V.02 Schnittmengen

Es wird ja immer wieder behauptet, Mathe hätte nicht so viel mit dem „richtigen“ Leben zu tun. Das ist natürlich völlig aus der Luft gegriffen und wirklich nicht wahr.

Zum Beispiel dreht sich in Mathe fast alles nur um das Eine (wie im richtigen Leben). In Mathe sind es Schnittpunkte und so Zeug. Welch Zufall, dass Schnittpunkte in Mathe manchmal auch *Durchstoßpunkte* heißen. (Ein Begriff, der die Fantasie ungeheuer anregt. Genau so wie der „Höhepunkt“ einer Kurve; zwei geometrische Figuren, die „sich decken“, wenn sie kongruent sind; etc...). Zurück zum Thema.
Wir waren also da stehengeblieben, dass sich auch in Mathematik alles um das Eine dreht, nämlich um ~~Durchstoßpunkte~~ Schnittpunkte.
Und wie im richtigen Leben, wo man auch nicht immer gleich zu der EINEN Sache kommt, sondern erst drum rum redet, wollen wir hier auch erst ein bisschen um die Theorie der Schnittmengen drumrumreden.

Wenn man zwei Sachen miteinander schneidet, erhält man immer eine Gleichung.
Je nachdem, welche Form diese Gleichung hat, erkennt man (im Normalfall) schnell
1) ob sich die beiden Dinge schneiden,
2) ob sie ineinander liegen (identisch sind) oder
3) ob sie parallel zueinander sind.

Bei einer Gleichung, die einen **Widerspruch** liefert, also:

$\mathbf{0 = 2}$, $2 = -4$, $r^2<0$, ...

gibt es *keine Lösung*. Egal an welcher Stelle der Rechnung man ist, man braucht nicht weiterrechnen. Auch ein paar Zeilen weiter unten wird nichts anderes rauskommen. Die beiden Dinge, die man geschnitten hat, sind parallel.
(Ausnahme: bei zwei Geraden könnte es auch „windschief“ sein. [hängt vom Richtungsvektor ab]).

Bei einer Gleichung, die eine **wahre Aussage** liefert, also:

$\mathbf{0 = 0}$, $2 = 2$, $r^2>0$, ...

gibt es im Normalfall *unendlich viele Lösungen*. Im Normalfall heißt das:
Falls es die einzige Gleichung der Rechnung ist, ist man fertig und hat eben ∞-viele Lösungen.
Die beiden Dinge, die man geschnitten hat, liegen ineinander (oder sind identisch).

Bei einer Gleichung, in der man nach der Unbekannten auflösen kann:

$2r=4$, $r–r–2=0$, ...

gibt es ein oder zwei Lösungen (so viele, wie die Gleichung eben liefert) und genau so viele Schnittpunkte gibt es auch. (im Normalfall)

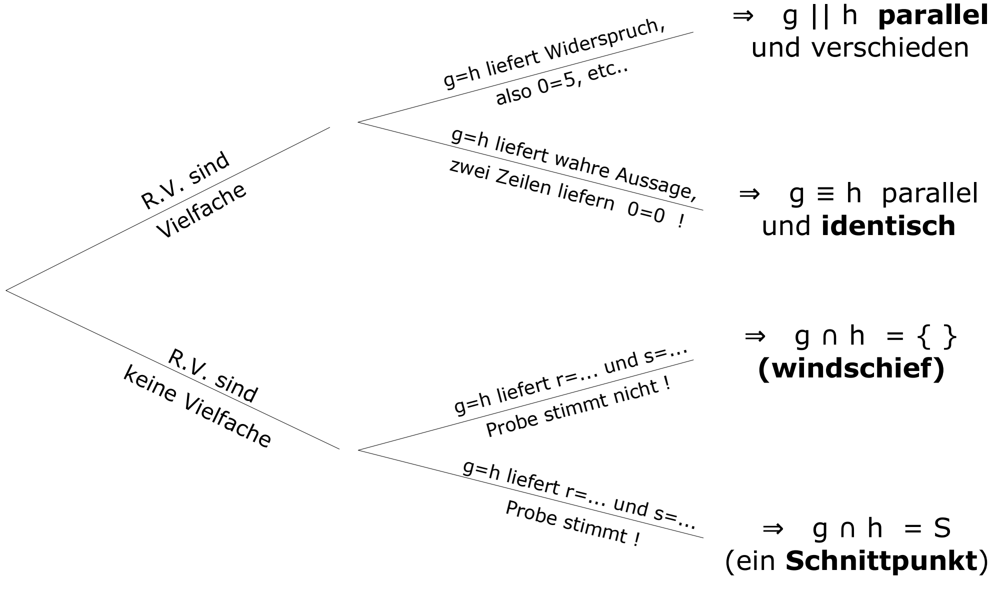
V.02.01 Schnitt Gerade - Gerade (∯∯)

