V.03 Abstände

In eine Prüfung in Mathe zu gehen, ohne Abstand *Punkt-Punkt*, Abstand *Punkt-Ebene* oder *Punkt-Gerade* zu können, ist derart sinnlos, dass Sie stattdessen daheim bleiben und sich einen schönen Tag machen können.
Seien Sie also bitte brave Kinder und lernen diese drei Sachen besonders fleißig.

V.03.01 Abstand Punkt - Punkt (∰)

Bsp.1 Bestimme den Abstand von A(4 | -2 | 1) zu B(1 | 3 | 6) !

Lösung:

→ Verbindungsvektor AB aufstellen: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 & - & 4 \\ 3 & - & -2 \\ 6 & - & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

→ Länge des Vektors bestimmen: $d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{59} \approx 7{,}68$

Bsp.2 Bestimme den Abstand der Punkte A und B mit: A(1|2|3) und B(-4|0|4).

Lösung: $d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{30} \approx 5{,}48$

Bsp.3 Bestimme den Parameter „k“ so, dass der Abstand von C(8 | 3 | 6) zu D(k | -5 | 4) 18LE beträgt !

Lösung:

$d(C,D) = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\begin{pmatrix} k-8 \\ -5-3 \\ 4-6 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} k-8 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(k-8)^2 + (-8)^2 + (-2)^2}$

Dieser Abstand soll nun den Wert 18 annehmen, es gilt also:

$\sqrt{(k-8)^2 + (-8)^2 + (-2)^2} = 18$

$\sqrt{k^2 - 16k + 132} = 18 \qquad |\ (\ )^2$

$k^2 - 16k + 132 = 324 \qquad |\ -324$

Falls man einen GTR/CAS verwendet darf, kann man ab hier diese Gleichung von ihm lösen lassen. Wir rechnen jedoch natürlich lieber alles mühsam von Hand. Masochismus pur!

$$k^2 - 16k - 192 = 0 \quad ^{(1)}$$

$$k_{1,2} = 8 \pm \sqrt{8^2 + 192} = +8 \pm 16 \qquad \Rightarrow k_1 = 24 \quad k_2 = -8$$

Bsp.4 Welche Punkte der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

haben von P(4 | 3 | 2) den Abstand 6 ?

Lösung:
Immer, wenn man von einem Punkt *nur* weiß, dass er auf einer Gerade liegt, bekommt er die „Koordinaten" von dieser Gerade (nennt sich auch „laufender Punkt einer Geraden" oder „Einzelpunktform" einer Gerade) $[x_1=-1+1\cdot t, \quad x_2=2-1\cdot t, \quad x_3=-6+4\cdot t]$.
Jeder Punkt von g hat also die Koordinaten: G(-1+t | 2–t | -6+4t)
Nun rechnen wir ganz stupide den Abstand von G zu P aus.

$$d(P,G) = |\overrightarrow{PG}| = \left| \begin{pmatrix} -1+t & - & 4 \\ 2-t & - & 3 \\ -6+4t & - & 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} t-5 \\ -t-1 \\ 4t-8 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \sqrt{(t-5)^2 + (-t-1)^2 + (4t-8)^2} = \ldots = \sqrt{18t^2 - 72t + 90}$$

Wegen $d(P,G) = 6$ gilt:

$$\sqrt{18t^2 - 72t + 90} = 6 \qquad |\ (\ )^2 \qquad \leftarrow$$

Ab hier könnte man die Gleichung wieder vom GTR lösen lassen [falls erlaubt].

$$18t^2 - 72t + 90 = 36 \qquad |\ -36 \quad |\ :18$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

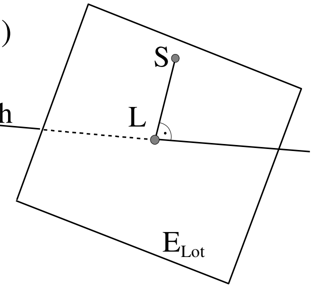
$$t_{1,2} = +2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \qquad \Rightarrow t_1 = 1 \quad t_2 = 3$$

t_1 in g: $\Rightarrow G_1(\ 0 \mid 1 \mid -2\ )$ t_2 in g: $\Rightarrow G_2(\ 2 \mid -1 \mid 6\ )$

V.03.02 Abstand Punkt - Gerade (über Lotebene) (∯)

Um den Abstand Punkt-Gerade zu bestimmen, werden wir:

→ erst die Lotebene E_{Lot} aufstellen,
→ dann den Lotfußpunkt L [als Schnittpunkt von E_{Lot} mit h] bestimmen,
→ dann den Abstand von L zum gegebenen Punkt.



