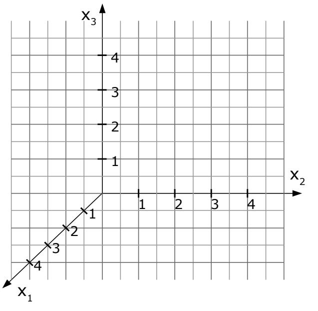
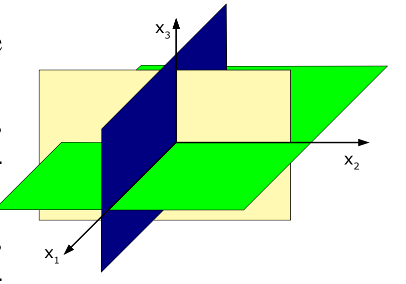
V.01 Grundlagen (Kurzform)

V.01.01 Zeichnen im 3D-Koordinatensystem (∰)



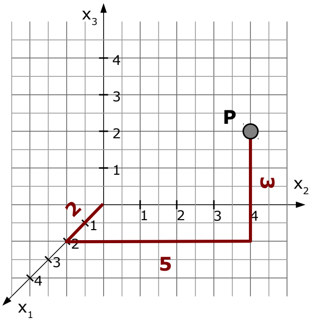
Ein 3D-Koordinatensystem hat natürlich *drei* Achsen.
Die Achsen heißen *Koordinatenachsen.*
Die erste Achse heißt x_1- oder x-Achse. Man stellt sich vor, dass diese Achse nach vorne zeigt. [Aus dem Blatt raus, auf einen zu zeigend.] Man zeichnet sie schräg nach links unten, die Einheit ist 0,7cm [ein schräges Kästchen].
Die zweite Achse heißt x_2- oder y-Achse. Sie zeigt waagerecht nach rechts. Die Einheit ist 1cm.
Die dritte Achse heißt x_3- oder z-Achse. Sie zeigt senkrecht nach oben und steht in vielen Aufgaben für die Höhe. Die Einheit ist 1cm.



Jeweils zwei der Koordinatenachsen bilden eine sogenannte *Koordinatenebene*.
Die waagerechte Ebene, die die x_1- und x_2-Achse enthält, heißt x_1x_2-Ebene oder auch *Bodenebene*. In der x_1x_2-Ebene sind die x_3-Koordinaten aller Punkte Null.
Die seitliche Ebene, die die x_1- und die x_3-Achse enthält, heißt x_1x_3-Ebene oder auch *Seitenebene*. In der x_1x_3-Ebene sind die x_2-Koordinaten aller Punkte Null.
Die Ebene, die die x_2- und die x_3-Achse enthält, heißt x_2x_3-Ebene oder auch *Tafelebene*. In der x_2x_3-Ebene sind die x_1-Koordinaten aller Punkte Null.

Punkte einzeichnen

Punkte in ein 3D-Koordinatensystem einzuzeichnen, ist nicht viel schwerer als in ein 2D-Koordinatensystem [das ist das normale Koordinatensystem mit x- und y-Achse].

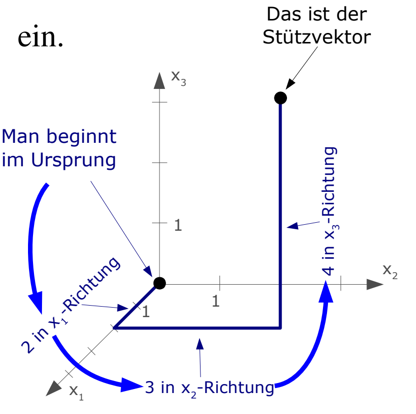


Bsp.1
Zeichnen wir den Punkt P(2|5|3) ein.
Wir beginnen im Ursprung, gehen 2 LE [=Längen-Einheiten] in x_1-Richtung, danach 5 LE in x_2-Richtung und von da aus 3 LE in x_3-Richtung. Fertig ist der Punkt.

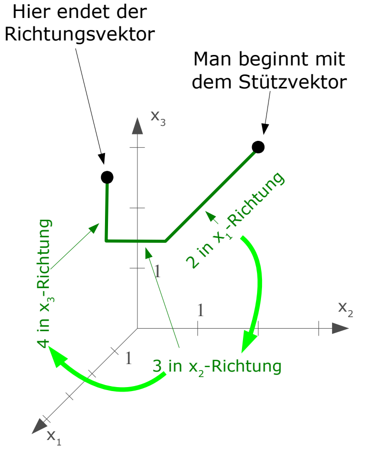
Geraden einzeichnen

Will man Geraden einzeichnen, fängt man zuerst mit dem Stützvektor an.
Man zeichnet also zuerst den Stützvektor ein. Beginnend von diesem Punkt zeichnet man dann noch den Richtungsvektor ein und verbindet das Ganze.

Bsp.2 Zeichnen wir die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein.

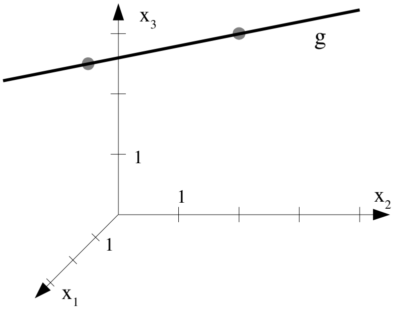


Lösung:
Zum Zeichnen von Geraden beginnen wir mit dem Stützvektor. Der Stützvektor hat die Koordinaten: $x_1=2$, $x_2=3$ und $x_3=4$. Daher beginnen wir im Ursprung, gehen von hier aus 2LE in die x_1-Richtung, danach 3LE in die x_2-Richtung und zuletzt 4LE in die x_3-Richtung.
Nun haben wir den Stützvektor eingezeichnet.



Danach kommt der Richtungsvektor.
Hierfür beginnen wir beim eingezeichneten Stützvektor. Der Stützvektor hat die Koordinaten: $x_1=4$, $x_2=-1$ und $x_3=1$. Also beginnt man beim Stützvektor (den man eben eingezeichnet hat. NICHT wieder im Ursprung!) und geht von hier 4 nach links unten, in x_1-Richtung, danach 1 nach links, in negative x_2-Richtung und anschließend 1 nach oben, in x_3-Richtung.

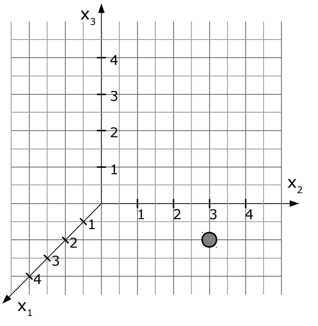
Wenn man diesen Punkt, bei welchem man eben angekommen ist, mit dem Stützvektor verbindet, hat man die gewünschte Gerade.



