$(0,5x+1,75)\cdot e^{0,5x+1} = 0$

$\Rightarrow 0,5x+1,75 = 0 \qquad e^{0,5x+1} = 0$

$x_1 = -3,5 \qquad$ k.L.

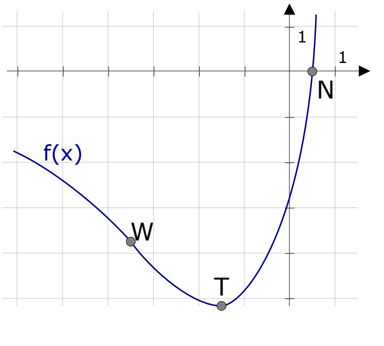
überprüfen in f'''(x)

$f'''(-1,5) = (0,25 \cdot(-3,5)+1,375)\cdot e^{0,5\cdot(-3,5)+1} \approx 0,24 \neq 0 \Rightarrow W(-3,5 \mid ?)$

für y-Wert x=-3,5 in f(x) einsetzen:

$f(-3,5) = (2\cdot(-3,5)-1)\cdot e^{0,5\cdot(-3,5)+1} = -8\cdot e^{-0,75} \approx -3,78 \qquad \Rightarrow$ **W(-3,5|-8·e^-0,75)**

Zeichnung: →



b) Zeigen, dass $F(x) = (4x-10)\cdot e^{0,5x+1}$ eine Stammfunktion von f(x) ist.

Dafür könnte man f(x) aufleiten und sollte F(x) erhalten. f(x) ist aber ein Produkt aus zwei x-Termen, welches man nur mit der Produktintegration aufleiten kann. Wenn Sie die Produktintegration aber nicht gelernt haben oder nicht anwenden möchten, brauchen Sie eine Alternative.

Alternativ könnte man die Stammfunktion F(x) ableiten. Wenn die Ableitung von F(x) wieder f(x) ist, haben wir bewiesen, dass F(x) die Stammfunktion von f(x) ist.

So wollen wir denn F(x) ableiten. Mit der Produktregel natürlich.
Gut. Schnell. Fehlerfrei und selbstsicher.

$$F'(x) = (4)\cdot e^{0,5x+1} + (4x-10)\cdot 0,5\cdot e^{0,5x+1} =$$
$$= [4 + (4x-10)\cdot 0,5]\cdot e^{0,5x+1} =$$
$$= [\ 4 + 2x-5\ ]\cdot e^{0,5x+1} = (2x-1)\cdot e^{0,5x+1} = f(x)$$

$u=4x-10 \Rightarrow u'=4$
$v=e^{0,5x+1} \Rightarrow v'=0,5\cdot e^{0,5x+1}$

c) Die Wendetangente ist die Tangente im Wendepunkt.

Man könnte sie über y=mx+b berechnen oder über die Tangentengleichung. Aus unerklärlichen Sympathiegründen bevorzuge ich die Methode über die Tangentengleichung.

$$y_T = f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$$

u ist der x-Wert des Wendepunkts, also u=-3,5

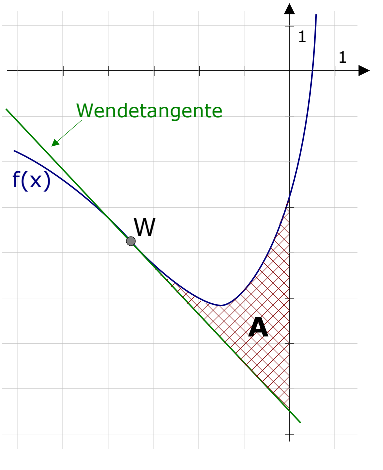
$f'(-3,5)=(-3,5+1,5)\cdot e^{0,5\cdot(-3,5)+1}$
$= -2\cdot e^{-0,75}$