1 Eine quadratische Gleichung löst man mit der p-q-Formel oder der a-b-c-Formel.

Bsp.5 Der Vogel „Schlumpi“ befindet sich im Punkt S(15|4|-2). Er ist sehr müde. Da sichtet er plötzlich eine Hochspannungsleitung, welche entlang

der Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ verläuft.

Wie weit muss Schlumpi noch fliegen, um sich auf der Hochspannungsleitung ausruhen zu können ??

Lösung:
Erst `mal bestimmen wir den Punkt L der Hochspannungsleitung, welcher von Schlumpi aus gesehen, am nächsten liegt. [Unromantiker würden sagen: wir errechnen den Lotfußpunkt.] Dazu stellen wir in Gedanken eine Ebene auf, welche senkrecht zur Hochspannungsleitung liegt und durch Schlumpi geht. [Natürlich tut das Schlumpi nicht weh, es ist ja nur eine imaginäre Ebene.] Der Normalenvektor dieser Ebene müsste also der Richtungsvektor der Hochspannungsleitung h sein.
Wir wissen also: diese [imaginäre!] Lotebene hat die Form: $E_{lot} : 3x_1 - 6x_2 + 6x_3 = d$

Da E_{lot} durch Schlumpi geht [ohne ihm weh zu tun!!] kann man mit diesem Punkt S eine Punktprobe machen, man kann also S in E_{Lot} einsetzen.

S in E_{lot} : $3 \cdot 15 - 6 \cdot 4 + 6 \cdot (-2) = d \quad \Rightarrow d = 9$

Unsere Lotebene lautet also $E_{Lot} : 3x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 9$

Nun schneiden wir diese Lotebene [welche Schlumpi wirklich überhaupt nicht weh tut] mit der Hochspannungsleitung h und erhalten den Lotfußpunkt L [Schlumpis Ausruhpunkt].

$h \cap E_{lot}$: $3 \cdot (7+3t) - 6 \cdot (-10-6t) + 6 \cdot (15+6t) = 9$

$171 + 81t = 9 \quad \Rightarrow \quad t = -2 \qquad$ t in h $\quad \Rightarrow \quad L(1 | 2 | 3)$

„Schlumpi, flieg so schnell Du kannst zum Punkt L(1|2|3).
Dahin ist es am kürzesten !“

Wir berechnen derweil, wie weit es wirklich ist.

$$d(L,S) = \left|\overrightarrow{LS}\right| = \left|\begin{pmatrix} 15-1 \\ 4-2 \\ -2-3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{14^2 + 2^2 + (-5)^2} = 15$$

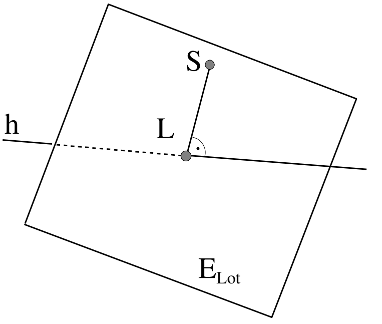
Schlumpi muss noch 15 Längeneinheiten fliegen.

[Während der vielen Minuten, die wir für diese Rechnung gebraucht haben, hat sich Schlumpi auf dem Boden ausgeruht und wurde derweil leider vom Fuchs gefressen.]

V.03.03 Abstand Punkt - Gerade (über Einzelpunktform) (∯)

Mal schauen, ob wir die „Schlumpi"-Aufgabe auch anders lösen können.

Bsp.6 Der Vogel „Schlumpi2" befindet sich im Punkt S(15|4|-2).
[Schlumpi1 wurde ja vom Fuchs gefressen.]



Auch er ist sehr müde.
Da sichtet er plötzlich wieder die Hochspannungsleitung, welche entlang der

Geraden h : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ verläuft.

Wie weit muss Schlumpi2 noch fliegen, um sich auf der Hochspannungsleitung ausruhen zu können ??