Geraden können auf vier Arten zueinander liegen:

1) sie sind identisch, d.h. sie haben ∞-viele Schnittpunkte, damit müssen beim Gleichsetzen ∞-viele Lösungen \`rauskommen.
2) sie sind parallel und verschieden, d.h. es kommt keine Lösung raus.
3) sie sind windschief. Auch hier kommt keine Lösung \`raus. (Den Unterschied zu parallel sieht man nur daran, dass beide Richtungsvektoren keine Vielfache voneinander sind).
4) sie haben *einen* Schnittpunkt. Man erhält also *eine* Lösung für jeden Parameter.

Zur Vorgehensweise beim Geradengleichsetzen:

- Zuerst betrachtet man die Richtungsvektoren der Geraden und schaut ob sie Vielfache voneinander sind oder nicht.
  Sind sie Vielfache, so sind die Geraden parallel oder identisch.
  Sind die keine Vielfache, schneiden sich die Geraden oder sind windschief.
- Die beiden Geraden gleichsetzen. Die drei Zeilen der Geraden liefern uns drei Gleichungen, aber nur zwei Unbekannte. (Normalerweise braucht man für *zwei* Unbekannte nur *zwei* Gleichungen).
  Danach werden wir folgendermaßen vorgehen:
  Wir errechnen aus den ersten beiden Gleichungen die Parameter r und s. Die dritte Gleichung verwenden wir *nur* um die Probe zu machen, d.h die Werte, die wir für die Parameter aus der ersten und zweiten Gleichung erhalten haben, setzen wir beide in die dritte Gleichung ein und hoffen so \`was wie „0=0“ zu erhalten.



Bsp.1 Bestimme die Schnittmenge der Geraden g und h,

mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Lösung:
Auf den ersten Blick erkennen wir natürlich, dass die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind. Die Geraden sind also entweder parallel [und verschieden] oder identisch. Wir erwarten also entweder keine Lösung oder ∞-viele Lösungen.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{g} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}}_{h}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I)} & 3 + r &=& -2 - 3t \\ \text{II)} & 2 - r &=& 3 + 3t \\ \hline & 5 &=& 1 \end{array}$$

Widerspruch ⇒ kein Schnittpunkt ⇒ g ll h

Bsp.2 Bestimmen Sie die *gegenseitige Lage* von

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

Lösung:
Auf den ersten [oder zweiten] Blick erkennen wir natürlich, dass die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind [wenn man mit dem Taschenrechner: $\frac{5}{-4}, \frac{-5}{4}, \frac{7{,}5}{-6}$ ausrechnet, kommt immer -1,25 raus.] Die Geraden sind also entweder parallel [und verschieden] oder identisch.
Wir erwarten also entweder keine Lösung oder ∞-viele Lösungen.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}}_{g} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}}_{h}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I)} & 2 + 5r &=& 8 - 4t \\ \text{II)} & -1 - 5r &=& -7 + 4t \\ \hline & 1 &=& 1 \end{array}$$

wahre Aussage. Jetzt auch noch erste mit dritter Gleichung überprüfen

$$\begin{array}{lrcll} \text{I)} & 2+5r & = & 8-4t & |\cdot(-3) \\ \text{III)} & 7+7{,}5r & = & 16-6t & |\cdot 2 \\ \hline & 8 & = & 8 & \end{array}$$

wieder wahre Aussage. Damit haben wir mit allen Gleichungen immer nur ein Ergebnis: ∞-viele Schnittpunkte

$\Rightarrow g \equiv h$ (identisch)

Bsp.3 Frage: Wie werden wohl die beiden Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ zueinander liegen ?

