

Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter
www.mathe-laden.de bestellen
(falls Sie das möchten).

Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen
finden, die nicht aus dem Internet herunter
geladen werden können.

Dazu gehören:

Inhaltsverzeichnis, Stichwortverzeichnis,
und viele **Aufgaben zum Selberrechnen.**



Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses
Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von
welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.

Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und
den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.

Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

Sie können diese Datei gerne beliebig für den eigenen Gebrauch verwenden.
Nicht gestattet sind Änderungen sowie kommerzielle Nutzung.

h[x]=
MatheSeite

V.03 Abstände

In eine Prüfung in Mathe zu gehen, ohne Abstand *Punkt-Punkt*, Abstand *Punkt-Ebene* oder *Punkt-Gerade* zu können, ist derart sinnlos, dass Sie stattdessen daheim bleiben und sich einen schönen Tag machen können.

Seien Sie also bitte brave Kinder und lernen diese drei Sachen besonders fleißig.

V.03.01 Abstand Punkt - Punkt (###)

Aufgabe 1

Bestimme den Abstand von $A(4|-2|1)$ zu $B(1|3|6)$!

Aufgabe 2

Bestimme den Abstand der Punkte A und B mit: $A(1|2|3)$ und $B(-4|0|4)$.

Aufgabe 3

Bestimme den Parameter „k“ so, dass der Abstand von $C(8|3|6)$ zu $D(k|-5|4)$ 18LE beträgt !

Aufgabe 4

Welche Punkte der Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ haben von $P(4|3|2)$

den Abstand 6 ?

Lösung von Aufgabe 1:

→ Verbindungsvektor AB aufstellen: $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 1 - 4 \\ 3 - (-2) \\ 6 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

→ Länge des Vektors bestimmen: $d(A,B) = |\overline{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{59} \approx 7,68$

Lösung von Aufgabe 2:

$d(A,B) = |\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{30} \approx 5,48$

Lösung von Aufgabe 3:

$d(C,D) = |\overline{CD}| = \left| \begin{pmatrix} k-8 \\ -5-3 \\ 4-6 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} k-8 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(k-8)^2 + (-8)^2 + (-2)^2}$

Dieser Abstand soll nun den Wert 18 annehmen, es gilt also:

$$\sqrt{(k-8)^2 + (-8)^2 + (-2)^2} = 18$$

$$\sqrt{k^2 - 16k + 132} = 18$$

$$k^2 - 16k + 132 = 324$$

$$k^2 - 16k - 192 = 0 \quad (1)$$

$$k_{1,2} = 8 \pm \sqrt{8^2 + 192} = 8 \pm 16 \quad \Rightarrow k_1 = 24 \quad k_2 = -8$$

| ()²

|-324

Falls man einen GTR/CAS verwendet darf, kann man ab hier diese Gleichung von ihm lösen lassen. Wir rechnen jedoch natürlich lieber alles mühsam von Hand. Masochismus pur!

Lösung von Aufgabe 4:

Immer, wenn man von einem Punkt *nur* weiß, dass er auf einer Gerade liegt, bekommt er die „Koordinaten“ von dieser Gerade [nennt sich auch „laufender Punkt einer Geraden“ oder „Einzelpunktform“ einer Gerade] $[x_1 = -1 + 1 \cdot t, \quad x_2 = 2 - 1 \cdot t, \quad x_3 = -6 + 4 \cdot t]$.

Jeder Punkt von g hat also die Koordinaten: G(-1+t | 2-t | -6+4t)

Nun rechnen wir ganz stupide den Abstand von G zu P aus.

$$d(P,G) = |\vec{PG}| = \left| \begin{pmatrix} -1+t & - & 4 \\ 2-t & - & 3 \\ -6+4t & - & 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} t-5 \\ -t-1 \\ 4t-8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(t-5)^2 + (-t-1)^2 + (4t-8)^2} = \dots = \sqrt{18t^2 - 72t + 90}$$

Wegen $d(P,G) = 6$ gilt:

$$\sqrt{18t^2 - 72t + 90} = 6$$

$$18t^2 - 72t + 90 = 36 \quad | -36 \quad | :18$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t_{1,2} = {}^{(2)} = +2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \quad \Rightarrow t_1 = 1 \quad t_2 = 3$$

$$t_1 \text{ in g: } \Rightarrow G_1(0|1|-2) \quad t_2 \text{ in g: } \Rightarrow G_2(2|-1|6)$$

← Ab hier könnte man die Gleichung wieder vom GTR lösen lassen [falls erlaubt].

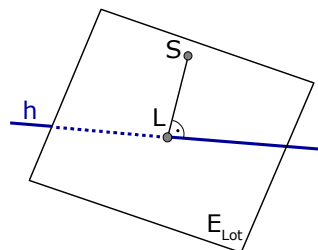
V.03.02 Abstand Punkt - Gerade (über Lotebene) (§§)

Um den Abstand Punkt-Gerade zu bestimmen, werden wir:

→erst die Lotebene E_{Lot} aufstellen,

→dann den Lotfußpunkt L [als Schnittpunkt von E_{Lot} mit h] bestimmen,

→dann den Abstand von L zum gegebenen Punkt.