Lösung:
Wir probieren folgenden Ansatz: Da der Lotfußpunkt L sich auf der Geraden h befindet, hat er die Koordinaten L(7+3t | -10–6t | 15+6t).
Da L ein Lotfußpunkt ist, muss der Vektor $\overrightarrow{SL}$ senkrecht auf der Geraden h stehen.
Wie wir aus Kap.01a) wissen, gibt das Skalarprodukt von zwei Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen, Null. Das bedeutet, dass auch das Skalarprodukt von $\overrightarrow{SL}$ mit dem Richtungsvektor von h Null ergeben muss. Das isch kuhl.

$$\overrightarrow{SL} = \begin{pmatrix} 7+3t & - & 15 \\ -10-6t & - & 4 \\ 15+6t & - & (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+3t \\ -14-6t \\ 17+6t \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{RV}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{SL} \perp \overrightarrow{RV}_g \Rightarrow \begin{pmatrix} -8+3t \\ -14-6t \\ 17+6t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-8+3t)\cdot 3 + (-14-6t)\cdot(-6) + (17+6t)\cdot 6 = 0$$

$$162 + 81t = 0 \quad \Rightarrow t = -2 \quad \text{in h} \quad \Rightarrow L(\ 1 \mid 2 \mid 3\ )$$

Der gesuchte Abstand von Punkt S zur Gerade h ist gleich dem Abstand vom Punkt P zum Lotfußpunkt L.

$$d(L,S) = \left|\overrightarrow{LS}\right| = \left|\begin{pmatrix} 15-1 \\ 4-2 \\ -2-3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{14^2 + 2^2 + (-5)^2} = 15$$

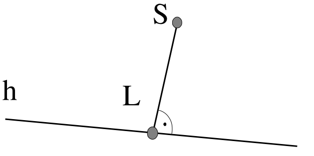
Schlumpi2 muss auch wieder 15 Längeneinheiten fliegen.
[Da wir nicht so viel gelabert haben wie in Bsp.5, hat es Schlumpi2 mit heiler Haut auf die Hochspannungsleitung geschafft.]

V.03.04 Abstand Punkt - Gerade (über GTR/CAS) (∰)

Dieses Kapitel beachten Sie bitte nur, falls Sie einen GTR oder einen CAS verwenden dürfen. Falls ja, haben Sie Glück, denn der GTR liefert die schnellste Methode für die Abstandberechnung von einem Punkt zu einer Gerade.

Bsp.7 Der Vogel „Schlumpine" befindet sich im Punkt S(15|4|-2).
[Schlumpine war die Freundin von Schlumpi1]
Sie ist ein bisschen müde.
Plötzlich sichtet sie die gleiche Hochspannungsleitung, welche entlang der Geraden

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ verläuft.}$$



Wie weit muss Schlumpine noch fliegen, um sich auf der Hochspannungsleitung ausruhen zu können ??

Lösung:
Der Ansatz geht wieder über den laufenden Punkt der Geraden.
L(7+3t | -10–6t | 15+6t).
Der Abstand eines Punktes zur Geraden ist immer der *kleinste* Abstand.
Also berechnen wir jetzt einfach den Abstand von S zu L [in Abhängigkeit von t] und bestimmen davon das Minimum mit dem Taschenrechner.

Der Verbindungsvektor: $\overrightarrow{SL} = \begin{pmatrix} 7+3t & - & 15 \\ -10-6t & - & 4 \\ 15+6t & - & (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+3t \\ -14-6t \\ 17+6t \end{pmatrix}$

Der Abstand von S zu L: $\left|\overrightarrow{SL}\right| = \sqrt{(-8+3t)^2 + (-14-6t)^2 + (17+6t)^2}$

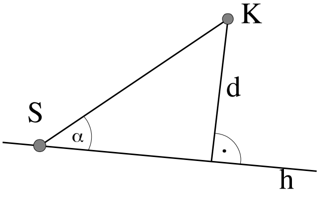
Diese lange Wurzel geben wir [so wie sie ist] in den GTR oder CAS ein und bestimmen davon das Minimum.
[Möglichkeit 1: Man gibt sie im Grafik-Menü als Funktion ein und lässt sich das Minimum berechnen oder
Möglichkeit 2: Je nach GTR-Modell erhält man im Hauptmenü über den „fMin"-Befehl das Minimum)
Man erhält ein Minimum bei x bzw. t=-2 und bei y bzw. d=15

In dieser Aufgabe war nur der Abstand gefragt, den haben wir nun. d=15
Wollte man auch noch den Lotfußpunkt haben, könnte man nun t=-2 in L(7+3t | -10–6t | 15+6t) einsetzen und hätte den Lotfußpunkt L(1 | 2 | 3).

V.03.05 Abstand Punkt - Gerade (über Sinus des Winkels) (∰)

Bsp.8 Der Vogel „Schlumpus“ fliegt entlang der Geraden $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

[Schlumpus ist der neue Freund von Schlumpine, die ja seit Bsp.5 Single ist.]
Schlumpus ist voll auf Speed, weil er gleich sein erstes Rendezvous mit seiner neuen Flamme hat. Seine Hormonproduktion läuft auf 200%. Während er so fliegt, fällt ihm ein, dass er keine Kondome dabei hat. Ein entsprechender Automat befindet sich im Punkt K(15|4|-2). Wie weit ist der Automat von seiner Flugbahn entfernt ??