Lösung:
Auf den ersten Blick erkennen wir natürlich, dass die Richtungsvektoren *keine* Vielfache voneinander sind [die Vorzeichen sind falsch].
g und h sind also entweder windschief oder haben einen Schnittpunkt.

$$\begin{array}{ccc} g & = & h \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I)} & 2+r & = & -2-2t \\ \text{II)} & 1-r & = & -1+2t \\ \hline & 3 & = & -3 \end{array} \quad \Rightarrow$$

Widerspruch. g und h sind windschief !

Bsp.4 Untersuchen Sie $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf Schnittpunkte!

Lösung:
Die Richtungsvektoren sind keine Vielfache voneinander. g und h sind entweder windschief oder haben einen Schnittpunkt. Wir erwarten also entweder keine oder eine Lösung.

$$\begin{array}{ccc} g & = & h \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I)} & 2-r & = & 0+3t \\ \text{II)} & 6+r & = & 1+4t \\ \hline & 8 & = & 1+7t \end{array} \quad \Rightarrow \quad t=1$$

t=1 in I [oder in II] einsetzen: $\Rightarrow$ $2-r = 0+3\cdot 1$ $\Rightarrow\ldots\Rightarrow$ r= -1

Probe: [t = 1 und r = -1 in dritte Gleichung einsetzen]

$1 + (-1)\cdot 0 = 2 + 1\cdot(-1)$

$1 = 1$ $\Rightarrow$ Probe stimmt. g und h schneiden sich!

Wo der Schnittpunkt liegt, erhält man, indem man r in g oder t in h einsetzt.

r=-1 in g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ S (3 | 5 | 1)

Bsp.5 Bestimmen Sie die Schnittmenge von $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h:\ \vec{x} = t\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

Sofort erkennt das geschulte Mathematikerauge die Richtungsvektorenvielfachheitalsodoppeltheit.
Die Geraden sind also entweder parallel (und verschieden) oder identisch.
Wir erwarten also entweder keine Lösung oder ∞-viele Lösungen.

Dass in h *kein* Stützvektor steht, stört nicht. Man stellt sich einfach vor, es hieße: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I)} & -8 + 2r & = & 4t \\ \text{II)} & 8 - 2r & = & -4t \\ \hline & 0 & = & 0 \end{array}$$

wahre Aussage. Jetzt auch noch erste mit dritter Gleichung überprüfen

$$\begin{array}{lrcll} \text{I)} & -8 + 2r & = & 4t & \\ \text{III)} & -4 + r & = & 2t & |\cdot(-2) \\ \hline & 0 & = & 0 & \end{array}$$

wieder wahre Aussage.

Wir haben alle drei Gleichungen verwendet und haben nur wahre Aussagen erhalten.

$\Rightarrow g \equiv h$ (g und h sind identisch)

Bsp.6 $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 35 \end{pmatrix}$

Lösung:

Auf den fünften Blick erkennen wir sofort, dass die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind ($\frac{14}{0{,}4} = \frac{7}{0{,}2} = \frac{35}{1} = 35$). Die Geraden sind also entweder parallel [und verschieden] oder identisch. Wir erwarten also entweder keine Lösung oder ∞-viele Lösungen.

$$g = h$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 35 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{I)} & 6 + 0{,}4r & = & 2 + 14t & \\ \text{II)} & 6 + 0{,}2r & = & 4 + 7t & |\cdot(-2) \quad + \\ \hline & -6 & = & 0 & \end{array}$$

Widerspruch. g und h sind parallel !

Bsp.7 Was haben $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ gemeinsam ?