Es kann natürlich auch sein, dass man von einer Geraden zwei Punkte gegeben hat. Dann ist das Einzeichnen einfach. Man zeichnet die beiden Punkte ein, zieht ein Strich durch und hat die Gerade. [Jeden Punkt zeichnet man so ein, wie den Stützvektor von eben.]
Dazu machen wir kein Beispiel.

Punkte aus dem Koordinatensystem herauslesen:

Bei der Zeichnung im 3D-Koordinatensystem, gibt es leider das geringfügige Problem, dass das Ganze nicht rückwärts geht, d.h. man kann keine Punktkoordinaten aus der Zeichnung herauslesen.



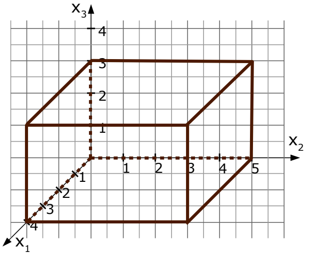
Bsp.3

Zeichnen wir drei Punkte A(0|3|-1), B(4|5|1), C(2|4|0) in ein Koordinatensystem ein. Wir stellen fest, dass alle drei Punkte an der gleichen Stelle eingezeichnet werden. Umgekehrt bedeutet das auch, dass man leider nicht sagen kann, welche Koordinaten der eingezeichnete Punkt hat. Doof so was.

Was kann man überhaupt der Zeichnung entnehmen?

Typischerweise hat man manchmal Quader [=„Schachteln"], Pyramiden, Prismen oder andere anschauliche Objekte gegeben, von denen man die Koordinaten der Eckpunkte ablesen kann.

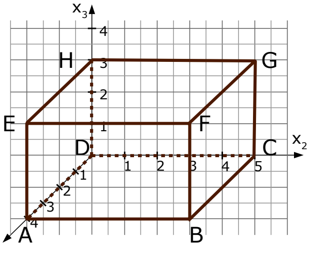
Bsp.4



Gegeben sei ein Quader mit den Metermaßen 4x5x3, wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte.

b) Blablablah ... [weitere Fragen] …



Lösung:

Zuerst benennen wir die Eckpunkte.

Wir kommen keinesfalls auf die Idee die Koordinaten irgendwelcher Punkte abzulesen!!

Wir stellen uns vor, wie der Quader [als Schachtel] in Wirklichkeit aussieht und wo die Punkte liegen!

Vorbereitung:

Der Quader ist 5LE breit, er geht also von $x_2=0$ bis $x_2=5$, er ist 3LE hoch, die Maße gehen also von $x_3=0$ bis $x_3=3$ und er ist 4LE tief, er geht also von $x_1=0$ bis $x_1=4$.

D liegt im Ursprung $\Rightarrow$ D(0|0|0)

Um zu A zu kommen, geht man von D um 4LE nach vorne, d.h. zur x_1-Koordinate kommen 4 dazu. $\Rightarrow$ A(4|0|0)

Auf B kommt man, indem man von A um 5LE nach rechts geht, d.h. zur x_2-Koordinate von A kommen 5LE dazu	$\Rightarrow$	B(4|5|0)
Auf C kommt man, indem man von D um 4LE nach rechts geht, d.h. zur x_2-Koordinate von D kommen 5LE dazu	$\Rightarrow$	C(0|5|0)
Die Punkte E, F, G, H liegen alle 3LE oberhalb von A, B, C und D [die Quaderhöhe ist 3], also kommen überall zu den x_3-Koordinaten von A, B, C, D 3 dazu	$\Rightarrow$	E(4|0|3), F(4|5|3) G(0|4|3), H(0|0|3).

V.01.02 Mittel- und Schwerpunkte, Orts- und Richtungsvektoren (∰)

Ortsvektoren, Richtungsvektoren

Ortsvektoren sind eigentlich Punkte, die man in Vektorform (also übereinander) aufschreibt. Der Ortsvektor von einem Punkt A heißt $\vec{a}$, der Ortsvektor von einem Punkt B heißt $\vec{b}$. Man verwendet Ortsvektoren immer dann, wenn man einen Punkt für eine Rechnung verwendet.

Beispiel:

Einen Vektor $\overrightarrow{AB}$ berechnet man, indem man Punkt A von Punkt B abzieht.

Die Schreibweise $\overrightarrow{AB}$ = B – A ist aber mathematisch inkorrekt.

Daher verwendet man die Schreibweise: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.

[Nochmal: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind hierbei eigentlich die Punkte A und B!]

Richtungsvektoren sind Verbindungsvektoren. Braucht man einen Vektor, der von A nach B zeigt, ist das der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$, von welchem wir vor 4 Zeilen sprachen. Verbindungs- bzw. Richtungsvektoren braucht man andauernd [z.B. um Geraden und Ebenen aufzustellen.]

Bei Geraden und Ebenen heißen *Ortsvektoren* auch *Stützvektoren* oder *Aufpunkte*. *Richtungsvektoren* heißen hier manchmal auch *Spannvektoren*.

Mitte zweier Punkte

Bsp.5

Bestimme den Mittelpunkt von A(1 | 4 | 6) und B(-2 | 1 | 0) !

Lösung:

(Um den Mittelpunkt zu bestimmen, zählt man beide Punkte zusammen und teilt durch zwei!)

$$\Rightarrow \quad M_{AB} = \frac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \left(\frac{1}{2}\cdot(1-2)\,\middle|\,\frac{1}{2}\cdot(4+1)\,\middle|\,\frac{1}{2}\cdot(6+0)\right) = (\,-0{,}5 \mid 2{,}5 \mid 3\,)$$

Schwerpunkt im Dreieck

Bsp.6

Bestimme den Schwerpunkt des Dreiecks ABC mit:

A(2 | 5 | -1)   B(-4 | 2 | 5)   C(-1 | 5 | 2)

Lösung:

(Um den Schwerpunkt zu bestimmen, zählt man alle drei Punkte zusammen und teilt durch drei!)

$$\Rightarrow\ S_{ABC} = \tfrac{1}{3}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \left(\tfrac{1}{3}\cdot(2-4-1)\,\middle|\,\tfrac{1}{3}\cdot(5+2+5)\,\middle|\,\tfrac{1}{3}\cdot(-1+5+2)\right)$$

$$\Rightarrow\ S_{ABC}(\,-1\ |\ 4\ |\ 2\,)$$

V.01.03 Aufstellen von Geraden (∰)

Eine Gerade aus zwei Punkten aufzustellen, ist sehr einfach. Einen der beiden Punkte nimmt man als Stützvektor [der steht vorne und hat keinen Parameter], der Richtungsvektor steht hinten, hat einen Parameter vorne dran und wird berechnet, indem man beide Punkte voneinander abzieht. [So berechnet man sie immer.]