$f(-3,5)= -8\cdot e^{-0,75}$
(siehe Berechnung des Wendepunktes)

$$\Rightarrow\ y_T = f'(-3,5)\cdot(x-(-3,5))+f(-3,5)$$
$$= -2\cdot e^{-0,75}\cdot(x+3,5) - 8\cdot e^{-0,75} =$$
$$= -2\cdot e^{-0,75}\cdot x - 7\cdot e^{-0,75} - 8e^{-0,75} = \quad \Rightarrow \quad y_T = -2\cdot e^{-0,75}\cdot x - 15\cdot e^{-0,75}$$

Man könnte die Tangentengleichung natürlich auch gerundet, in Kommazahlen angeben. Das wäre dann: $y_T = -0,94x-7,09$

d) Die Fläche, die von f(x), der y-Achse und der Wendetangente eingeschlossen wird, ist in nebenstehender Skizze schraffiert eingezeichnet.
Man berechnet sie natürlich mit dem Integral.
Die Integralgrenzen sind x=-3,5 [x-Wert des Wendepunktes] und x=0 [y-Achse], oben wird die Fläche durch f(x) begrenzt, unten durch die Wendetangente y_T.



$$\Rightarrow\ A = \int_{-3,5}^{0} f(x)-y_T\,dx =$$
$$= \int_{-3,5}^{0} \left((2x-1)\cdot e^{0,5x+1}\right)-\left(-2e^{-0,75}\cdot x-15e^{-0,75}\right)dx =$$
$$= \int_{-3,5}^{0} (2x-1)\cdot e^{0,5x+1}+2e^{-0,75}\cdot x+15e^{-0,75}\,dx =$$

[die Stammfunktion von f(x) wurde uns schon in Teilaufgabe b) angegeben. Es gilt: $\int f(x)dx = F(x) = (4x-10)\cdot e^{0,5x+1}$]

$$= \left[(4x-10)\cdot e^{0,5x+1}+2e^{-0,75}\cdot\frac{1}{2}x^2+15e^{-0,75}\cdot x\right]_{-3,5}^{0} =$$
$$= \left[(4x-10)\cdot e^{0,5x+1}+e^{-0,75}\cdot x^2+15e^{-0,75}\cdot x\right]_{-3,5}^{0} =$$
$$= [(4\cdot 0-10)\cdot e^{0,5\cdot 0+1}+e^{-0,75}\cdot 0^2+15e^{-0,75}\cdot 0] -$$
$$[(4\cdot(-3,5)-10)\cdot e^{0,5\cdot(-3,5)+1}+e^{-0,75}\cdot(-3,5)^2+15e^{-0,75}\cdot(-3,5)] =$$
$$= [(-10)\cdot e^{1} + 0\ ] - [\ (-24)\cdot e^{-0,75}+12,25e^{-0,75}-52,5e^{-0,75}]$$
$$= [\ -10e\ ] - [\ -64,25\cdot e^{-0,75}\ ] = \mathbf{64,25e^{-0,75}-10e} \approx 3,17$$

Schön wars!

© Havonix 2015
www.mathe-seite.de

Bsp.54 $f_t(x) = 2t\cdot e^{-x} - 0{,}25\cdot e^{2x}$ $t>0$

Aufgabenstellung:

a) Untersuchen Sie $f_t(x)$ auf Nullstellen, Extrempunkte, Symmetrie.
Skizzieren Sie $f_1(x)$ (1LE = 2cm)

b) Bestimmen Sie die Fläche, die von $f_t(x)$ und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird.

c) Die Gerade x=u schneidet $f_1(x)$ im Punkt A und die Funktion $g(x)=2e^{-x}$ in B. Bestimmen Sie u<0 so, dass das Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C(0|3) maximalen Flächeninhalt annimmt.