Lösung:

Die Richtungsvektoren sind keine Vielfache voneinander. g und h sind entweder windschief oder haben einen Schnittpunkt. Wir erwarten also entweder keine oder eine Lösung, sie haben also entweder einen oder keinen Punkt gemeinsam.

$$g = h$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{I)} & 2 + r & = & 5 + 3t & \\ \text{II)} & 0 + r & = & 3 + 3t & - \\ \hline & 2 & = & 2 & \end{array}$$

wahre Aussage. Jetzt auch noch erste mit dritter Gleichung überprüfen.

$$\begin{array}{lrcll} \text{I)} & 2 + r & = & 5 + 3t & |\cdot(-2) \\ \text{III)} & 4 + 2r & = & 8 + 5t & + \\ \hline & 0 & = & -2 - 1t & \end{array}$$

$\Rightarrow t = -2$ t=-2 in I oder in II $\Rightarrow r = -3$

* „Spiels nochmal Sam...“ ist ein Zitat aus den Film „Casablanca“.
[Humphrey Bogart und Ingrid Bergmann mit „Schau mir in die Augen Kleines“ ..schnief..]

Wo der Schnittpunkt liegt, erhält man,
indem man entweder „r" in g oder „t" in h einsetzt.

„r=-3" in g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

⇒ Antwortsatz: g und h haben den Punkt S (-1 | -3 | -2) gemeinsam.

Bsp.8 Trägt die ∞e Liebe von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ Früchte?

Lösung:
Die Richtungsvektoren sind keine Vielfache voneinander. g und h sind entweder windschief oder haben einen Schnittpunkt. Wir erwarten also entweder keine oder eine Lösung.

$$\begin{array}{ccc} g & = & h \\ \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I)} & 0 + 2r & = & 5 + t \\ \text{II)} & 2 + \ \ r & = & 3 + t \quad - \\ \hline & -2 + r & = & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad r = 4 \qquad r=4 \text{ in I oder in II} \Rightarrow t = 3$$

Jetzt r = 4 und t = 3 in dritte Gleichung einsetzen (für Probe).

III) $1 + 4\cdot 3 = 1 + 3\cdot 1$ Probe stimmt nicht. g und h schneiden sich nicht!

Antwortsatz:
Keine Hoffnung auf irgendeine Gemeinsamkeit von g und h. - Traurig.
(Die beiden Geraden sind windschief)

5.2.2 Schnitt Gerade-Ebene (∰)

Das Allereinfachste auf der ganzen Welt ist es, Geraden mit Ebenen zu schneiden: Man setzt die Gerade in die [Koordinatenform der] Ebene ein und löst nach dem Parameter auf.

Bsp.9 Bestimme die Schnittmenge von $E: 4x_1 – 4x_2 + 2x_3 = 12$ mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Lösung:

Von der Gerade kennen wir x_1, x_2, x_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l}x_1 = 5 + t\\x_2 = 3 + t\\x_3 = 6 + t\end{array}$

Wenn wir diese x_1, x_2, x_3 in die Ebene einsetzen, erhalten wir:

$$4\cdot(5+t) – 4\cdot(3+t) + 2\cdot(6+t) = 12$$
$$20 + 2t = 12 \qquad \Rightarrow t = -4$$

$t = -4$ in $g \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\6\end{pmatrix} + (-4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow S(1 \mid -1 \mid 2)$

Bsp.10 Bestimme die Schnittmenge von $E: 2x_1 – 3x_2 + 4x_3 = 5$ mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-2\\-3\end{pmatrix}$

Lösung:
x_1, x_2, x_3 setzen wir in die Ebene ein:

$$2\cdot(1+3t) – 3\cdot(3–2t) + 4\cdot(-3t) = 5$$
$$-7 = 12 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Widerspruch.}$$

g und E schneiden sich also nicht. Sie müssen also parallel sein! $g \parallel h$

Bsp.11 Bestimme die Schnittmenge von $E: 8x_1 – 4x_2 + x_3 = 5$ mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0{,}5\\2\\4\end{pmatrix}$

Lösung:
Wir setzen x_1, x_2, x_3 von der Geraden in die Ebene ein:

$$8\cdot(1+0{,}5t) - 4\cdot(1+2t) + (1+4t) = 5$$
$$5 = 5 \qquad \text{wahre Aussage}$$

Es gibt ∞-viele Lösungen. g muss also in E enthalten sein. $g \subset E$

Bsp.12 Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E: x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4$

Bestimme die Parameter a und b so, dass
- a) g und E parallel zueinander sind,
- b) g in E enthalten ist,
- c) g und E sich in einem Punkt schneiden !