Bsp.7

Die Gerade, die durch die Punkte A(1 | 3 | 2) und B(5 | 5 | -2) geht, lautet:

$$g_{AB}\ :\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{a} \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} \vec{b}-\vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Diese Geradenform heißt „Parameterform". Eine Gerade kann keine andere haben.

V.01.04 Erklärung der verschiedenen Ebenenformen (∰)

Eine Ebene gibt es in mehreren Formen. Insgesamt gibt es fünf nennenswerte Ebenenformen, wobei jedoch nur die ersten beiden so richtig wichtig sind.
Von den letzteren drei Ebenenformen lernen Sie möglicherweise nicht alle.

Die Parameterform (PF)

Eine Parameterform einer Ebene besteht aus einem Stützvektor [=Ortsvektor] und zwei Richtungsvektoren [=Spannvektoren].
Der Stützvektor ist ein Punkt, jeden Richtungsvektor erhält man, indem man zwei

Punkte voneinander abzieht.

$$E : \vec{x} = (\text{Stützvektor}) + r \cdot (\text{Richtungsvektor}) + s \cdot (\text{Richtungsvektor})$$

Die Koordinatenform (KF)

Eine KF einer Ebene ist eine einzige Zeile, also eine Gleichung.

Sie ist meines Erachtens die wichtigste Ebenengleichung [obwohl es auch Schultypen gibt, die diese Ebenenform nicht lernen].

$$E : a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$$

Hierbei sind a, b, c, d Zahlen. Schreibt man die Zahlen a, b, c übereinander, erhält man den Normalenvektor [das ist der Vektor, der senkrecht auf der Ebene E steht].

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Die Normalenform (NF)

Eine NF einer Ebene hat die Form: $[\vec{x} - (\vec{p})] \cdot (\vec{n}) = 0$

Hierbei ist $\vec{p}$ ein Punkt der Ebene und $\vec{n}$ der Normalenvektor.

Die Normalenform ist vergleichbar mit der Koordinatenform, jedoch sind eigentlich alle Rechnung über die Koordinatenform etwas schneller. Die Normalenform kann man jedoch viel besser für Erklärungen und Beweisverfahren verwenden.

Die Hesse-Normal-Form (HNF)

Die HNF kann man sowohl aus der Koordinatenform als auch aus der Normalenform erstellen. Man benötigt die HNF *nur* um den Abstand eines Punktes von einer Ebene zu bestimmen. Daher gehen wir hier nicht weiter darauf ein. [siehe: → Kap V.03.07]

Die Achsen-Abschnitts-Form (AAF)

Die AAF ist eine Abwandlung der Koordinatenform, aus welcher man die Achsenschnittpunkt [=Spurpunkte] sehr gut ablesen kann. Allerdings stellt sich die Frage, ob es schneller geht, die Achsenschnittpunkte auf konventionellem Weg zu bestimmen oder dafür extra noch die AAF aufzustellen. Ich werde die AAF in diesem Buch kaum verwenden. [Nur zweimal in Bsp.29 und Bsp.30 aus Kap.5.1.11]

Für Sie ist wichtig zu wissen, wie man die eine Ebenengleichung in eine andere umwandelt. [→ siehe hauptsächlich Kap V.01.06 bis V.01.08]

V.01.05 Aufstellen von Ebenen (∰)

Ebene aus drei Punkten erstellen:

Bsp.8

Die Ebene aufstellen, die durch die Punkte A(1|3|2), B(5|5|-2) und C(2|5|4) geht, lautet:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}\vec{a}\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}\vec{b}-\vec{a}\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}\vec{c}-\vec{a}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}5 & - & 1\\5 & - & 3\\-2 & - & 2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2 & - & 1\\5 & - & 3\\4 & - & 2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

(Umwandlung in Koordinatenform machen wir erst weiter unten)

Ebene aus einem Punkt und einer Geraden erstellen:

Bsp.9

Sei der Punkt P(1 | -3 | -6) und die Gerade $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ gegeben.

Die Ebene, die P und g enthält, kann man aufstellen:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2 & - & 1\\-5 & - & (-3)\\-3 & - & (-6)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

Ebene aus zwei sich schneidenden Geraden erstellen:

Bsp.10

Die beiden Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ und $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}16\\1\\-4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$

bilden eine Ebene. Bestimme eine Gleichung dieser Ebene.

Lösung:

(Wenn aus der Aufgabe nicht eindeutig hervorgeht, dass sich g und h schneiden, muss man dieses nachweisen! Hier ist eigentlich schon gesagt, dass die beiden tatsächlich eine Ebene bilden.)

Wir brauchen für die Ebene einen Stützvektor und zwei Richtungsvektoren.
Das kann man alles einfach den beiden Geraden entnehmen.

$$\Rightarrow E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$$

Ebene aus zwei parallelen Geraden erstellen:

Bsp.11

Gegeben seien $g : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}6\\3\\9\end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

Welche Ebene enthält die beiden Geraden g und h?

Lösung:

Wir brauchen für die Ebene einen Stützvektor und zwei Richtungsvektoren.
Den Stützvektor und einen Richtungsvektor entnimmt man einer der Geraden. Den zweiten Richtungsvektor erhält man, indem man die beiden Stützvektoren von einander abzieht.

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}6\\3\\9\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4 - 1\\5 - 2\\6 - 3\end{pmatrix} = \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}6\\3\\9\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$$

V.01.06 Ebenenformen umwandeln (PF → KF) (∰)

Parameterform in Koordinatenform (Hammer-Weg, über Kreuzprodukt)

Diese Methode entstammt dem frühen kommunistischen Russland,
deswegen heißt sie auch *Hammer*-Methode. ← Blöder Witz!

Jetzt ernsthaft: Die allereinfachste Methode, den Normalenvektor (und damit eine Koordinaten- oder Normalengleichung) zu bestimmen, liefert das sogenannte „**Kreuzprodukt**“ (manche nennen es auch „Vektorprodukt“). Leider akzeptieren nicht alle Lehrer diesen Hammer-Weg.

[Ihr werdet entschuldigen, das ich die detaillierte Erklärung des Kreuzproduktes erst in →Kap V.05.03 vornehme. Gegebenenfalls müsst Ihr erst hinblättern.]

Mal wieder ernsthaft: Der Normalenvektor steht senkrecht auf einer Ebene. Daher berechnen wir aus den Richtungsvektoren der Ebene mit Hilfe des Kreuzprodukts den Normalenvektor, welchen wir dann in die Koordinatengleichung als Zahlen vor x_1, x_2 und x_3 schreiben.

Bsp.12

Geben Sie eine Koordinatengleichung von $E : \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\-4\\5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\7\\12\end{pmatrix}$ an!