Lösung:

a)

Ableitungen:

$f_t'(x) = 2t\cdot(-1)\cdot e^{-x} - 0{,}25\cdot 2\cdot e^{2x} = -2te^{-x} - 0{,}5e^{2x}$

$f_t''(x) = -2t\cdot(-1)\cdot e^{-x} - 0{,}5\cdot 2\cdot e^{2x} = 2te^{-x} - e^{2x}$

$f_t'''(x) = 2t\cdot(-1)\cdot e^{-x} - 2\cdot e^{2x} = -2te^{-x} - 2e^{2x}$

Asymptoten [Verhalten von f(x) für x →±∞]

für $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to 2t\cdot e^{-\infty} - 0{,}5\cdot e^{2\cdot\infty} \to 2t\cdot 0 - 0{,}5\cdot\infty \to -\infty$

für $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to 2t\cdot e^{+\infty} - 0{,}5\cdot e^{2\cdot(-\infty)} \to 2t\cdot\infty - 0{,}5\cdot 0 \to +\infty$

D.h. am rechten Rand unserer Zeichnung geht die Funktion `runter, am linken Rand geht sie hoch.

Nullstellen:

$f_t(x) = 0$

$2te^{-x} - 0{,}25e^{2x} = 0$ umschreiben

$\frac{2t}{e^x} - 0{,}25e^{2x} = 0$ $|\cdot e^x$ [Nenner wegmachen]

$2t - 0{,}25e^{3x} = 0$ $| + 0{,}25e^{3x}$

$2t = 0{,}25e^{3x}$ $| : 0{,}25$

$8t = e^{3x}$ $| \ln(\,)$

$\ln(8t) = 3x$ $| : 3$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}\ln(8t)$ $\Rightarrow$ $N\left(\frac{1}{3}\cdot\ln(8t)\middle|0\right)$

Extremstellen:

$f_t'(x) = 0$

$-2te^{-x} - 0{,}5e^{2x} = 0$ umschreiben

$-\frac{2t}{e^x} - 0{,}5e^{2x} = 0$ $|\cdot e^x$ [Nenner wegmachen]

$-2t - 0{,}5e^{3x} = 0$ $| + 2t$

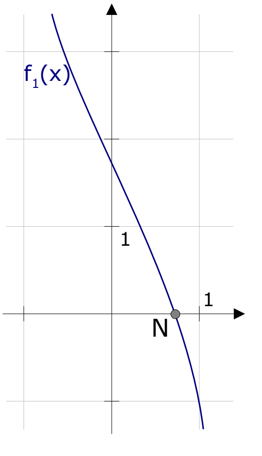
$-0{,}5e^{3x} = 2t$ $| : (-0{,}5)$

$e^{3x} = -4t$

k.Lös. (ein e-Term kann niemals <0 sein)

$\Rightarrow$ keine Extrempunkte

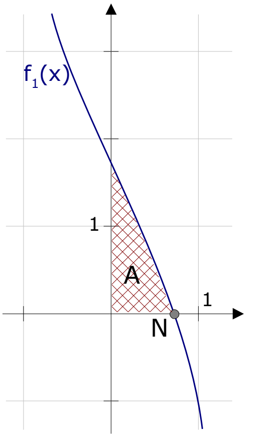
Zeichnung von $f_1(x)$ →



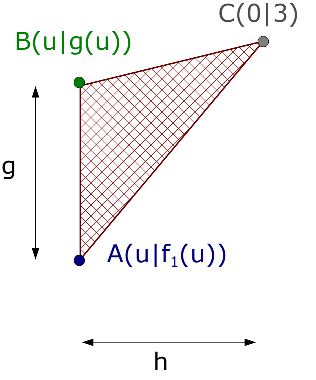
© Havonix 2015
www.mathe-seite.de

b)
Die Fläche, die von $f_t(x)$, der x- und der y-Achse eingeschlossen wird, ist in der oberen Skizze schraffiert eingezeichnet.
Man berechnet sie natürlich mit dem Integral.
Die Integralgrenzen sind $x=0$ [y-Achse] und $x=\frac{1}{3}\ln(8t)$ [die Nullstelle], oben wird die Fläche durch $f_t(x)$ begrenzt, unten durch die x-Achse.