Lösung:
Schlumpus befindet sich irgendwo auf der Gerade. Nehmen wir an, es wäre der Stützvektor S(7|-10|15). Nun entsteht ein Dreieck, in welchem der gewünschte Abstand vom Punkt zu Geraden die Gegenkathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist.

Es gilt: $\sin(\alpha) = \frac{d}{\overline{SK}}$

Berechnung der Hypotenusenlänge $\overline{SK}$:

$$\overline{SK} = \left|\overrightarrow{SK}\right| = \left|\begin{pmatrix} 15 & - & 7 \\ 4 & - & -10 \\ -2 & - & 15 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -17 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{8^2 + 14^2 + (-17)^2} = \sqrt{549} \approx 23{,}43$$

Berechnung des Winkels zwischen $\overrightarrow{SK}$ und Gerade.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -17 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 6^2} \cdot \sqrt{8^2 + 14^2 + (-17)^2}} = \frac{|3 \cdot 8 + (-6) \cdot 14 + 6 \cdot (-17)|}{\sqrt{81} \cdot \sqrt{549}} \approx 0{,}768$$

$\Rightarrow \cos(\alpha) = 0{,}768 \quad \Rightarrow \alpha = 39{,}83°$

Berechnung des gesuchten Abstands Punkt-Gerade:

$$\sin(\alpha) = \frac{d}{\overline{SK}} \quad \Rightarrow d = \overline{SK} \cdot \sin(\alpha) = 23{,}43 \cdot \sin(39{,}83°) \approx 15{,}0$$

Der Abstand von Schlumpus´ Flugbahn zum Kondomautomaten beträgt 15m.

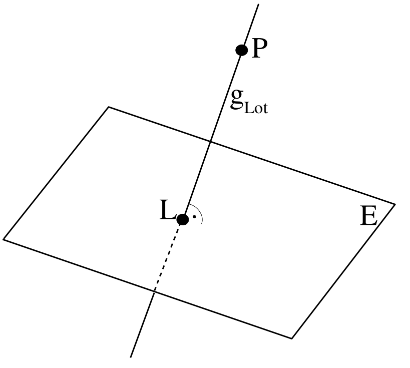
V.03.06 Abstand Punkt - Ebene (über Lotgerade) (∰)

Wir stellen immer zuerst die Lotgerade g_{Lot} auf, dann errechnen wir den Lotfußpunkt L [als Schnittpunkt von g_{Lot} mit E].
Der gesuchte Abstand ist dann der Abstand von L zum gegebenen Punkt.
[Abstand Punkt-Ebene geht über HNF aber *immer* schneller.]

Bsp.9 Bestimme den Abstand von P(7 | 8 | 9) zu E : $4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6$

Lösung:
Wir werden die Lotgerade auf E durch P bestimmen. (Um den Lotfußpunkt zu erhalten).

$$g_{Lot}: \vec{x} = \begin{pmatrix} P \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \vec{n}_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$



g_{Lot} in E:

$$4\cdot(7+4t) + 4\cdot(8+4t) - 2\cdot(9-2t) = 6$$

$$42 + 36t = 6 \quad \Rightarrow t = -1$$

$$\text{t in g:} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{L (3 | 4 | 11)}$$

Der Abstand von L zu P ist gleichzeitig der gesuchte Abstand von E zu P !

$$d(E,P) = d(L,P) = \left| \begin{pmatrix} 7-3 \\ 8-4 \\ 9-11 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = 6$$

V.03.07 Abstand Punkt - Ebene (über HNF) (∰)

Es gibt mehrere Möglichkeiten die HNF (=Hesse-Normal-Form) einer Ebene aufstellen. Ich hab' nicht vor, alle aufzuführen, nur eine davon halte ich persönlich für am einfachsten.
Man braucht dafür die Koordinatengleichung der Ebene, bringt alles nach links [so dass also rechts „0“ steht] und teilt nun durch den Betrag des Normalenvektors.