Lösung:

Zuerst berechnen wir den Normalenvektor mit dem Kreuzprodukt aus den beiden Richtungsvektoren.

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 7 \\ -4 & 12 \\ 1 & 2 \\ 1 & 7 \\ -4 & 12 \end{array} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 12 - (-4) \cdot 7 \\ (-4) \cdot 2 - 1 \cdot 12 \\ 1 \cdot 7 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -20 \\ 5 \end{pmatrix} \mathrel{\hat=} \text{(gekürzt)} \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun wissen wir, dass vor den x_1, x_2 und x_3 in der Koordinatengleichung die Zahlen: 8, -4 und 1 stehen $\Rightarrow$ $E : 8x_1 - 4x_2 + 1 \cdot x_3 = ??$

Um die rechte Seite zu erhalten, machen wir eine Punktprobe.

(Wir setzen den Stützvektor aus der gegebenen Parametergleichung ein)

$E : 8x_1 - 4x_2 + 1 \cdot x_3 = d$

$\Rightarrow \quad 8 \cdot 6 - 4 \cdot (-4) + 1 \cdot 5 = d \quad \Rightarrow 69 = d \quad \Rightarrow \quad E : 8x_1 - 4x_2 + x_3 = 69$

Bsp.13

Geben Sie eine Koordinatengleichung von $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ an!

Lösung:

Zuerst berechnen wir den Normalenvektor mit dem Kreuzprodukt aus den beiden Richtungsvektoren.

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{array} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Nun wissen wir wieder, dass vor den x_1, x_2 und x_3 in der Koordinatengleichung die Zahlen 2, 1 und -2 stehen. $\Rightarrow$ $E : 2x_1 + 1x_2 - 2x_3 = d$

Um die rechte Seite zu erhalten, machen wir eine Punktprobe.

(Wieder den Stützvektor aus der gegebenen Parametergleichung einsetzen)

$\Rightarrow \quad 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = d \quad \Rightarrow \quad E : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 11$

Parameterform in Koordinatenform (zweiter Weg, über Skalarprodukt)

Der Normalenvektor einer Ebene steht immer senkrecht auf der Ebene und damit auch auf den beiden Richtungsvektoren der Ebene. Deswegen muss das Skalarprodukt von dem Normalenvektor mit beiden Richtungsvektoren Null geben.

Bsp.14

Sei $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$ Gib eine Koordinatengleichung von E an !

Lösung:

Den Normalenvektor bezeichnen wir als $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$ also:

$1 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 - 4 \cdot n_3 = 0$ und $2 \cdot n_1 + 7 \cdot n_2 + 12 \cdot n_3 = 0$

diese beiden Gleichungen verrechnen wir jetzt so,
dass entweder n_1 oder n_2 oder n_3 wegfällt.

(Ich lasse in den nächsten Schritten n_1 wegfallen)

$$\begin{array}{ll} 1 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 - 4 \cdot n_3 = 0 \quad | \cdot (-2) & \longrightarrow \quad -2n_1 - 2n_2 + 8n_3 = 0 \\ 2 \cdot n_1 + 7 \cdot n_2 + 12 \cdot n_3 = 0 & \qquad\quad 2n_1 + 7n_2 + 12n_3 = 0 \quad (+) \\ \hline & \qquad\qquad 5n_2 + 20n_3 = 0 \end{array}$$

An dieser Stelle haben wir eine Gleichung mit nur noch *zwei* Unbekannten.
Wir dürfen nun n_2 oder n_3 beliebig wählen. Also entweder n_3=t oder n_3=1 oder ...

Wir wählen `mal $\mathbf{n_3=t}$! $\Rightarrow 5 \cdot n_2 + 20 \cdot t = 0 \quad \Rightarrow \quad n_2 = -4t$

n_2 und n_3 in die Ausgangsgleichung einsetzen (z.Bsp in die erste).

$\Rightarrow 1 \cdot n_1 + 1 \cdot (-4t) - 4 \cdot t = 0 \quad \Rightarrow \quad n_1 = 8t$

Somit haben wir unseren Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 8t \\ -4t \\ 1t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und wissen

damit was für Zahlen vor den $x_?$ in der Koordinatengleichung stehen müssen.
Nämlich:

$8{\cdot}x_1 - 4{\cdot}x_3 + 1{\cdot}x_3 = d$ (die rechte Seite kennen wir noch nicht. Dafür setzen wir in die Koordinatengleichung einen Punkt [=Stützvektor] der Ebene ein.

$8{\cdot}6 - 4{\cdot}(-4) + 1{\cdot}5 = d$

$69 = d$

Also lautet unsere Koordinatengleichung: $E\ :\ 8{\cdot}x_1 - 4{\cdot}x_2 + x_3 = 69$

Parameterform in Koordinatenform (dritter Weg, über LGS)

Bsp.15

Geben Sie eine Koordinatengleichung von $E\ :\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$ an!

Lösung:
Um die Koordinatenform zu kriegen, schreiben wir die Ebene als drei Gleichungen auf:

$$x_1 = 6 + r + 2s$$
$$x_2 = -4 + r + 7s$$
$$x_3 = 5 - 4r + 12s$$

Wir betrachten „r" und „s" als unsere Unbekannten (die wollen wir weg haben) und sagen deswegen ganz laut: „Geht weg!"
Wenn´s nichts nützt, müssen wir mit einem LGS weitermachen, sprich die drei Gleichungen so umformen, dass alle „r" und „s" links stehen, alle „$x_?$" und Zahlen auf der rechten Seite.

$$-r - 2s = -x_1 + 6$$
$$-r - 7s = -x_2 - 4$$
$$4r - 12s = -x_3 + 5$$

Als LGS umschreiben und dann alles unter der Diagonalen eliminieren.

r	s			
-1	-2	$-x_1+6$		$\|{\cdot}4$
-1	-7	$-x_2-4$	$+$ $\|{\cdot}(-1)$	
4	-12	$-x_3+5$		$+$

r	s		
-1	-2	x_1+6	
0	5	$-x_1+x_2+10$	$\mid\cdot 4$
0	-20	$-4x_1-x_3+29$	+

r	s	
-1	-2	x_1-6
0	5	x_1-x_2-10
0	0	$-8x_1+4x_2-x_3+69$

In der letzten Zeile steht bereits unsere Koordinatengleichung.

$0 = -8\cdot x_1+4\cdot x_2-x_3 + 69$ Fett Wa?

Natürlich kann man die noch umformen und so tun,
als ob man etwas Sinnvolles geleistet hätte. $E\ :\ 8\cdot x_1-4\cdot x_2+x_3 = 69$

V.01.07 Ebenenformen umwandeln (KF → PF) ($\oiint$)

Zuerst errechnen wir einfach drei Punkte der Ebene, daraus können wir schon die Parametergleichung erstellen. (Geht kaum länger als Sex beim ersten Rendevous.)