Aufgabe 5

Der Vogel „Schlumpi“ befindet sich im Punkt S(15|4|-2). Er ist sehr müde.

Da sichtet er plötzlich eine Hochspannungsleitung, welche entlang der Geraden

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ verläuft.}$$

Wie weit muss Schlumpi noch fliegen, um sich auf der Hochspannungsleitung ausruhen zu können ??

- 1 Wir lösen die Gleichung hier mit der p-q-Formel. Die a-b-c-Formel ginge natürlich auch.
- 2 Wir lösen die Gleichung hier mit der p-q-Formel. Die a-b-c-Formel ginge natürlich auch.

Lösung:

Erst `mal bestimmen wir den Punkt L der Hochspannungsleitung, welcher von Schlumpi aus gesehen, am nächsten liegt. [Unromantiker würden sagen: wir errechnen den Lotfußpunkt.] Dazu stellen wir in Gedanken eine Ebene auf, welche senkrecht zur Hochspannungsleitung liegt und durch Schlumpi geht. [Natürlich tut das Schlumpi nicht weh, es ist ja nur eine imaginäre Ebene.] Der Normalenvektor dieser Ebene müsste also der Richtungsvektor der Hochspannungsleitung h sein.

Wir wissen also: diese [imaginäre!] Lotebene hat die Form: $E_{\text{Lot}} : 3x_1 - 6x_2 + 6x_3 = d$

Da E_{Lot} durch Schlumpi geht [ohne ihm weh zu tun!!] kann man mit diesem Punkt S eine Punktprobe machen, man kann also S in E_{Lot} einsetzen.

$$S \text{ in } E_{\text{Lot}} : 3 \cdot 15 - 6 \cdot 4 + 6 \cdot (-2) = d \quad \Rightarrow \quad d = 9$$

Unsere Lotebene lautet also $E_{\text{Lot}} : 3x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 9$

Nun schneiden wir diese Lotebene [welche Schlumpi wirklich überhaupt nicht weh tut] mit der Hochspannungsleitung h und erhalten den Lotfußpunkt L [Schlumpis Ausruhpunkt].

$$h \cap E_{\text{Lot}} : 3 \cdot (7 + 3t) - 6 \cdot (-10 - 6t) + 6 \cdot (15 + 6t) = 9 \\ 171 + 81t = 9 \quad \Rightarrow \quad t = -2 \quad t \text{ in } h \quad \Rightarrow \quad L(1|2|3)$$

„Schlumpi, flieg so schnell Du kannst zum Punkt $L(1|2|3)$. Dahin ist es am kürzesten !“

Wir berechnen derweil, wie weit es wirklich ist.

$$d(L, S) = |\vec{LS}| = \left| \begin{pmatrix} 15-1 \\ 4-2 \\ -2-3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{14^2 + 2^2 + (-5)^2} = 15$$

Schlumpi muss noch 15 Längeneinheiten fliegen.

[Während der vielen Minuten, die wir für diese Rechnung gebraucht haben, hat sich Schlumpi auf dem Boden ausgeruht und wurde derweil leider vom Fuchs gefressen.]

V.03.03 Abstand Punkt - Gerade (über Einzelpunktform) (§§)

Mal schauen, ob wir die „Schlumpi“-Aufgabe auch anders lösen können.

Aufgabe 6

Der Vogel „Schlumpi2“ befindet sich im Punkt $S(15|4|-2)$.

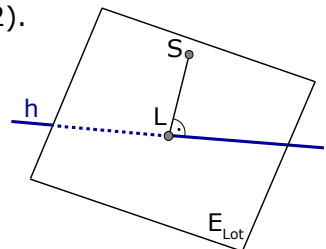
[Schlumpi1 wurde ja vom Fuchs gefressen.]

Auch er ist sehr müde.

Da sieht er plötzlich wieder die Hochspannungsleitung, welche entlang der

Geraden $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ verläuft.

Wie weit muss Schlumpi2 noch fliegen, um sich auf der Hochspannungsleitung ausruhen zu können ??



Lösung:

Wir probieren folgenden Ansatz: Da der Lotfußpunkt L sich auf der Geraden h befindet, hat er die Koordinaten $L(7+3t|-10-6t|15+6t)$.

Da L ein Lotfußpunkt ist, steht der Vektor \overrightarrow{SL} senkrecht auf der Geraden h.

Wie wir aus V.05.02 wissen, gibt das Skalarprodukt von zwei Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen, Null. Das bedeutet, dass auch das Skalarprodukt von \overrightarrow{SL} mit dem Richtungsvektor von h Null ergeben muss. Das ist kuhl.

$$\overrightarrow{SL} = \begin{pmatrix} 7+3t & - & 15 \\ -10-6t & - & 4 \\ 15+6t & - & (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+3t \\ -14-6t \\ 17+6t \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{RV}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{SL} \perp \overrightarrow{RV}_g \Rightarrow \begin{pmatrix} -8+3t \\ -14-6t \\ 17+6t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-8+3t) \cdot 3 + (-14-6t) \cdot (-6) + (17+6t) \cdot 6 = 0 \\ 162 + 81t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -2 \quad \text{in h} \quad \Rightarrow \quad L(1|2|3)$$

Der gesuchte Abstand von Punkt S zur Gerade h ist gleich dem Abstand vom Punkt P zum Lotfußpunkt L.

$$d(L,S) = |\overrightarrow{LS}| = \left| \begin{pmatrix} 15-1 \\ 4-2 \\ -2-3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{14^2 + 2^2 + (-5)^2} = 15$$

Schlumpi2 muss auch wieder 15 Längeneinheiten fliegen.