Lösung:
Wir setzen die Gerade in die Ebene ein:

$(a+3t) - 2(1+bt) + 3(3+t) = 4$

$a + 7 + 6t - 2bt = 4 \quad | -a-7$

$t \cdot (6-2b) = -a-3$

Stellen Sie sich vor, wir hätten keine Parameter a und b. Dann würden wir nach „t" auflösen. Das machen wir jetzt auch hier, trotz Parameter.

Jetzt sind wir mit dem rechnerischen Teil schon fertig und können bereits alles sehen, was wir brauchen.

Im Normalfall ergibt diese Gleichung eine Lösung [für t]: $t = \frac{-a-3}{6-2b}$

Wir müssen uns aber auf jeden Fall noch überlegen, unter welchen Umständen diese Gleichung Sonderfälle (unendlich viele oder keine Lösung) liefert.

Eine Gleichung liefert unendlich viele Lösungen, wenn sie die Form „0=0" hat.
Die Gleichung „$t \cdot (6-2b) = -a-3$" hat aber nur dann die Form „0=0",
wenn $6-2b=0$ ist und wenn $-a-3=0$ ist. ($6-2b=0 \Rightarrow b=3$ und $-a-3=0 \Rightarrow a=-3$)
Wir folgern also, dass die Gleichung ∞-viele Lösung hat, wenn b=3 und a=-3

Eine Gleichung liefert keine Lösungen, wenn sie die Form „0=NichtNull" hat.
Die Gleichung „$t \cdot (6-2b) = -a-3$" hat aber nur die Form „0=NichtNull",
wenn $6-2b=0$ ist und wenn $-a-3 \neq 0$ ist. ($6-2b=0 \Rightarrow b=3$ und $-a-3\neq 0 \Rightarrow a \neq -3$)
Wir folgern also, dass die Gleichung keine Lösung hat, wenn b=3 und $a \neq -3$.

Zusammenfassung:
Für b=3 und a=-3 gibt es unendlich viele Lösungen, g liegt also in E.
Für b=3 und $a\neq -3$ gibt es keine Lösung, g und E sind also parallel
Für $b \neq 3$ (alle anderen Fälle) gibt es eine Lösung, also einen Schnittpunkt.

Bsp.13 Gegeben sind $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $E: 2x_1 + ax_2 - 2x_3 = 3a$

Bestimme die Parameter a und b so, dass

a) g und E parallel zueinander sind,

b) g in E enthalten ist,

c) g und E sich in einem Punkt schneiden !

Lösung:
Natürlich schneiden wir g und E wieder und lösen nach „t" auf.

g in E: $2\cdot(3+t) + a\cdot(1+2t) - 2\cdot(b-t) = 3a$

$6+2t + a+2at - 2b+2t = 3a$ zusammenfassen

$6+4t+a-2b+2at = 3a$ | $-6-a+2b$

$4t+2at = 2a+2b-6$ ausklammern

$t\cdot(4+2a) = 2a+2b-6$ | $:(4+2a)$

Wie interpretieren wir dieses Ergebnis?

- g liegt in E, wenn es unendlich viele Lösungen gibt.
  Das ist der Fall, wenn die Gleichung die Form 0=0 hat, bei a=-2 und b=5
  ($4+2a=0 \Rightarrow a=-2$ und $2a+2b-6=0 \Rightarrow ... \Rightarrow b = 3-a = 3-(-2) = 5$)
- g und E sind parallel, wenn es keine Lösung gibt.
  Das ist der Fall, wenn die Gleichung die Form 0=Zahl hat, bei a=-2 und $b\neq 5$
  ($4+2a=0 \Rightarrow a=-2$ und $2a+2b-6\neq 0 \Rightarrow ... \Rightarrow b \neq 5$)
- g und E haben einen Schnittpunkt, wenn es *eine* Lösung gibt.
  Das ist der Fall, wenn die Gleichung die Form Zahl·t=Zahl hat, bei $a\neq 2$.