Bsp.16

Geben Sie $E : 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 8$ in Parameterform an!

Lösung:

Wir brauchen irgendwelche drei Punkte, die auf der Ebene liegen. (Die Koordinaten der Punkte kann man sich aus den Fingern saugen, aber natürlich so, dass beim Einsetzen in die Ebene wieder =8 `rauskommt.)

z.Bsp. geht das mit den Punkten A(1 | -1 | -1) B(4 | 0 | 0) C(2 | -2 | 2). [1]

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} B-A \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} C-A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\-1\\-1 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 3\\1\\1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1\\-1\\3 \end{pmatrix}$$

1 am einfachsten geht es, wenn man die Spurpunkte wählt. (→ Kap 5.1.11 „Spurpunkte“)

V.01.08 Ebenenformen umwandeln (KF ↔ NF) (∯)

geht auch ziemlich schnell. Erklären wir anhand eines Beispiels.

Bsp.17 (Koordinatenform in Normalenform)

Sei E : $6x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12$ Geben Sie E in Normalenform an!

Lösung:

Wir kennen ja den Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Die Normalenform sieht immer so aus:

$$\begin{pmatrix} \text{Normalen} \\ \text{vektor} \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} \text{Punkt der} \\ \text{Ebene} \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\begin{pmatrix} \text{Normalenvektor} \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} \text{Punkt} \\ \text{der} \\ \text{Ebene} \end{pmatrix} \right] = 0$$

irgendein Punkt der Ebene ist beispielsweise der Spurpunkt P(2 | 0 | 0)
[wenn man den in die Koordinatengleichung einsetzt, kommt 12 = 12 `raus]

also lautet unsere Normalenform E : $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$

Normalenform in Koordinatenform

Auch das erklären wir anhand eines Beispiels.

Bsp.18 (Normalenform in Koordinatenform)

Sei E : $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \right] = 0$ Geben Sie E in Koordinatenform an!

Lösung:

Bekannt ist der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und ein Punkt der Ebene P(1 | 2 | 9).

Durch den Normalenvektor kennen wir bereits
die linke Seite der Koordinatengleichung: E : $5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = d$

Um d zu erhalten, setzen wir den Punkt der Ebene P(1 | 2 | 9) ein.

$$5\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 9 = d \quad \Rightarrow \quad 36 = d$$

somit lautet die Koordinatengleichung: $E : 5\cdot x_1+2\cdot x_2+3\cdot x_3 = 36$

V.01.09 Spurpunkte bei Geraden, besondere Lage (∰)

Die **Spurpunkte einer Geraden sind**
die Schnittpunkte der Geraden mit den Koordinatenebenen.

Zur Erinnerung:
die x_1-x_2-Ebene (die Bodenebene) hat die Koordinatengleichung: $x_3=0$
die x_1-x_3-Ebene (die Seitenebene) hat die Koordinatengleichung: $x_2=0$
die x_2-x_3-Ebene (die Tafelebene) hat die Koordinatengleichung: $x_1=0$

Bsp.19

Nehmen wir an, wir wollen die Spurpunkte der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:
Spurpunkt mit der x_1-x_2-Ebene: Es gilt: $x_3=0$
Daher betrachtet man die x_3-Koordinate der Geraden (die unterste Zeile)
$x_3= -2+2t$ und setzt diese $=0$
$x_3 = 0 \quad \Rightarrow -2+2t = 0 \quad \Rightarrow -2=-2t \quad \Rightarrow 1=t$
t=1 wieder in g einsetzen:

t=1 in g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$ Spurpunkt mit der x_1-x_2-Ebene $S_{1,2}(4|6|0)$

Spurpunkt mit der x_1-x_3-Ebene, für welche $x_2=0$ gilt.
Man betrachtet die x_2-Koordinate der Geraden (die mittlere Zeile)
$x_2= 4+2t$ und setzt diese $=0$
$x_2 = 0 \quad \Rightarrow 4+2t = 0 \quad \Rightarrow 2t=-4 \quad \Rightarrow t=-2$
t=-2 wieder in g einsetzen

t=-2 in g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ ⇒ Spurpunkt mit der x_1-x_3-Ebene $S_{1,3}(1|0|-6)$

Spurpunkt mit der x_2-x_3-Ebene, für welche $x_1=0$ gilt.
Man betrachtet die x_1-Koordinate der Geraden (die oberste Zeile)
$x_1= 3+t$ und setzt diese =0
$x_1 = 0$ ⇒ $3+t = 0$ ⇒ t=-3
t=-3 wieder in g einsetzen

t=-3 in g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$ ⇒ Spurpunkt mit der x_2-x_3-Ebene $S_{2,3}(0|-2|-8)$

Bsp.20

Bestimmen Sie die Spurpunkte der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung:
Spurpunkt mit der x_1-x_2-Ebene. Es gilt: $x_3=0$ ⇔ $1+r = 0$ ⇔ $r = -1$

r=-1 in g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇒ Spurpunkt mit der x_1-x_2-Ebene: $S_{12}(3|3|0)$

Spurpunkt mit der x_1-x_3-Ebene. Es gilt: $x_2=0$ ⇔ $1-2r = 0$ ⇔ $r = ½$

r=½ in g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ ⇒ Spurpunkt mit der x_1-x_3-Ebene: $S_{13}(1{,}5|0|1{,}5)$

Spurpunkt mit der x_2-x_3-Ebene. Es gilt: $x_1=0$ ⇔ $2-r = 0$ ⇔ $r = 2$

r=2 in g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ⇒ Spurpunkt mit der x_2-x_3-Ebene: $S_{23}(0|-3|3)$

Besondere Lagen

Eine *besondere* Lage einer Geraden im Koordinatensystem hat man, wenn die Gerade parallel zu einer Koordinatenachse oder einer Koordinatenebene ist.
So eine „besondere Lage“ *erkennt man an Nullen* in der Geradengleichung.
Zuerst untersucht man den Richtungsvektor auf Nullen, falls an irgendeiner Stelle eine Null auftaucht, schaut man, ob in der gleichen Zeile auch der Stützvektor Null wird.

Ist die x_1-Koordinate des Richtungsvektors(=**R.V.**) Null, so ist die Gerade parallel zur

x_2x_3-Ebene (schließlich hat die x_2-x_3-Ebene die Gleichung: x_1=0).
Ist zusätzlich auch die x_1-Koordinate des Stützvektors Null, so ist die Gerade nicht nur parallel zur x_2-x_3-Ebene, sondern liegt sogar in dieser Ebene.