[Da wir nicht so viel gelabert haben wie in Bsp.5, hat es Schlumpi2 mit heiler Haut auf die Hochspannungsleitung geschafft.]

V.03.04 Abstand Punkt - Gerade (über GTR/CAS) (###)

Dieses Kapitel beachten Sie bitte nur, falls Sie einen GTR oder einen CAS verwenden dürfen. Falls ja, haben Sie Glück, denn der GTR liefert die schnellste Methode für die Abstandsberechnung von einem Punkt zu einer Gerade.

Aufgabe 7

Der Vogel „Schlumpine“ befindet sich im Punkt $S(15|4|-2)$.

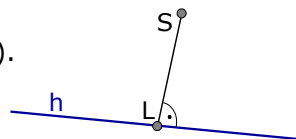
[Schlumpine war die Freundin von Schlumpi1]

Sie ist ein bisschen müde.

Plötzlich sieht sie die gleiche Hochspannungsleitung, welche entlang der Geraden

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ verläuft.}$$

Wie weit muss Schlumpine noch fliegen, um sich auf der Hochspannungsleitung ausruhen zu können ??



Lösung:

Der Ansatz geht wieder über den laufenden Punkt der Geraden.

$$L(7+3t|-10-6t|15+6t)$$

Der Abstand eines Punktes zur Geraden ist immer der *kleinste* Abstand.

Also berechnen wir jetzt einfach den Abstand von S zu L [in Abhängigkeit von t] und

bestimmen davon das Minimum mit dem Taschenrechner.

$$\text{Der Verbindungsvektor: } \vec{SL} = \begin{pmatrix} 7+3t & - & 15 \\ -10-6t & - & 4 \\ 15+6t & - & (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+3t \\ -14-6t \\ 17+6t \end{pmatrix}$$

$$\text{Der Abstand von S zu L: } |\vec{SL}| = \sqrt{(-8+3t)^2 + (-14-6t)^2 + (17+6t)^2}$$

Diese lange Wurzel geben wir [so wie sie ist] in den GTR oder CAS ein und bestimmen davon das Minimum.

[Möglichkeit 1: Man gibt sie im Grafik-Menü als Funktion ein und lässt sich das Minimum berechnen oder

Möglichkeit 2: Je nach GTR-Modell erhält man im Hauptmenü über den „fMin“-Befehl das Minimum)
Man erhält ein Minimum bei x bzw. $t=-2$ und bei y bzw. $d=15$

In dieser Aufgabe war nur der Abstand gefragt, den haben wir nun. $d=15$

Wollte man auch noch den Lotfußpunkt haben, könnte man nun $t=-2$ in $L(7+3t|-10-6t|15+6t)$ einsetzen und hätte den Lotfußpunkt $L(1|2|3)$.

V.03.05 Abstand Punkt - Gerade (über Sinus des Winkels) (###)

Aufgabe 8

Der Vogel „Schlumpus“ fliegt entlang der Geraden $s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

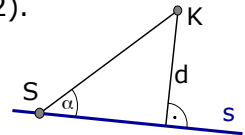
[Schlumpus ist der neue Freund von Schlumpine, die ja seit Aufgabe 5 Single ist.]

Schlumpus ist voll auf Speed, weil er gleich sein erstes Rendezvous mit seiner neuen Flamme hat. Seine Hormonproduktion läuft auf 200%.

Während er so fliegt, fällt ihm ein, dass er keine Kondome dabei hat.

Ein entsprechender Automat befindet sich im Punkt $K(15|4|-2)$.

Wie weit ist der Automat von seiner Flugbahn entfernt ??



Lösung:

Schlumpus befindet sich irgendwo auf der Geraden.

Nehmen wir an, es wäre der Stützvektor $S(7|-10|15)$.

Nun entsteht ein Dreieck, in welchem der gewünschte Abstand vom Punkt zu Geraden die Gegenkathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist.

$$\text{Es gilt: } \sin(\alpha) = \frac{d}{SK}$$

Berechnung der Hypotenusenlänge \overline{SK} :

$$\overline{SK} = |\vec{SK}| = \left| \begin{pmatrix} 15 & - & 7 \\ 4 & - & -10 \\ -2 & - & 15 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -17 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{8^2 + 14^2 + (-17)^2} = \sqrt{549} \approx 23,43$$

Berechnung des Winkels zwischen \vec{SK} und Gerade.