$$\Rightarrow\ A = \int_0^{\frac{1}{3}\ln(8t)} f_t(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{3}\ln(8t)} 2t\cdot e^{-x} - 0{,}25\cdot{}^{2x}\,dx =$$
$$= \left[\frac{2t}{-1}\cdot e^{-x} - \frac{0{,}25}{2}\cdot{}^{2x}\right]_0^{\frac{1}{3}\ln(8t)} = \left[-2t\cdot e^{-x} - 0{,}125\cdot{}^{2x}\right]_0^{\frac{1}{3}\ln(8t)} =$$
$$= \left[-2t\cdot e^{-\frac{1}{3}\ln(8t)} - 0{,}125\cdot e^{2\cdot\frac{1}{3}\ln(8t)}\right] - \left[-2t\cdot e^{0} - 0{,}125\cdot e^{2\cdot 0}\right] = {}^{(1)}$$
$$= \left[-2t\cdot e^{\ln\left((8t)^{-\frac{1}{3}}\right)} - 0{,}125\cdot e^{\ln\left((8t)^{\frac{2}{3}}\right)}\right] - \left[-2t\cdot 1 - 0{,}125\cdot 1\right] = {}^{(2)}$$
$$= -2t\cdot(8t)^{-\frac{1}{3}} - 0{,}125\cdot(8t)^{\frac{2}{3}} + 2t + 0{,}125 = {}^{(3)}$$
$$= -2t\cdot 8^{-\frac{1}{3}}\cdot t^{-\frac{1}{3}} - 0{,}125\cdot 8^{\frac{2}{3}}\cdot t^{\frac{2}{3}} + 2t + 0{,}125 =$$
$$= -2t\cdot\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{1}{3}} - 0{,}125\cdot 4\cdot t^{\frac{2}{3}} + 2t + 0{,}125 =$$
$$= -t^{\frac{2}{3}} - 0{,}5\cdot t^{\frac{2}{3}} + 2t + 0{,}125 =$$
$$= -1{,}5\cdot t^{\frac{2}{3}} + 2t + 0{,}125 =$$
$$= -1{,}5\cdot\sqrt[3]{t^2} + 2t + 0{,}125$$



c)
Zuerst zeichnet man die Funktion $g(x)=2e^{-x}$ ein, danach die Gerade $x=u$. Letztere ist eine Parallele zur y-Achse, die links von der y-Achse liegt ($u<0$).
Die Schnittpunkte von $x=u$ mit $f(x)$ bzw. $g(x)$ sind die Punkte A und B. Zusammen mit $C(0|3)$ ist nun ein sehr kleines Dreieck entstanden.
Als Grundlinie des Dreiecks wählt man am besten die Strecke AB. Deren Länge ist die Differenz der y-Werte
$AB = g(u)-f_1(u) = 2e^{-u} - (2e^{-u}-0{,}25\cdot e^{2u}) = +0{,}25e^{2u}$
Die Höhe des Dreiecks ist der [waagerecht gemessene] Abstand vom Eckpunkt C zur Grundseite AB. [Diese Höhe liegt zwar außerhalb des Dreiecks, aber das ist egal].
Diesen Abstand von C zur Strecke AB berechnet man über die Differenz der x-Werte. $\Rightarrow\ h=x_C-x_A=0-u=-u$
Somit erhalten wir für die Fläche des Rechtecks ABC die Flächeninhaltsformel:
$A(u) = ½\cdot g\cdot h = ½ \cdot 0{,}25e^{2u} \cdot (-u) = -0{,}125u\cdot e^{2u}$ ←



Falls man den GTR benutzen dürfte, so könnte man sich ab dieser Stelle einfach das Maximum von A(u) bestimmen lassen.

1 Logarithmenregel anwenden: $\frac{1}{3}\ln(8t) = \ln\left((8t)^{\frac{1}{3}}\right)$
2 Logarithmenregel anwenden: $e^{\ln(A)} = A$
3 $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$ $\quad 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8}^2 = 2^2 = 4$

© Havonix 2015
www.mathe-seite.de

Berechnet man den maximalen Flächeninhalt, so muss A'(u)=0 gesetzt werden.