Ist die x_2-Koordinate des R.V. Null, so ist die Gerade parallel zur x_1x_3-Ebene (schließlich hat die x_1-x_3-Ebene die Gleichung: x_2=0).
Ist zusätzlich auch die x_2-Koordinate des Stützvektors Null, so ist die Gerade nicht nur parallel zur x_1-x_3-Ebene, sondern liegt sogar in dieser Ebene.

Ist die x_3-Koordinate des R.V. Null, so ist die Gerade parallel zur x_1x_2-Ebene (schließlich hat die x_1-x_2-Ebene die Gleichung: x_3=0).
Ist zusätzlich auch die x_3-Koordinate des Stützvektors Null, so ist die Gerade nicht nur parallel zur x_1-x_2-Ebene, sondern liegt sogar in dieser Ebene.

Sind x_1- *und* x_2-Koordinaten des R.V. Null, so ist diese Gerade parallel zur x_3-Achse.
Sind zusätzlich auch die x_1- *und* x_2-Koordinate des Stützvektors Null, so ist die Gerade nicht nur parallel zur x_3-Achse, sondern dann *ist* es sogar die x_3-Achse (sieht vielleicht nur auf den ersten Blick nicht danach aus).

Sind x_1- *und* x_3-Koordinaten des R.V. Null, so ist die Gerade parallel zur x_2-Achse.
Sind zusätzlich auch x_1- *und* x_3-Koordinate des Stützvektors Null, so ist die Gerade nicht nur parallel zur x_2-Achse, sondern dann *ist* es sogar die x_2-Achse.

Sind x_2- *und* x_3-Koordinaten des R.V. Null, so ist die Gerade parallel zur x_1-Achse .
Sind zusätzlich auch x_2- *und* x_3-Koordinate des Stützvektors Null, so ist die Gerade nicht nur parallel zur x_1-Achse, sondern dann *ist* es sogar die x_1-Achse.

Bsp.21 Bestimmen Sie die besondere Lage der Geraden $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}$

Lösung:
Diese Gerade ist parallel zur x_1-x_3-Ebene (die x_2-Koordinate des Richtungsvektor ist Null, die x_2-Koordinate des Stützvektors ist jedoch nicht Null). (Dass die x_3-Koordinate des Stützvektors Null ist, interessiert nicht, da die dementsprechende Koordinate des Richtungsvektors nicht Null ist.)

Bsp.22 Bestimmen Sie die besondere Lage der Geraden $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}$

Lösung:
g liegt in der x_1-x_2-Ebene
(die x_3-Koordinaten vom Richtungsvektor *und* vom Stützvektor sind Null).

Bsp.23 Bestimmen Sie die besondere Lage der Geraden $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}$

Lösung:
g ist identisch mit der x_2-Achse (Es ist also die x_2-Achse).
(Die x_1- *und* die x_3-Koordinaten vom Richtungsvektor *und* vom Stützvektor sind Null.)

Bsp.24 Bestimmen Sie die besondere Lage der Gerade $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\-7\\2\end{pmatrix}$

Lösung:
An dieser Geraden ist nichts besonders. Sie liegt irgendwie im Universum.

V.01.11 Spurpunkte, Spurgeraden bei Ebenen, besondere Lage (∰)

Die **Spurpunkte einer Ebene sind die**
Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen.
Spurpunkte heißen deswegen auch Achsenschnittpunkte !
Spurpunkte erhält man sehr einfach (zumindest, wenn man die Ebene in Koordinatenform hat).

Spurgeraden sind die Schnittgeraden einer Ebene mit den Koordinatenebenen.
Spurgeraden erhält man am einfachsten, indem man zwei Spurpunkte zu einer Geraden verbindet.

Wie berechnet man Spurpunkte ?
Jeder Spurpunkt einer Ebene liegt ja auf einer der drei Koordinatenachsen, deswegen sind zwei seiner drei Koordinaten = Null.
Jeder Punkt, der auf der x_1-Achse liegt, hat die Koordinaten $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$,
bei einem Punkt der x_2-Achse ist $x_1=0$ und $x_3=0$.

Bsp.25
Nehmen wir also an, wir wollen die Spurpunkte der Ebene: $E: 2x_1-4x_2-2x_3 = 8$

Lösung:
Der Spurpunkt S_1 (Schnitt mit x_1-Achse) hat die Form $S_1(\ x_1 \mid 0 \mid 0\ )$.

Wenn man diesen in die Ebene E einsetzt, erhält man:

$2\cdot x_1 - 4\cdot 0 - 2\cdot 0 = 8 \quad\Rightarrow\quad 2\cdot x_1 = 8 \quad\Rightarrow\quad x_1 = 4 \Rightarrow \qquad S_1(4|0|0)$

Der Spurpunkt S_2 hat die Form: $S_2(\,0\,|\,x_2\,|\,0\,)$

$\Rightarrow\quad 2\cdot 0 - 4\cdot x_2 - 2\cdot 0 = 8 \quad\Rightarrow\quad -4x_2 = 8 \quad\Rightarrow\quad x_2 = -2 \quad\Rightarrow \qquad S_2(0|-2|0)$

S_3 sieht so aus: $S_3(0|0|x_3) \quad\Rightarrow\quad 2\cdot 0 - 4\cdot 0 - 2\cdot x_3 = 8 \quad\Rightarrow\quad x_3=-4 \;\Rightarrow\; S_3(0|0|-4)$

Bsp.26

Berechnen Sie die Spurpunkte und Spurgeraden der Ebene E : $3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 12$.

Lösung:

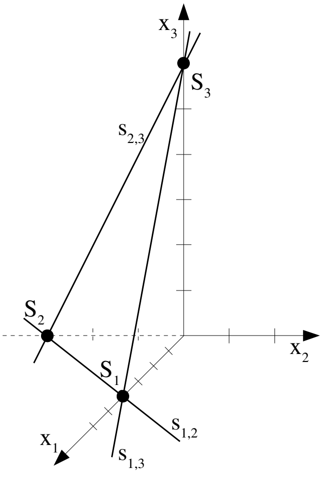
Von den Spurpunkten wissen wir, dass sie immer folgende Form haben:

$S_1(x_1|0|0) \quad S_2(0|x_2|0) \quad S_3(0|0|x_3)$

S_1 : $\quad 3\cdot x_1 - 4\cdot 0 + 2\cdot 0 = 12 \quad\Rightarrow\quad x_1 = 4 \qquad\Rightarrow S_1(4|\,0|0)$

S_2 : $\quad 3\cdot 0 - 4\cdot x_2 + 2\cdot 0 = 12 \quad\Rightarrow\quad x_2 = -3 \qquad S_2(0|-3|0)$

S_3 : $\quad 3\cdot 0 - 4\cdot 0 + 2\cdot x_3 = 12 \quad\Rightarrow\quad x_3 = 6 \qquad S_3(0|0|\,6)$



Wenn man je zwei von diesen drei Spurpunkten verbindet, erhält man wieder die Spurgeraden.