Bsp.10 Es sei eine Ebene E : $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$

Die HNF davon lautet $E: \dfrac{2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E: \dfrac{2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6}{3} = 0$

oder anderes Beispiel:

Es sei eine Ebene $F: 6x_1 - 2x_1 + 3x_3 = -18$

Die HNF davon lautet $F: \dfrac{6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 18}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F: \dfrac{6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 18}{7} = 0$

Um nun den Abstand irgendeines Punktes zu irgendeiner Ebene zu berechnen, nimmt man die HNF der Ebene, setzt den Punkt für x_1 , x_2 , x_3 ein und erhält auf der rechten Seite statt „=0“ den Abstand Punkt-Ebene (also „d(E,P)“).
Weil Abstände immer positiv sind, wird das Ganze noch in' Betrag gesetzt.

Bsp.11 Bestimme Sie den Abstand von P(7 | 8 | 9) zu $E: 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9$

Lösung:

HNF der Ebene aufstellen $E: \dfrac{4x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 9}{\sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \dfrac{4x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 9}{6} = 0$

$$\Rightarrow d(E,P) = \left| \frac{4 \cdot 7 + 4 \cdot 8 - 2 \cdot 9 - 9}{6} \right| = \left| \frac{33}{6} \right| = 5{,}5$$

Bsp.12 Welche Ebene ist parallel zu $F: 4x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 0$
und hat von Ü(6|6|6) den Abstand d=9?

Lösung:
Wenn die Ebene parallel zu F sein soll, hat sie den gleichen Normalenvektor, hat damit die Form: $E: 4x_1 - 7x_2 - 4x_3 = ??$ besser: $E: 4x_1 - 7x_2 - 4x_3 = a$

HNF der Ebene aufstellen $E: \dfrac{4x_1 - 7x_2 - 4x_3 - a}{\sqrt{4^2 + (-7)^2 + (-4)^2}} = \dfrac{4x_1 - 7x_2 - 4x_3 - a}{9} = 0$

$$\Rightarrow d(E,Ü) = \left| \frac{4 \cdot 6 - 7 \cdot 6 - 4 \cdot 6 - a}{9} \right|$$

$$\Rightarrow \quad 9 = \left| \frac{-42 - a}{9} \right| \qquad | \cdot 9$$

[Ab hier könnte man die Gleichung wieder vom GTR lösen lassen.]

$81 = | -42 - a |$ ← den Betrag löst man auf, indem

$\pm 81 = -42 - a$ auf die andere Seite ein „±“ kommt.

$81 = -42 - a \Rightarrow 123 = -a \quad \Rightarrow a_1 = -123$

$-81 = -42 - a \Rightarrow -39 = -a \quad \Rightarrow a_2 = 39$

Die gesuchten Ebenen sind damit: $E_1: 4x_1 - 7x_2 - 4x_3 = -123$

$E_2: 4x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 39$

Bsp.13 Sei $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E: 3x_1 + 3x_3 + 12 = 0$

Welche Punkte der Gerade g haben von E den Abstand $d = \sqrt{8}$?

Lösung:
Jeder Punkt der Gerade hat die Koordinaten G(10+7t | 7+2t | -2+t).
Mit diesem miesen, fiesen, allgemeinen Punkt stellen wir den Abstand zur Ebene E auf und setzen ihn dann gleich $\sqrt{8}$. (Und lösen dann nach „t“ auf).

HNF der Ebene aufstellen $E: \dfrac{3x_1 + 3x_3 + 12}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2}} = \dfrac{3x_1 + 3x_3 + 12}{\sqrt{18}} = 0$

Um den Abstand zu berechnen: G in HNF einsetzen.

$$d(E,G) = \left| \frac{3\cdot(10+7t) + 3\cdot(-2+t) + 12}{\sqrt{18}} \right| = \sqrt{8}$$

$$\left| \frac{24t+36}{\sqrt{18}} \right| = \sqrt{8} \qquad | \cdot \sqrt{18}$$

[Ab hier könnte man die Gleichung wieder vom GTR lösen lassen.]

$|24t+36| = 12$ Betrag auflösen

$24t+36 = \pm 12$

$24t + 36 = +12 \quad \Rightarrow t_1 = -1$

$24t + 36 = -12 \quad \Rightarrow t_2 = -2$ t_1 und t_2 wieder in g einsetzen

$\Rightarrow G_1 (3 | 5 | -3) \qquad \Rightarrow G_2 (-4 | 3 | -4)$

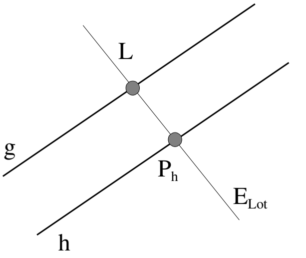
V.03.08 Abstand zwei paralleler Geraden, Gerade-Ebene, Ebene-Ebene (∯)