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -17 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 6^2} \cdot \sqrt{8^2 + 14^2 + (-17)^2}} = \frac{|3 \cdot 8 + (-6) \cdot 14 + 6 \cdot (-17)|}{\sqrt{81} \cdot \sqrt{549}} \approx 0,768$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = 0,768 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 39,83^\circ$$

Berechnung des gesuchten Abstands Punkt-Gerade:

$$\sin(\alpha) = \frac{d}{\overline{SK}} \quad \Rightarrow \quad d = \overline{SK} \cdot \sin(\alpha) = 23,43 \cdot \sin(39,83^\circ) \approx 15,0$$

Der Abstand von Schlumpus' Flugbahn zum Kondomautomaten beträgt 15m.

V.03.06 Abstand Punkt - Ebene (über Lotgerade) (###)

Wir stellen immer zuerst die Lotgerade g_{Lot} auf, dann errechnen wir den Lotfußpunkt L [als Schnittpunkt von g_{Lot} mit E].

Der gesuchte Abstand ist dann der Abstand von L zum gegebenen Punkt.

[Abstand Punkt-Ebene geht über HNF aber *immer* schneller.]

Aufgabe 9 Bestimme den Abstand von $P(7|8|9)$ zu $E : 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6$

Lösung von Aufgabe 9:

Wir werden die Lotgerade auf E durch P bestimmen. Diese schneiden wir mit der Ebene und erhalten den Lotfußpunkt. Der Abstand von P zu L ist gesucht.

$$g_{\text{Lot}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

g_{Lot} in E:

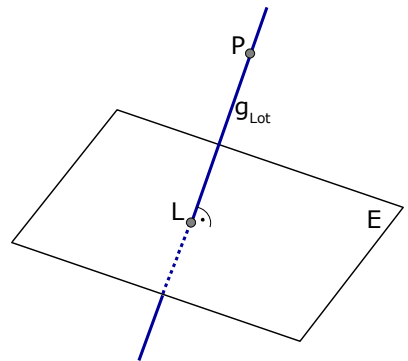
$$4 \cdot (7+4t) + 4 \cdot (8+4t) - 2 \cdot (9-2t) = 6$$

$$42 + 36t = 6 \quad \Rightarrow \quad t = -1$$

$$t \text{ in } g_{\text{Lot}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad L(3|4|11)$$

Der Abstand von L zu P ist gleichzeitig der gesuchte Abstand von E zu P !

$$d(E,P) = d(L,P) = \left| \begin{pmatrix} 7-3 \\ 8-4 \\ 9-11 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = 6$$



V.03.07 Abstand Punkt - Ebene (über HNF) (###)

Es gibt mehrere Möglichkeiten die HNF (=Hesse-Normal-Form) einer Ebene aufzustellen. Ich hab' nicht vor, alle aufzuführen.

Eine davon halte ich persönlich für am einfachsten.

Man braucht dafür die Koordinatengleichung der Ebene, bringt alles nach links [so dass also rechts „0“ steht] und teilt nun durch den Betrag des Normalenvektors.

Aufgabe 10

Es sei eine Ebene $E : 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$

Die HNF davon lautet $E : \frac{2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 0 \Leftrightarrow E : \frac{2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6}{3} = 0$

oder anderes Beispiel:

Es sei eine Ebene $F : 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -18$

Die HNF davon lautet $F : \frac{6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 18}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2}} = 0 \Leftrightarrow F : \frac{6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 18}{7} = 0$

Um nun den Abstand irgendeines Punktes zu irgendeiner Ebene zu berechnen, nimmt man die HNF der Ebene, setzt den Punkt für x_1, x_2, x_3 ein und erhält auf der rechten Seite statt „=0“ den Abstand Punkt-Ebene [also „ $d(E,P)$ “].

Weil Abstände immer positiv sind, wird das Ganze noch in' Betrag gesetzt.

Aufgabe 11

Bestimme Sie den Abstand von $P(7|8|9)$ zu $E : 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9$

Aufgabe 12 Welche Ebene ist parallel zu $F : 4x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 0$ und hat von $\ddot{U}(6|6|6)$ den Abstand $d=9$?

Aufgabe 13 Sei $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E : 3x_1 + 3x_3 + 12 = 0$

Welche Punkte der Gerade g haben von E den Abstand $d = \sqrt{8}$?

Lösung von Aufgabe 11:

HNF der Ebene aufstellen $E : \frac{4x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 9}{\sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2}} = 0 \Leftrightarrow E : \frac{4x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 9}{6} = 0$

$$\Rightarrow d(E,P) = \frac{|4 \cdot 7 + 4 \cdot 8 - 2 \cdot 9 - 9|}{6} = \left| \frac{33}{6} \right| = 5,5$$

Lösung von Aufgabe 12:

Wenn die Ebene parallel zu F sein soll, hat sie den gleichen Normalenvektor, hat damit die Form: $E : 4x_1 - 7x_2 - 4x_3 = d$ besser: $E : 4x_1 - 7x_2 - 4x_3 = a$

HNF der Ebene aufstellen $E : \frac{4x_1 - 7x_2 - 4x_3 - a}{\sqrt{4^2 + (-7)^2 + (-4)^2}} = 0 = \frac{4x_1 - 7x_2 - 4x_3 - a}{9} = 0$

$$\Rightarrow d(E,\ddot{U}) = \left| \frac{4 \cdot 6 - 7 \cdot 6 - 4 \cdot 6 - a}{9} \right|$$

$$\Rightarrow 9 = \left| \frac{-42 - a}{9} \right| \quad | \cdot 9$$

[Ab hier könnte man die Gleichung wieder vom GTR lösen lassen.]