(als Beispiel ist die Spurgerade durch S_1 und S_2 gleichzeitig auch der Schnitt unserer Ebene mit der $x_{1,2}$ Koordinatenebene)

$$s_{1,2}:\ \vec{x} = \left(S_1\right) + t\cdot\left(S_2 - S_1\right) = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\-3\\0\end{pmatrix}$$

$$s_{1,3}:\ \vec{x} = \left(S_1\right) + t\cdot\left(S_3 - S_1\right) = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix} \qquad s_{2,3}:\ \vec{x} = \left(S_2\right) + t\cdot\left(S_3 - S_2\right) = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}$$

Die Spurgeraden sind nun auch die einzige vernünftige Möglichkeit, wie man in ein Koordinatensystem eine Ebene einzeichnen kann. Wenn man sich das Dreieck anschaut, das von den Spurpunkten S_1, S_2 und S_3 gebildet wird, kriegt man vielleicht eine Vorstellung, wie diese Ebene im Koordinatensystem liegen könnte.

[Wollte man nämlich die ganze Ebene anmalen, wäre im Normalfall jede Zeichnung ganz schwarz! Blöd sowas !]

Bsp.27 [siehe auch ↓ Bsp.38]

Bestimmen Sie Spurpunkte und Spurgeraden der Ebene E : $2x_1+1{,}5x_2+3x_3 = 6$
Veranschaulichen Sie die Ebene im Koordinatensystem mit Hilfe ihrer Spurgeraden!

Lösung:
(Veranschaulichen von Ebenen, bedeutet die Ebene einzeichnen!)

Spurpunkte: (kann man im Kopf berechnen: S_1: $\frac{6}{2}=3$ S_2: $\frac{6}{1{,}5}=4$ S_3: $\frac{6}{3}=2$)

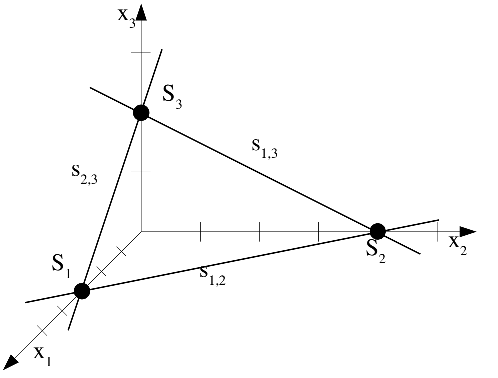
$S_1(3|0|0)$ $S_2(0|4|0)$ $S_3(0|0|2)$

Spurgeraden:

$$s_{1,2}: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0-3\\4-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$s_{1,3}: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0-3\\0-0\\2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$s_{2,3}: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0-0\\0-4\\2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix}$$



(Wenn man sich die drei [fettgezeichneten] Spurgeraden anschaut, sieht man praktisch die Ebene.)

Ich hatte es anfangs bereits erwähnt: die Spurgeraden sind gleichzeitig auch der Schnitt jeder Ebene E mit den Koordinatenebenen.
Man könnte die Schnittgeraden also auch erhalten, in dem man den Schnitt Ebene-Koordinatenebene rechnet.
Allerdings geht es zehnmal schneller, wenn man (so wie wir's hier gemacht haben) zuerst die Spurpunkte ausrechnet und daraus die Spurgeraden aufstellt.
(selbst wenn die Spurpunkte nicht direkt gefragt sind).

Die wenigsten Lehrer nehmen die **Achsenabschnittsform** (AAF) einer Ebene durch.
Die AAF ist somit nicht sonderlich wichtig.

Die AAF erhält man aus der Koordinatengleichung, indem man immer durch die Zahl teilt, die rechts vom „=“ Zeichen steht.
Für diejenigen, die die AAF lernen müssen, folgen zwei Beispiele von Spurpunktberechnungen über die Achsenabschnittsform der Ebene.

Bsp.28

Sei $E: 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12$ Bestimme die Spurpunkte der Ebene E!

Lösung:
Rechts vom „=“ steht die Zahl „12“.
Wir teilen die Koordinatengleichung durch 12 und erhalten umgehend die AAF.

$$E: \quad 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \qquad | :12$$
$$\frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 1$$

Die Spurpunkte der Ebene stehen mehr oder weniger im Nenner der Brüche.

$S_1(6 \mid 0 \mid 0)$ $S_2(0 \mid 4 \mid 0)$ $S_3(0 \mid 0 \mid -3)$

Bsp.29

Gegeben ist die Ebene $E: 5x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 36$
Bestimme die Spurpunkte von E!

Lösung:
Auf der rechten Seite der Koordinatengleichung sollte eine „1“ stehen,
daher teilen wir die Koordinatengleichung durch „36“.

$$5x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 36 \qquad | :36$$
$$\frac{5}{36}x_1 + \frac{1}{18}x_2 - \frac{2}{9}x_3 = 1$$

Diese Ebene ist steht schon fast in Achsenabschnittsform da.
Man muss nur noch die Zahlen im Zähler, nach unten bringen (Doppelbruch machen).

E in AAF umwandeln: $\frac{1}{\frac{36}{5}}x_1 + \frac{1}{18}x_2 - \frac{1}{\frac{9}{2}}x_3 = 1$

Nun stehen die Koordinaten der Spurpunkte wieder unten, im Nenner:

$S_1\left(\frac{36}{5} \middle| 0 \middle| 0\right)$ $S_2(0 \mid 18 \mid 0)$ $S_3\left(0 \middle| 0 \middle| -\frac{9}{2}\right)$

Besondere Lage von Ebenen

Eine *besondere* Lage einer Ebene im Koordinatensystem hat man, wenn die Ebene parallel zu einer Koordinatenachse oder einer Koordinatenebene ist (also ähnlich wie die besondere Lage von Geraden).
So eine „besondere Lage“ *erkennt man daran ob Spurpunkte existieren* oder nicht.
(Man kann sie auch an den Nullen des Normalenvektors erkennen. Das erkläre ich hier aber nicht.)

Man sollte vorher also unbedingt die Spurpunkte der Ebene bestimmen [siehe weiter oben].

Existiert der Spurpunkt S_1 nicht, so muss die Ebene parallel zur x_1-Achse sein. (Wenn der Spurpunkt S_1 nicht existiert, bedeutet das nämlich, dass die Ebene und die x_1-Achse keinen Schnittpunkt haben und dieses wiederum bedeutet, dass die beiden parallel sein müssen.)
Ist zusätzlich die freie Zahl (diejenige, die nicht vor den x_1, x_2 und x_3 steht) Null, so enthält die Ebene die x_1-Achse.