- zwei parallele Geraden haben überall den *gleichen* Abstand. Man führt die Rechnung auf „Abstand Punkt-Gerade“ zurück. Man nimmt von der einen Gerade einen Punkt [z.B. den Stützvektor] und berechnet den Abstand zur anderen Geraden.
- eine Ebene und eine Gerade, die zueinander parallel sind, haben überall den gleichen Abstand [na, kommt Ihnen das bekannt vor?]. Man führt alles auf die Berechnung von Punkt-Ebene zurück. Man nimmt von der Geraden einen Punkt [z.B. den Stützvektor] und berechnet den Abstand zur anderen Geraden.
- zwei parallele Ebenen haben überall den gleichen Abstand [na, kommt Ihnen das bekannt vor?]. Man führt alles auf die Berechnung von Punkt-Ebene zurück. Man nimmt von der einen Ebene einen Punkt [z.B. einen Spurpunkt] und berechnet den Abstand zur anderen Ebene.

Bsp.14 Sei $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\8\\5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\8\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}8\\6\\2\end{pmatrix}$

Bestimmen Sie den Abstand beider Geraden.

Lösung:



Dass es sich um zwei parallele Geraden handelt, sieht man an den Richtungsvektoren. Damit ist der Abstand zwischen beiden Geraden überall gleich. Wir können also den Abstand von einem Stützvektor zur anderen Geraden berechnen.

[Ich werde hier die Methode über die Lotebene anwenden.]

Wir können z.B. den Abstand von der Gerade g zum Stützvektor von h ausrechnen.
Den Stützvektor von h nennen wir `mal P_h, er hat die Koordinaten: $P_h(\,5 \mid 1 \mid 8\,)$
Wir stellen zuerst die Lotebene auf, die senkrecht auf g steht und durch P_h geht.

$E_{Lot}\ :\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = d$

P_h in $E_{Lot}\ :\ 4\cdot 5 + 3\cdot 1 + 8 = d \quad\Rightarrow\quad d=31 \quad\Rightarrow\quad E_{Lot}: 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 31$

Da wir für die Lotebene den Stützvektor von *h* genommen haben, schneiden wir E_{Lot} mit *g*!

$E_{Lot} \cap g$: $\quad 4\cdot(7+4t) + 3\cdot(8+3t) + (5+t) = 31$

$\qquad 57 + 26t = 31 \qquad \Rightarrow t = -1$

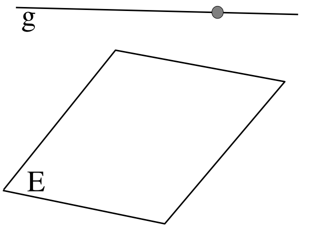
t in g $\Rightarrow$ Lotfußpunkt $L(\,7-1\cdot 4 \mid 8-1\cdot 3 \mid 5-1\cdot 1\,) \quad\Rightarrow\quad L(\,3 \mid 5 \mid 4\,)$

$$d(g,h) = d(L,P_h) = \left|\overrightarrow{P_hL}\right| = \left|\begin{pmatrix}3-5\\5-1\\4-8\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$$

Bsp.15 Sei $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\8\\-6\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$ und $E: 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 16$

Bestimmen Sie den Abstand von g und E !

Lösung:



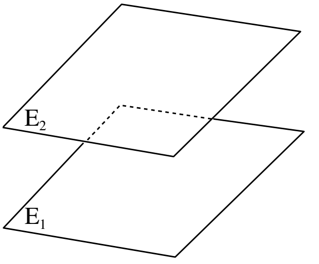
Da g und E parallel sind (das Skalarprodukt von $\vec{n}_E$ mit dem RVg ist Null), kann man einfach den Abstand vom Stützvektor zur Ebene ausrechnen.

$$HNF_E \qquad \frac{2x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 16}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{2x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 16}{6} = 0$$

$$d(g,E) = d\left(\begin{pmatrix}7\\8\\-6\end{pmatrix}, E\right) = \left|\frac{2\cdot 7 + 4\cdot 8 - 4\cdot(-6) - 16}{6}\right| = \left|\frac{54}{6}\right| = 9$$

Bsp.16 Sei $E: \ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 66$ und $F: 6x_1 + 4x_2 + 10x_3 = -50$

Bestimmen Sie den Abstand der Ebenen E und F !



Lösung:

Da E und F parallel sind [beide Normalenvektoren sind Vielfache voneinander], kann man einfach den Abstand von irgend einem Punkt der einen Ebene zur anderen Ebene ausrechnen.