5.2.3 Schnitt Ebene-Ebene (∯∯)

Man kann zwei Ebenen gut miteinander schneiden, wenn beide in Koordinatenform sind oder eine in Koordinatenform und die andere in Parameterform (=Vektorform).
Wenn beide in Parameterform gegeben sind, empfiehlt es sich eine oder beide in Koordinatenform umzuwandeln.

Bsp.14

Bestimme die Schnittgerade der Ebenen $E_1: 2x_1+3x_2-x_3=6$ und $E_2: x_1+x_2-2x_3=2$

Lösung:
Bei zwei Koordinatengleichungen schreibt man die beiden Gleichungen untereinander und verrechnet sie derart, dass ein x_1 x_2 oder x_3 weg fällt. Nehmen wir einfachheitshalber an, x_1 würde wegfallen.
Es bleiben also x_2 und x_3 übrig. Nun setzt man x_2 oder x_3 gleich „t“ und versucht nun auch x_2 und x_1 in Abhängigkeit von „t“ zu erhalten. Dann ist man mehr oder weniger fertig.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \quad | \cdot(-2) \\ \hline x_2 + 3x_3 &= 2 \\ \Rightarrow x_2 &= 2 - 3x_3 \end{aligned}$$

x_1 \`rausschmeißen

setze: $\underline{x_3 = t}$

$\Rightarrow \quad \underline{x_2 = 2-3t}$

x_2 und x_3 in eine der beiden Ebenengleichungen einsetzen..

$$\begin{aligned} 2\cdot x_1 + 3\cdot(2-3t) - t &= 6 \\ 2x_1 + 6 - 9t - t &= 6 \\ 2x_1 &= 10t \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{x_1 = 5t}$$

Nun suchen wir ja eine Schnitt*gerade*.

Geraden haben immer die Form: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \ldots$

Wir können also x_1 x_2 x_3 einsetzen und erhalten:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t \\ 2-3t \\ t \end{pmatrix} = \text{[Vektor aufspalten]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5t \\ -3t \\ 1t \end{pmatrix} = \text{[t ausklammern]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung der Schnittgeraden lautet: $s:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓

Bsp.15 $E_1: 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -2$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Bestimme die Schnittgerade !

Lösung:
Wenn eine Ebenengleichung in Koordinatenform und die andere in Parameterform gegeben ist, gehen wir ähnlich vor, wie bei Schnitt Gerade-Ebene. Wir setzen die Parameterform in die Koordinatenform ein und lösen nach „r“ oder „s“ auf.
Dieses [r oder s] setzen wir dann wieder in die Parameterform ein, [wo es herkommt].

E_2 in E_1 $2\cdot(1+5r+4s) - 3\cdot(2+r-s) - (6-r-5s) = -2$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow$ $-10 + 8r + 16\,s = -2$ $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ $r = 1-2s$

r in E_2 $$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix} + (1-2s)\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} + (-2s)\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-10\\-2\\+2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\end{pmatrix} =^{(1)} = \begin{pmatrix}6\\3\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-6\\-3\\-3\end{pmatrix}$$

Die Schnittgerade lautet: $$s:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\3\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-6\\-3\\-3\end{pmatrix}$$ ✓

Bsp.16 Bestimme die Parameter „a“ und „b“ so, dass die Ebenen
$E: 2x_1 + ax_2 - 4x_3 = 5$ und $F: -x_1 + 4x_2 + bx_3 = 8$ parallel sind !

Lösung:
Damit E und F parallel sind, müssen die beiden Normalenvektoren vielfach sein.

$$\vec{n}_E = v\cdot\vec{n}_F \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\a\\-4\end{pmatrix} = v\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\b\end{pmatrix}$$

aus der ersten Zeile folgt: → $v = -2$
aus der zweiten Zeile folgt damit: $a = -8$
aus der dritten Zeile folgt dann: $b = +2$

Fertig!