$$81 = |-42 - a|$$

$$\pm 81 = -42 - a$$

← den Betrag löst man auf, indem

auf die andere Seite ein „±“ kommt.

$$\begin{aligned} \rightarrow 81 &= -42 - a \Rightarrow 123 = -a \Rightarrow a_1 = -123 \\ \rightarrow -81 &= -42 - a \Rightarrow -39 = -a \Rightarrow a_2 = 39 \end{aligned}$$

Die gesuchten Ebenen sind damit:

$$\begin{aligned} E_1 &: 4x_1 - 7x_2 - 4x_3 = -123 \\ E_2 &: 4x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 39 \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 13:

Jeder Punkt der Gerade hat die Koordinaten $G(10+7t \mid 7+2t \mid -2+t)$.

Mit diesem miesen, fiesen, allgemeinen Punkt stellen wir den Abstand zur Ebene E auf und setzen ihn dann gleich $\sqrt{8}$. [Und lösen dann nach „t“ auf].

HNF der Ebene aufstellen $E: \frac{3x_1 + 3x_3 + 12}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{3x_1 + 3x_3 + 12}{\sqrt{18}} = 0$

Um den Abstand zu berechnen: G in HNF einsetzen.

$$d(E, G) = \frac{|3 \cdot (10+7t) + 3 \cdot (-2+t) + 12|}{\sqrt{18}} = \sqrt{8}$$

$$\left| \frac{24t+36}{\sqrt{18}} \right| = \sqrt{8} \quad | \cdot \sqrt{18}$$

$$|24t+36| = 12 \quad \text{Betrag auflösen}$$

$$24t+36 = \pm 12$$

$$\rightarrow 24t+36 = +12 \Rightarrow t_1 = -1$$

$$\rightarrow 24t+36 = -12 \Rightarrow t_2 = -2$$

t_1 und t_2 wieder in g einsetzen

$$\Rightarrow G_1(3 \mid 5 \mid -3) \Rightarrow G_2(-4 \mid 3 \mid -4)$$

V.03.08 Abstand zwei paralleler Geraden, Gerade-Ebene, Ebene-Ebene

- Zwei parallele Geraden haben überall den *gleichen* Abstand. Man nimmt von der einen Gerade einen Punkt [z.B. den Stützvektor] und berechnet den Abstand zur anderen Geraden, führt das Ganze also auf „Abstand Punkt-Gerade“ zurück.
- Eine Ebene und eine Gerade, die zueinander parallel sind, haben überall den gleichen Abstand [na, kommt Ihnen das bekannt vor?]. Man führt alles auf die Berechnung von Punkt-Ebene zurück. Man nimmt von der Geraden einen Punkt [z.B. den Stützvektor] und berechnet den Abstand zur anderen Geraden.
- Zwei parallele Ebenen haben überall den gleichen Abstand [na, kommt Ihnen das bekannt vor?]. Man führt alles auf die Berechnung von Punkt-Ebene zurück. Man nimmt von der einen Ebene einen Punkt [z.B. einen Spurpunkt] und berechnet den Abstand zur anderen Ebene.

Aufgabe 14 Sei $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie den Abstand beider Geraden.

Aufgabe 15 Sei $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $E : 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 16$
Bestimmen Sie den Abstand von g und E !

Aufgabe 16 Sei $E : 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 66$ und $F : 6x_1 + 4x_2 + 10x_3 = -50$
Bestimmen Sie den Abstand der Ebenen E und F !

Lösung von Aufgabe 14:

Dass es sich um zwei *parallele* Geraden handelt, sieht man an den Richtungsvektoren. Damit ist der Abstand zwischen beiden Geraden überall gleich. Wir können also den Abstand von einem der beiden Stützvektor zur anderen Geraden berechnen.

[Welche Methode man anwendet, ist natürlich egal. Ich werde hier die Methode über die Lotebene anwenden.]

Wir können beispielsweise den Abstand von der Gerade g zum Stützvektor von h ausrechnen.

Den Stützvektor von h nennen wir `mal P_h , er hat die Koordinaten: $P_h(5|1|8)$

Ab jetzt betrachten wir also nur noch den Punkt P_h und die Gerade g .

Nun berechnen wir den Abstand Punkt-Gerade, also den Abstand von P_h zu g . Den Rest der Gerade h vergessen wir. Die ist für uns gestorben.