$A(u) = -0{,}125u\cdot e^{2u}$

$A'(u) = $ [Produktregel] $=$

$= -0{,}125\cdot e^{2u} - 0{,}125u\cdot 2e^{2u} =$

$= -0{,}125\cdot e^{2u} - 0{,}25u\cdot e^{2u} = e^{2u}\cdot(-0{,}125-0{,}25u)$

$u = -0{,}125\cdot u$	$u' = -0{,}125$
$v = e^{2u}$	$v' = 2\cdot e^{2u}$

$A'(u) = 0 \quad\Rightarrow\quad e^{2u}\cdot(-0{,}125-0{,}25u) = 0$

$e^{2u}=0$ k.Lös.

$-0{,}125-0{,}25u = 0 \qquad |+0{,}125 \quad |:(-0{,}25)$

$u = -0{,}5$

[Streng genommen müsste man jetzt u=-0,5 noch in A''(u) einsetzen und sich davon überzeugen, dass tatsächlich ein *Maximum* vorliegt. Das erspar´ ich mir jedoch.]

Für **u=-0,5** ist der Flächeninhalt von ABC maximal !

Bsp.55 $f(x) = (2-e^{-x})^2$

Aufgabenstellung:

a) Kurvendiskussion, Zeichnung

b) Die Gerade x=u bildet für $u\in\mathbb{R}^+$ mit f(x) und der waagerechten Asymptote von f(x) eine Fläche A(u). Bestimmen Sie A(u) sowie $\lim\limits_{u\to+\infty} A(u)$.

c) Bestimmen Sie die exakten Koordinaten des Schnittpunkts der Tangente an f(x) im Kurvenpunkt A(-ln(4)|ü) mit der y-Achse.

Lösung:

Ableitungen:

für die erste Ableitung gibt es zwei Möglichkeiten:

- f(x) ausbinomieren und dann ganz normal ableiten:
  $f(x) = 4-4e^{-x}+e^{-2x} \quad\Rightarrow\quad f'(x) = +4e^{-x}+(-2)e^{-2x}$
- f'(x) mit der Kettenregel berechnen
  $f(x) = (2-e^{-x})^2 \quad\Rightarrow$
  $f'(x) = 2\cdot(2-e^{-x})^1\cdot e^{-x} = 4e^{-x}-2e^{-2x}$

innerer Term:	$2-e^{-x}$
innere Ableitung:	$+e^{-x}$

$f''(x) = 4\cdot(-1)\cdot e^{-x} - 2\cdot(-2)\cdot e^{-2x} = -4e^{-x} + 4e^{-2x}$

$f'''(x) = -4\cdot(-1)\cdot e^{-x} + 4\cdot(-2)\cdot e^{-2x} = 4e^{-x} - 8e^{-2x}$

Asymptoten [Verhalten von f(x) für $x \to\pm\infty$]

für $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to (2-e^{-\infty})^2 \to (2-0)^2 \to 4$

für $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to (2-e^{+\infty})^2 \to (2-\infty)^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

D.h. am rechten Rand der Zeichnung geht die Funktion gegen y=4, am linken Rand der Zeichnung geht sie hoch.

$\Rightarrow$ waagerechte Asymptote bei **y = 4**

Nullstellen:

Wir haben f(x) in zwei Darstellungsformen:
Erstens $f(x)=(2-e^{-x})^2$ und zweitens $f(x)=4-4e^{-x}+e^{-2x}$.
Die letzte Form ist dabei etwas ungeschickter, man müsste $e^{-x}=z$ substituieren.
Die erste Form ist daher besser.

$$f(x) = 0$$
$$(2-e^{-x})^2 = 0 \qquad | \sqrt{\ }$$
$$2-e^{-x} = 0 \qquad | +e^{-x}$$
$$2 = e^{-x} \qquad | \ln(..)$$
$$\ln(2) = -x \quad \Rightarrow \quad x = -\ln(2) \quad \Rightarrow$$

N (-ln(2) | 0)

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$
$$4e^{-x}-2e^{-2x} = 0 \qquad (\ 2e^{-x} \text{ ausklammern })$$
$$2e^{-x} \cdot (2-e^{-x}) = 0$$

$2e^{-x}=0$ k.Lös.