Existiert der Spurpunkt S_2 nicht, so ist die Ebene parallel zur x_2-Achse.
Ist zusätzlich die freie Zahl der Ebene Null, so enthält die Ebene die x_2-Achse.

Existiert der Spurpunkt S_3 nicht, so ist die Ebene parallel zur x_3-Achse.
Ist zusätzlich die freie Zahl der Ebene Null, so enthält die Ebene die x_3-Achse.

Existieren die Spurpunkte S_1 *und* S_2 nicht, so ist die Ebene parallel zur x_1-x_2-Ebene.
Ist zusätzlich die freie Zahl der Ebene Null, so sind diese Ebene und die x_1-x_2-Ebene identisch.

Existieren die Spurpunkte S_1 *und* S_3 nicht, so ist die Ebene parallel zur x_1-x_3-Ebene.
Ist zusätzlich die freie Zahl der Ebene Null, so sind diese Ebene und die x_1-x_3-Ebene identisch.

Existieren die Spurpunkte S_2 *und* S_3 nicht, so ist die Ebene parallel zur x_2-x_3-Ebene.
Ist zusätzlich die freie Zahl der Ebene Null, so sind diese Ebene und die x_2-x_3-Ebene identisch.

Bsp.30 [siehe auch ↓ Bsp.39]
Bestimmen Sie die besondere Lage der Ebene $E\ :\ 2x_1 + 4x_3 = 6$

Lösung:
Die Spurpunkte von E sind: $S_1(\,3 \mid 0 \mid 0\,)$ und $S_3(\,0 \mid 0 \mid 1{,}5\,)$. S_2 existiert nicht.
Die Ebene E ist also parallel zur x_2-Achse.

Bsp.31 Bestimmen Sie die besondere Lage der Ebene $E\ :\ 2x_1 + 4x_3 = 0$

Lösung:
Die Spurpunkte von E sind: $S_1(\,3 \mid 0 \mid 0\,)$ und $S_3(\,0 \mid 0 \mid 1{,}5\,)$. S_2 existiert nicht.
(Besser gesagt: wenn man S_2 ausrechnen will, stößt man auf eine wahre Aussage: 0=0).
Die freie Zahl der Ebene ist Null, die Ebene E enthält also die x_2-Achse.

Bsp.32 Bestimmen Sie die besondere Lage der Ebene $E\ :\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$

Lösung:
Diese Ebene hat keine besondere Lage.
Sie schneidet alle drei Achsen (sie hat drei Spurpunkte).

Bsp.33 Bestimmen Sie die besondere Lage der Ebene E : $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

Lösung:
Diese Ebene hat keine besondere Lage. Als Höchstes der Gefühle könnte man sagen, dass sie den Ursprung enthält. (Wenn man O(0|0|0) einsetzt, stimmt die Punktprobe.)

Bsp.34 Bestimmen Sie die besondere Lage der Ebene E : $x_2 - 4x_3 = 12$

Lösung:
Die Spurpunkte von E sind: $S_2(0 \mid 12 \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid -3)$. S_1 existiert nicht.
Die Ebene E ist damit parallel zur x_1-Achse.

Bsp.35 Bestimmen Sie die besondere Lage der Ebene E : $x_2 - 4x_3 = 0$

Lösung:
Die Spurpunkte von E sind: $S_2(0 \mid 12 \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid -3)$.
S_1 existiert nicht wirklich. Die Ebene E enthält die x_1-Achse.

Bsp.36 Bestimmen Sie die besondere Lage der Ebene E : $4x_3 = 12$

Lösung:
Es gibt nur einen Spurpunkt von E: $S_3(0 \mid 0 \mid 3)$ S_1 und S_2 existieren nicht.
Die Ebene E ist damit parallel zur x_1-x_2-Ebene.

Bsp.37 Bestimmen Sie die besondere Lage der Ebene E : $5x_1 = 0$

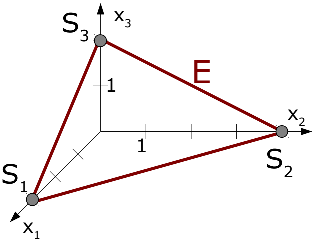
Lösung:
Es gibt eigentlich überhaupt keinen Spurpunkt von E. Bei der Berechnung von S_1 würde man immerhin den Ursprung erhalten. Bei der Ebene E handelt es sich damit um die x_2-x_3-Ebene.

V.01.11 Einzeichnen von Ebenen (∰)

Zum Zeichnen von Ebenen benötigt man die Spurpunkte.
Man muss also vor dem Zeichnen die Spurpunkte berechnen, diese zeichnet man ein und verbindet sie. Fertig ist die Ebene.

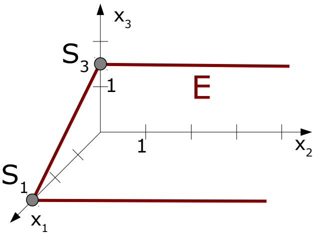
Bsp.38 [siehe ↑ Bsp.27]
Zeichnen Sie die Ebene E : $2x_1 + 1{,}5x_2 + 3x_3 = 6$ in ein Koordinatensystem ein.
(Oft lautet die Formulierung auch: „*Veranschaulichen von Ebenen* im Koordinatensystem ...“.)

Lösung:
Zuerst bestimmen wir die Spurpunkte:
S_1 (3 | 0 | 0) S_2(0 | 4 | 0) S_3(0 | 0 | 2)
Diese zeichnen wir ein und verbinden sie.
Das Dreieck, das man erhält, symbolisiert die gesuchte Ebene.



Bsp.39 [siehe ↑ Bsp.30]
Zeichnen Sie die Ebene E : $2x_1 + 4x_3 = 6$ in ein Koordinatensystem ein.

Lösung:
Zuerst bestimmen wir die Spurpunkte:
S_1 (3 | 0 | 0) S_2 --- S_3(0 | 0 | 1,5)
Da der Spurpunkt S_2 nicht exististiert, ist die Ebene parallel zur x_2-Achse. Wir verbinden daher die Spurpunkte S_1 und S_3 und zeichnen von da aus je eine Parallele zur x_2-Achse.



Bsp.40 Zeichnen Sie die Ebenen E : $3x_1+2x_2+3x_3 = 6$ und F : $2x_1+x_2=2$ in ein Koordinatensystem ein. Zeichnen Sie die Schnittgerade oder weitere Rechnung ein.

Lösung:
Die Spurpunkte von E sind: S_1(2|0|0) S_2(0|3|0) S_3(0|0|2),
die von F sind: S_1(1|0|0) S_2(0|2|0) S_3 ---
Nun zeichnen wir die Ebenen E und F wie in den letzten Beispielen. Da, wo beide Ebenen sich schneiden, erkennt man zwei Schnittpunkte. Verbindet man diese beiden, erhält man die Schnittgerade s.