Wir stellen zuerst die Lotebene auf, die senkrecht auf g steht und durch P_h geht.

$$E_{\text{Lot}} : 4x_1 + 3x_2 + x_3 = d$$

$$P_h \text{ in } E_{\text{Lot}} : 4 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 8 = d \Rightarrow d = 31 \Rightarrow E_{\text{Lot}} : 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 31$$

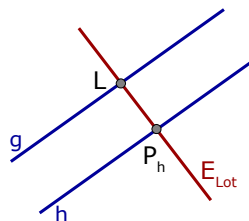
Nun schneiden wir die Gerade g mit

$$E_{\text{Lot}} \cap g : 4 \cdot (7 + 4r) + 3 \cdot (8 + 3r) + (5 + r) = 31$$

$$57 + 26r = 31 \Rightarrow r = -1$$

$$t \text{ in } g \Rightarrow \text{Lotfußpunkt } L(7 - 1 \cdot 4 \mid 8 - 1 \cdot 3 \mid 5 - 1 \cdot 1) \Rightarrow L(3 \mid 5 \mid 4)$$

$$d(g, h) = d(L, P_h) = \left| \vec{P_h L} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3-5 \\ 5-1 \\ 4-8 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$$

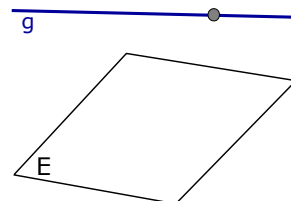


Lösung von Aufgabe 15:

Da g und E parallel sind [das Skalarprodukt von \vec{n}_E mit dem RV $_g$ ist Null], kann man einfach den Abstand vom Stützvektor zur Ebene ausrechnen.

$$\text{HNF}_E : \frac{2x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 16}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{2x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 16}{6} = 0$$

$$d(g, E) = d\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}, E\right) = \left| \frac{2 \cdot 7 + 4 \cdot 8 - 4 \cdot (-6) - 16}{6} \right| = 9$$

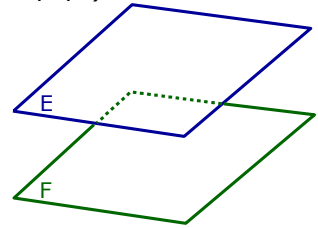


Lösung von Aufgabe 16:

Da E und F parallel sind [beide Normalenvektoren sind Vielfache], kann man einfach den Abstand von irgend einem Punkt der einen Ebene zur anderen Ebene berechnen. Irgend ein Punkt der Ebene E ist z.Bsp. der Spurpunkt $(22|0|0)$.

$$d(E,F) = d\left(\begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F\right) = \left| \frac{6 \cdot 22 + 4 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 50}{\sqrt{152}} \right| = \left| \frac{182}{\sqrt{152}} \right| \approx 14,76$$

Der Abstand der beiden Ebenen ist überall gleich. Man nimmt irgend einen Punkt der einen Ebene und berechnet den Abstand zur anderen Ebene. →



Es gibt mehrere Methoden, den Abstand zweier windschiefen Geraden zu berechnen.

- Eine Methode [Kapitel V.03.09] geht relativ schnell (über eine Hilfeebene), hat allerdings den Nachteil, dass man die Lotfußpunkte der Geraden nicht erhält.
- Eine andere Methode [→siehe Kapitel V.03.10] besteht darin, die Lotfußpunkte zu berechnen. Das dauert zwar etwas länger, aber es gibt viele Aufgaben, in welchen man die Lotfußpunkte tatsächlich braucht.
- Eine weitere Methode geht über eine „einfache“ Formel: $d = \vec{n}_0 \cdot [\vec{p} - \vec{q}]$. Die Methode ist nicht besser und nicht schlechter als die erste Methode, wir gehen hier auch nur kurz darauf ein.

Fazit: Wenn man die Lotfußpunkte nicht braucht, ist V.03.09 besser.
Wenn man die Lotfußpunkte braucht, ist Kap.V.03.10 angebracht.

V.03.09 Abstand windschiefen Geraden über Hilfeebene oder Formel (§§)

Vorgehensweise:

Gegeben sind zwei Geraden, die wir g und h nennen.

Man hängt an die Gerade g den Richtungsvektoren der Geraden h an und erhält so eine Ebene in Parameterform.

Die Ebene wandelt man in Koordinatenform um.

Nun bestimmt man den Abstand von dieser Ebene zum Stützvektor von h .

Aufgabe 17

$$\text{Sei } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Abstand von g und h ! [Lösungen auf Seite 12 und auf Seite 12]

Aufgabe 18

$$\text{Sei } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ und } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Abstand von g und h ! [Lösungen auf Seite 12 und auf Seite 13]

Lösung von Aufgabe 17 (über Hilfsebene):

→ Wir stellen eine Hilfsebene auf, indem wir den Richtungsvektor von h an die Gerade g dranhängen.

$$\Rightarrow E_{\text{Hilf}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die Ebene E ist parallel zu g und zu h und enthält die Gerade g.

→ Wir wandeln die Ebene E_{Hilf} in Koordinatenform um.

[mithilfe des Kreuzproduktes]

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -16 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\text{Hilf}} : -16x_1 - 2x_2 - 8x_3 = d$$

$$(-5|8|4) \text{ in E einsetzen um d zu bestimmen} \Rightarrow \dots \Rightarrow E_{\text{Hilf}} : -16x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 32$$

→ Den Abstand von E_{Hilf} zum Stützvektor von h bestimmen.

$$E_{\text{Hilf}} \text{ in HNF umwandeln: } \frac{-16x_1 - 2x_2 - 8x_3 - 32}{\sqrt{(-16)^2 + (-2)^2 + (-8)^2}} = 0$$

$$\text{Stützvektor von h in HNF einsetzen: } d = \frac{-16 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) - 8 \cdot 9 - 32}{\sqrt{(-16)^2 + (-2)^2 + (-8)^2}} = \dots = 9$$

Der Abstand der Geraden g und h beträgt 9.