$2-e^{-x}=0$
$e^{-x}=2$
$-x = \ln(2) \quad \Rightarrow \quad x = -\ln(2)$

überprüfen in f''(x):

$$f''(-\ln(2)) = -4e^{+\ln(2)}+4e^{+2\cdot\ln(2)} = -4e^{\ln(2)}+4e^{\ln(2^2)} = {}^{(1)}$$
$$= -4\cdot 2 + 4\cdot 2^2 = -8+16 = +8 > 0 \Rightarrow \text{TP}$$

y-Wert: $f(-\ln(2)) = (2-e^{+\ln(2)})^2 = (2-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow$ **T (-ln(2) | 0)**

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$
$$-4e^{-x} + 4e^{-2x} = 0 \qquad (\ 4e^{-x} \text{ ausklammern })$$
$$4e^{-x} \cdot (-1+e^{-x}) = 0$$

$4e^{-x}=0$ k.Lös.

$-1+e^{-x} = 0$
$e^{-x} = 1$
$-x = \ln(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

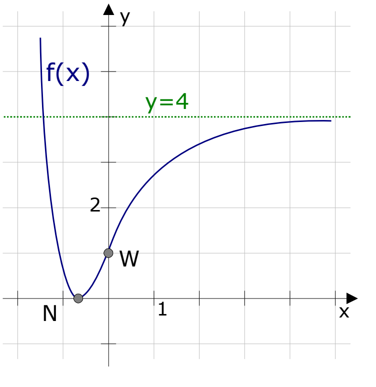
überprüfen in f'''(x):

$$f'''(0) = 4e^0-8e^0 = -4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WP}$$

y-Wert: $f(0) = (2-e^0)^2 = (2-1)^2 = 1$

$\Rightarrow$ **W (0 | 1)**

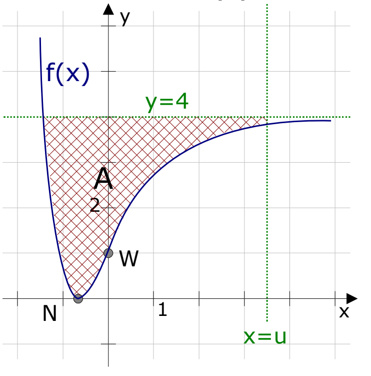
Zeichnung →



1 Logarithmenregeln: $A\cdot\ln(B)=\ln(B^A)$ und $e^{\ln(A)}=A$

© Havonix 2015
www.mathe-seite.de

b) Die Gerade x=u ist eine senkrechte Gerade.
Die waagerechte Asymptote haben wir bereits in Teilaufgabe a) berechnet.
(Hätten wir das vorher nicht gemacht, müssten wir´s an dieser Stelle nachholen).
Diese waagerechte Asymptote ist y=4.
(Die Fläche zwischen y=4, f(x) und x=u ist rechts eingezeichnet.)
Die Fläche wird oben durch y=4 begrenzt, unten durch die Funktion f(x).
Die rechte Integralgrenze ist bei x=u, die linke Integralgrenze ist beim Schnittpunkt, welchen wir dummerweise noch nicht haben.
Also berechnen wir den Schnittpunkt von f(x) mit der Geraden y=4.



$$f(x) = 4$$
$$(2-e^{-x})2 = 4 \qquad | \sqrt{\ }$$
$$2-e^{-x} = \pm 2$$

$2-e^{-x}=-2$	$2-e^{-x}=+2$
$-e^{-x} = -4$	$-e^{-x} = 0$
$e^{-x} = 4$	k.Lös.
$-x=\ln(4)$	
$x=-\ln(4)$	