Bsp.17 Sei $E: x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2$ und $F: (k+1)x_1 + (2k+4)x_2 + (-3-k^2)x_3 = 5-k$
Bestimme „k“ so, dass die Ebenen E und F identisch sind.

Lösung:
Damit die Ebenen identisch sind, müssen die Normalenvektoren Vielfache voneinander sein.
Zusätzlich müssen die rechten Seiten dann auch passen [die gleichen Vielfache sein], aber darum kümmern wir uns erst am Schluss.

$$v\cdot\vec{n}_E = \vec{n}_F \Leftrightarrow v\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k+1\\2k+4\\-3-k^2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned}1v &= k+1\\3v &= 2k+4\\-2v &= -3-k^2\end{aligned}$$

1 die ersten zwei Vektoren *ohne* „s“ kann man verrechnen und die zwei letzten *mit* „s“ verrechnet man auch

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{I} & 1v & = & k + 1 & |\cdot(-3) \\
\text{II} & 3v & = & 2k + 4 & \\
\hline
 & 0 & = & -k + 1 & \Rightarrow \quad k = 1
\end{array}
$$

Man könnte wieder die Probe machen, indem man v ausrechnet und dann v und k in die dritte Gleichung einsetzt. Ich setze k jedoch gleich in die Ebenengleichung von F ein, damit sieht man dann auch gleich, ob die rechten Seiten übereinstimmen.

$$
\begin{array}{ll}
 & E: \quad x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\
k=1 \text{ in} & F: \quad 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 4
\end{array}
$$

Beide Ebenen sind perfekt gleich [genau das Doppelte voneinander],
damit sind sie identisch.

5.2.4 Pi mit 2000 Nachkommastellen ($\oint$)

π ≈ 3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 58209 74944 59230
78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647 09384 46095
50582 23172 53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930
38196 44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091 45648 56692
34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273 72458 70066 06315 58817 48815
20920 96282 92540 91715 36436 78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951
94151 16094 33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548 07446
23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912 98336 73362 44065 66430
86021 39494 63952 24737 19070 21798 60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674
81846 76694 05132 00056 81271 45263 56082 77857 71342 75778 96091 73637 17872
14684 40901 22495 34301 46549 58537 10507 92279 68925 89235 42019 95611 21290
21960 86403 44181 59813 62977 47713 09960 51870 72113 49999 99837 29780 49951
05973 17328 16096 31859 50244 59455 34690 83026 42522 30825 33446 85035 26193
11881 71010 00313 78387 52886 58753 32083 81420 61717 76691 47303 59825 34904
28755 46873 11595 62863 88235 37875 93751 95778 18577 80532 17122 68066 13001
92787 66111 95909 21642 01989 38095 25720 10654 85863 27886 59361 53381 82796
82303 01952 03530 18529 68995 77362 25994 13891 24972 17752 83479 13151 55748
57242 45415 06959 50829 53311 68617 27855 88907 50983 81754 63746 49393 19255
06040 09277 01671 13900 98488 24012 85836 16035 63707 66010 47101 81942 95559
61989 46767 83744 94482 55379 77472 68471 04047 53464 62080 46684 25906 94912
93313 67702 89891 52104 75216 20569 66024 05803 81501 93511 25338 24300 35587
64024 74964 73263 91419 92726 04269 92279 67823 54781 63600 93417 21641 21992
45863 15030 28618 29745 55706 74983 85054 94588 58692 69956 90927 21079 75093
02955 32116 53449 87202 75596 02364 80665 49911 98818 34797 75356 63698 07426
54252 78625 51818 41757 46728 90977 77279 38000 81647 06001 61452 49192 17321
72147 72350 14144 19735 68548 16136 11573 52552 13347 57418 49468 43852 33239
07394 14333 45477 62416 86251 89835 69485 56209 92192 22184 27255 02542 56887
67179 04946 01653 46680 49886 27232 79178 60857 84383 82796 79766 81454 10095
38837 86360 95068 00642 25125 20511 73929 84896 08412 84886 26945 60424 19652
85022 21066 11863 06744 27862 20391 94945 04712 37137 86960 95636 43719 17287
46776 46575 73962 41389 08658 32645 99581 33904 78027 59009 ....