Lösung von Aufgabe 18 (über Hilfsebene):

→ Wir stellen eine Hilfsebene auf, indem wir den Richtungsvektor von h an die Gerade g dranhängen.

$$\Rightarrow E_{\text{Hilf}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Diese Ebene ist parallel zu g und zu h und enthält die Gerade g.

→ Wir wandeln die Ebene E_{Hilf} in Koordinatenform um.

[mithilfe des Kreuzproduktes]

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\text{Hilf}} : 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = d$$

$$(-4|2|20) \text{ in E einsetzen um d zu bestimmen} \Rightarrow \dots \Rightarrow E_{\text{Hilf}} : 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 64$$

→ Den Abstand von E_{Hilf} zum Stützvektor von h bestimmen.

$$E_{\text{Hilf}} \text{ in HNF umwandeln: } \frac{2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 64}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2}} = 0$$

$$\text{Stützvektor von h in HNF einsetzen: } d = \frac{2 \cdot 3 + 6 \cdot (-3) + 3 \cdot 9 - 64}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2}} = \dots = 7$$

Der Abstand der Geraden g und h beträgt 7.

Lösung von Aufgabe 17 (über Formel):

Die Lotfußpunkte sind nicht gefragt,

wir verwenden die Formel: $d(g, h) = \left| \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{q}) \right|$

\vec{p} und \vec{q} sind die Stützvektoren der beiden Geraden.

Zuerst berechnen wir den Normalenvektor aus den

beiden Richtungsvektoren der zwei Geraden.

[Ohne triftigen Grund verwenden wir das Skalarprodukt.
Die Methode über das Kreuzprodukt wäre natürlich besser :-)]

$$\text{Aus } \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \text{ folgt: } \begin{array}{l} -1n_1 + 4n_2 + 1n_3 = 0 \\ 1n_1 + 4n_2 - 3n_3 = 0 \end{array}$$

Addieren der beiden Gleichungen liefert: $8n_2 - 2n_3 = 0$

$$\text{Wähle z.B. } n_2 = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow n_3 = 4 \Rightarrow \dots \Rightarrow n_1 = 8 \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Betrag des Normalenvektors ist: $|\vec{n}| = \sqrt{8^2 + 1^2 + 4^2}$
Der Normaleneinheitsvektor ist

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{8^2 + 1^2 + 4^2}} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d = |\vec{n}_0 \cdot (\vec{p} - \vec{q})| = \left| \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \right] \right| = \left| \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \\ -5 \end{bmatrix} \right| = \left| \frac{1}{9} \cdot (8 \cdot (-9) + 1 \cdot 11 + 4 \cdot (-5)) \right| = 9$$

Der Abstand der beiden Geraden ist 9.

Lösung von Aufgabe 18 (über Formel):

Die Lotfußpunkte sind nicht gefragt, wir verwenden: $d(g, h) = \left| \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{q}) \right|$

\vec{p} und \vec{q} sind die Stützvektoren der beiden Geraden.

Zuerst berechnen wir den Normalenvektor aus den beiden Richtungsvektoren der zwei Geraden.

[Ohne triftigen Grund verwenden wir die Methode vom Kreuzprodukt.
Die Methode über das Skalarprodukt würde natürlich ebenfalls gehen.]

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Betrag des Normalenvektors ist: $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2}$

Der Normaleneinheitsvektor ist $\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$d = |\vec{n}_0 \cdot (\vec{p} - \vec{q})| = \left| \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \right] \right| = \left| \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} \right| = \left| \frac{1}{7} \cdot (2 \cdot (-7) + 6 \cdot 5 + 3 \cdot 11) \right| = 7$$

Der Abstand der beiden Geraden ist 7.

Der Abstand von zwei windschiefen Geraden:

$$d(g, h) = \left| \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{q}) \right|$$

Da $\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \vec{n}$ gilt, taucht die Formel auch häufig in der Form auf:

$$d(g, h) = |\vec{n}_0 \cdot (\vec{p} - \vec{q})|$$

Hierbei sind p und q die Stützvektoren der Geraden \vec{n} ist der Normalenvektor, den man aus den Richtungsvektoren erhält.

V.03.10 Abstand windschiefer Geraden über die Lotfußpunkte (§§)

Aufgabe 19 [Abstand Gerade-Gerade über Berechnung der Lotfußpunkte]

$$\text{Sei } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Welche Punkte der Geraden g und h haben den geringsten Abstand voneinander?
Bestimmen Sie den Abstand von g und h !

Aufgabe 20

$$\text{Sei } g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ und } h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Abstand von g und h !
Welche Gerade j steht senkrecht auf g und auf h ?