$x=-\ln(4) \quad \Rightarrow \quad$ Schnittpunkt bei $x=-\ln(4)$

$$A(u) = \int_{-\ln(4)}^{u} 4-f(x)\,dx = \int_{-\ln(4)}^{u} 4-\left(2-e^{-x}\right)^2 dx = \qquad \leftarrow$$
$$= \int_{-\ln(4)}^{u} 4-\left(4-4e^{-x}+e^{-2x}\right) dx = \int_{-\ln(4)}^{u} 4e^{-x}-e^{-2x}\,dx =$$
$$= \left[-4e^{-x}-\frac{1}{-2}\cdot e^{-2x}\right]_{-\ln(4)}^{u} = \left[-4e^{-x}+\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}\right]_{-\ln(4)}^{u} =$$
$$= \left[-4e^{-u}+\frac{1}{2}\cdot e^{-2u}\right]-\left[-4e^{+\ln(4)}+\frac{1}{2}\cdot e^{+2\cdot\ln(4)}\right] = \ (1) \qquad \leftarrow$$
$$= \left[-4e^{-u}+\frac{1}{2}\cdot e^{-2u}\right]-\left[-4e^{+\ln(4)}+\frac{1}{2}\cdot e^{\ln(4^2)}\right] =$$
$$= \left[-4e^{-u}+\frac{1}{2}\cdot e^{-2u}\right]-\left[-4\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 4^2\right] =$$
$$= \left[-4e^{-u}+\frac{1}{2}\cdot e^{-2u}\right]-\left[-16+8\right] = -4e^{-u}+\frac{1}{2}\cdot e^{-2u}+8 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A(u) = -4e^{-u}+\frac{1}{2}\cdot e^{-2u}+8}$$

Das Binom *muss* aufgelöst werden, da die innere Ableitung nicht nur eine Zahl ist.
Die hintere Klammer könnte man auch in den GTR eintippen, falls der GTR bei der Aufgabe erlaubt ist.

Wenn man mal A(u) bestimmt hat, ist $\lim\limits_{u\to\infty} A(u)$ gar nicht mehr so schwer. Man denkt sich statt dem „u" ein „∞" und hält sich vor Augen, dass $e^{-\infty}\to 0$ geht.

$$\lim_{u\to\infty} A(u) = \lim_{u\to\infty} -4\cdot e^{-u}+\frac{1}{2}\cdot e^{-2u}+8 = -4\cdot 0+½\cdot 0+8 = 8 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\lim_{u\to\infty} A(u) = 8}$$

c) Man muss die Gleichung der Tangente natürlich von Hand rechnen [also ohne GTR oder CAS], da die exakten Koordinaten des Schnittpunktes gefragt sind.
Wir bemühen die Tangentengleichung... [der Ansatz über y=m·x+b wäre auch möglich]
$$y_{Tang} = f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$$
u ist der Berührpunkt der Tangente, das ist der x-Wert von A $\Rightarrow$ u=-ln(4).

1 Logarithmenregeln: $A\cdot\ln(B)=\ln(B^A)$ und $e^{\ln(A)}=A$

© Havonix 2015
www.mathe-seite.de

$\Rightarrow$ $f'(u) = f'(-\ln(4)) = 4e^{+\ln(4)}-2e^{+2\cdot\ln(4)} = 4e^{\ln(4)}-2e^{\ln(4^2)} \overset{(1)}{=} 4\cdot4-2\cdot4^2 = -16$
$\Rightarrow$ $f(u) = f(-\ln(4)) = (2-e^{+\ln(4)})^2 = (2-4)^2 = (-2)^2 = 4$

$u=-\ln(4)$, $f'(u)=-16$ und $f(u)=4$ in y_{Tang} einsetzen …

$\Rightarrow$ $y_{Tang} = -16\cdot(x-(-\ln(4)) + 4 = -16\cdot(x+\ln(4)) + 4$ $\Rightarrow$ $y=-16x-16\ln(4)+4$

Den Schnittpunkt der Tangente mit der y-Achse erhält man, indem man x=0 in die Tangente einsetzt. [Jeder Punkt auf der y-Achse hat den x-Wert x=0.]

x=0 in die Tangentengleichung:
$\Rightarrow$ $y_{Tang} = -16\cdot0-16\cdot\ln(4)+4 = -16\cdot\ln(4)+4$ $\Rightarrow$ **$S_y(0|-16\cdot\ln(4)+4)$**

1 Logarithmenregeln: $A\cdot\ln(B)=\ln(B^A)$ und $e^{\ln(A)}=A$

© Havonix 2015
www.mathe-seite.de