Ein Punkt der Ebene E ist z.Bsp. der Punkt (22 | 0 | 0)

$$d(E,F) = d\left(\begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F\right) = \left| \frac{6\cdot 22 + 4\cdot 0 + 10\cdot 0 + 50}{\sqrt{152}} \right| =$$

$$= \left| \frac{182}{\sqrt{152}} \right| \approx 14{,}76$$

Der Abstand der beiden Ebenen ist überall gleich. Man nimmt irgend einen Punkt der einen Ebene und berechnet den Abstand zur anderen Ebene.

Es gibt mehrere Methoden, den Abstand zweier windschiefen Geraden zu berechnen. Eine Methode [siehe Kapitel V.03.10] besteht darin, die Lotfußpunkte zu berechnen. Das dauert zwar etwas länger, aber es gibt viele Aufgaben, in welchen man die Lotfußpunkte tatsächlich braucht.

Die zweite Methode [Kapitel V.03.09] geht über die „einfache" Formel: $d = \vec{n}_0 \cdot \left(\vec{p} - \vec{q}\right)$.

Das geht zwar schneller, hat aber manchmal den Nachteil, dass man die Lotfußpunkte nicht erhält.

Fazit:

Wenn man die Lotfußpunkte braucht, ist Kap.V.03.10 angebracht.

Wenn man die Lotfußpunkte nicht braucht, ist V.03.09 besser.

V.03.09 Abstand von zwei windschiefen Geraden über die Formel (∯)

Bsp.17

Sei $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\8\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-3\\9\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$

Bestimmen Sie den Abstand von g und h !

Der Abstand von zwei windschiefen Geraden:

$$d(g,h) = \left|\frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{q})\right|$$

Da $\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}$ gilt,
taucht die Formel auch häufig in der Form auf:

$$d(g,h) = \left|\vec{n}_0\cdot(\vec{p}-\vec{q})\right|$$

hierbei sind p und q die Stützvektoren der Geraden
$\vec{n}$ ist der Normalenvektor, den man aus den Richtungsvektoren erhält.

Lösung:
Da die Lotfußpunkte nicht gefragt sind, verwenden wir die Formel: $d = \left|\frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{q})\right|$

$\vec{p}$ und $\vec{q}$ sind die Stützvektoren der beiden Geraden. Zuerst berechnen wir den Normalenvektor aus den beiden Richtungsvektoren der zwei Geraden.

[Ohne triftigen Grund verwenden wir die Methode vom Skalarprodukt. Die Methode über das Kreuzprodukt wäre natürlich besser :-)]

Aus $\vec{n}\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n}\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix} = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} -1n_1 + 4n_2 + 1n_3 &= 0\\ 1n_1 + 4n_2 - 3n_3 &= 0\\ \hline 8n_2 - 2n_3 &= 0 \end{aligned}$$

Addieren der beiden Gleichungen liefert:

Wähle z.B. $n_2=1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow n_3 = 4 \Rightarrow \ldots \Rightarrow n_1 = 8 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix}$

Der Betrag des Normalenvektors ist: $|\vec{n}| = \sqrt{8^2+1^2+4^2}$

Der Normaleneinheitsvektor ist $\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|}\cdot\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{8^2+1^2+4^2}}\begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix}$

$$d = \left|\vec{n}_0\cdot(\vec{p}-\vec{q})\right| = \left|\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-5\\8\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-3\\9\end{pmatrix}\right]\right| = \left|\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-9\\11\\-5\end{bmatrix}\right| = \left|\frac{1}{9}\cdot(8\cdot(-9)+1\cdot11+4\cdot(-5))\right| = 9$$

Der Abstand der Geraden ist 9.

V.03.10 Abstand windschiefer Geraden über die Lotfußpunkte (∯)

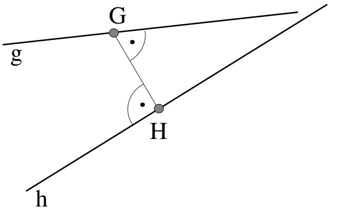
Bsp.18 [Abstand Gerade-Gerade über Berechnung der Lotfußpunkte]

Sei $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\8\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ und $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-3\\9\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$

Welche Punkte der Geraden g und h haben den geringsten Abstand voneinander? Bestimmen Sie den Abstand von g und h !

Lösung:

Wir werden so vorgehen: Stellt Sie sich eine Gerade vor, die sowohl g als auch h in einem rechten Winkel schneidet. Die Länge von dieser Verbindungsstrecke [in der Zeichnung: $\overrightarrow{GH}$] wäre der Abstand der beiden Geraden. Wir werden also G und H bestimmen, die Anfang- und Endpunkt dieser senkrechten Verbindungsgeraden sind.