Lösung von Aufgabe 19:

Wir werden so vorgehen: Stellt Sie sich eine Gerade vor, die sowohl g als auch h in einem rechten Winkel schneidet. Die Länge von dieser Verbindungsstrecke [in der Zeichnung: \overline{GH}] wäre der Abstand der beiden Geraden. Wir werden also G und H bestimmen, die Anfang- und Endpunkt dieser senkrechten Verbindungsgeraden sind.

Die Punkte sind die *Lotfußpunkte* und ich nenne sie analog zu ihren Geraden: „ G “ und „ H “.

Von G und H wissen wir nur, dass sie auf den Geraden g und h liegen, daher „geben wir“ G und H die Koordinaten der Geraden g und h :

$$\mathbf{G}(-5-t \mid 8+4t \mid 4+t) \quad \mathbf{H}(4+r \mid -3+4r \mid 9-3r)$$

$$\text{Unser Vektor } \overline{GH} \text{ sieht demnach so aus: } \overline{GH} = \begin{pmatrix} (4+r) - (-5-t) \\ (-3+4r) - (8+4t) \\ (9-3r) - (4+t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+r+t \\ -11+4r-4t \\ 5-3r-t \end{pmatrix}$$

\overline{GH} muss ja nun sowohl auf der Geraden g , als auch auf der Geraden h senkrecht stehen, deswegen muss das Skalarprodukt von \overline{GH} sowohl mit dem Richtungsvektor von g , als auch das mit dem Richtungsvektor von h Null ergeben.

$$\overline{GH} \circ \overline{RV}_g = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9+r+t \\ -11+4r-4t \\ 5-3r-t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

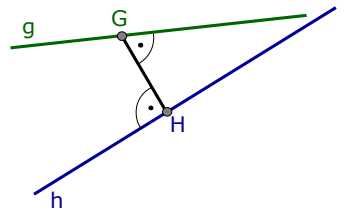
$$\Leftrightarrow (9+r+t) \cdot (-1) + (-11+4r-4t) \cdot (4) + (5-3r-t) \cdot (1) = 0 \Leftrightarrow -48 + 12r - 18t = 0$$

$$\overline{GH} \circ \overline{RV}_h = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9+r+t \\ -11+4r-4t \\ 5-3r-t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (9+r+t) \cdot (1) + (-11+4r-4t) \cdot (4) + (5-3r-t) \cdot (-3) = 0 \Leftrightarrow -50 + 26r - 12t = 0$$

Aus diesen beiden Gleichungen berechnen wir „ r “ und „ t “.

$$\begin{array}{rcl} -48 + 12r - 18t = 0 & | \cdot (-2) & \boxed{+} \\ -50 + 26r - 12t = 0 & | \cdot 3 & \boxed{-} \\ \hline -54 + 54r = 0 & \Rightarrow & r = +1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad t = -2$$



r und t zurück in G und H eingesetzt, ergibt: **G(-3|0|2)** **H(5|1|6)**

$$d(g,h) = d(G,H) = \overline{GH} = \left\| \begin{pmatrix} 5-(-3) \\ 1-0 \\ 6-2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{8^2+1^2+4^2} = 9$$

Lösung von Aufgabe 20:

G und H „geben wir“ wieder die Koordinaten der Geraden g und h, also:

$$\mathbf{G}(-4+3t|2+2t|20-6t) \quad \mathbf{H}(3|-3+r|9-2r)$$

Unser Vektor \overline{GH} sieht demnach so aus:

$$\overline{GH} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3+r \\ 9-2r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4+3t \\ 2+2t \\ 20-6t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-3t \\ -5+r-2t \\ -11-2r+6t \end{pmatrix}$$

\overline{GH} muss auf beiden Geraden senkrecht stehen, damit muss das Skalarprodukt mit beiden Richtungsvektoren Null ergeben.

$$\overline{GH} \circ \overline{RV}_g = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7-3t \\ -5+r-2t \\ -11-2r+6t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (7-3t) \cdot (3) + (-5+r-2t) \cdot (2) + (-11-2r+6t) \cdot (-6) = 0 \Leftrightarrow 77+14r-49t=0$$

$$\overline{GH} \circ \overline{RV}_h = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7-3t \\ -5+r-2t \\ -11-2r+6t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (7-3t) \cdot (3) + (-5+r-2t) \cdot (2) + (-11-2r+6t) \cdot (-6) = 0 \Leftrightarrow 17+5r-14t=0$$

Aus diesen beiden Gleichungen berechnen wir „r“ und „t“.

$$\begin{array}{rcl} 77+14r-49t = 0 & | \cdot (-5) & + \\ 17+5r-14t = 0 & | \cdot 14 & - \\ \hline -147 + 49t = 0 & & \end{array}$$

$$\Rightarrow t=+3 \Rightarrow r=5$$

r und t zurück in G und H eingesetzt, ergibt: **G(5|8|2)** **H(3|2|-1)**

$$d(g,h) = d(G,H) = \overline{GH} = \left\| \begin{pmatrix} 3-5 \\ 2-8 \\ -1-2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-2)^2+(-6)^2+(-3)^2} = 7$$

Der Abstand war, streng genommen, nicht gefragt.

Welche Gerade steht auf g und auf h senkrecht?

Das ist die Gerade, die durch G und h geht.

$$\mathbf{j} : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