Die Punkte sind die *Lotfußpunkte* und ich nenne sie analog zu ihren Geraden: „G“ und „H“.

Von G und H wissen wir nur, dass sie auf den Geraden g und h liegen, daher „geben wir“ G und H die Koordinaten der Geraden g und h:

G(-5-t | 8+4t | 4+t) **H**(4+r | -3+4r | 9-3r)

Unser Vektor $\overrightarrow{GH}$ sieht demnach so aus: $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix}(4+r)-(-5-t)\\(-3+4r)-(8+4t)\\(9-3r)-(4+t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9+r+t\\-11+4r-4t\\5-3r-t\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{GH}$ muss ja nun sowohl auf der Geraden g, als auch auf der Geraden h senkrecht stehen, deswegen muss das Skalarprodukt von $\overrightarrow{GH}$ sowohl mit dem Richtungsvektor von g, als auch das mit dem Richtungsvektor von h Null ergeben.

$$\overrightarrow{GH}\circ\overrightarrow{RV}_g = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}9+r+t\\-11+4r-4t\\5-3r-t\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad (9+r+t)\cdot(-1) + (-11+4r-4t)\cdot(4) + (5-3r-t)\cdot(1) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad -48+12r-18t = 0$$

$$\overrightarrow{GH}\circ\overrightarrow{RV}_h = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}9+r+t\\-11+4r-4t\\5-3r-t\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad (9+r+t)\cdot(1) + (-11+4r-4t)\cdot(4) + (5-3r-t)\cdot(-3) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad -50+26r-12t = 0$$

Aus diesen beiden Gleichungen berechnen wir „r“ und „t“.

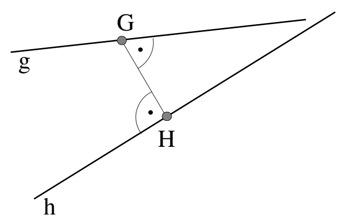
$$\begin{array}{rl} -48 + 12r - 18t = 0 & \mid \cdot (-2) \\ -50 + 26r - 12t = 0 & \mid \cdot\ 3 \\ \hline -54 + 54r \quad\ = 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \Rightarrow \quad r = +1 \\ \Rightarrow \quad t = -2 \end{array}$$

r und t zurück in G und H eingesetzt, ergibt: **G**(-3 | 0 | 2) **H**(5 | 1 | 6)

$$d(g,h) = d(G,H) = \left|\overrightarrow{GH}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5-(-3) \\ 1 - 0 \\ 6 - 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{8^2 + 1^2 + 4^2} = 9$$

Bsp.19 Sei $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie den Abstand von g und h !



Lösung:
G und H „geben wir“ wieder die Koordinaten der Geraden g und h, also:
G(-4+3t | 2+2t | 20-6t) **H**(3 | -3+r | 9-2r)

Unser Vektor $\overrightarrow{GH}$ sieht demnach so aus:

$$\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} (3) & - & (-4+3t) \\ (-3+r) & - & (2+2t) \\ (9-2r) & - & (20-6t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 3t \\ -5+r-2t \\ -11-2r+6t \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{GH}$ muss auf beiden Geraden senkrecht stehen, damit muss das Skalarprodukt mit beiden Richtungsvektoren Null ergeben.

$$\overrightarrow{GH} \circ \overrightarrow{RV}_g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 7 - 3t \\ -5+r-2t \\ -11-2r+6t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (7-3t)\cdot(3) + (-5+r-2t)\cdot(2) + (-11-2r+6t)\cdot(-6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 77+14r-49t = 0$$

$$\overrightarrow{GH} \circ \overrightarrow{RV}_h = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 7 - 3t \\ -5+r-2t \\ -11-2r+6t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (7-3t)\cdot(3) + (-5+r-2t)\cdot(2) + (-11-2r+6t)\cdot(-6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 17+5r-14t = 0$$

Aus diesen beiden Gleichungen berechnen wir „r“ und „t“.

$$\begin{array}{rl} 77 + 14r - 49t = 0 & \mid \cdot (-5) \\ 17 + 5r - 14t = 0 & \mid \cdot 14 \\ \hline -147 \qquad + 49t = 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow t = +3 \quad \Rightarrow r = 5$$

r und t zurück in G und H eingesetzt, ergibt: **G**(5 | 8 | 2) **H**(3 | 2 | -1)

$$d(g,h) = d(G,H) = \left|\overrightarrow{GH}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3-5 \\ 2-8 \\ -1-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = 7$$