Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter **www.mathe-laden.de** bestellen (falls Sie das möchten).
Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht aus dem Internet herunter geladen werden können.
Dazu gehören:
Inhaltsverzeichnis, **Stichwortverzeichnis**, und viele **Aufgaben zum Selberrechnen**.

Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.
Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

Sie können diese Datei gerne beliebig für den eigenen Gebrauch verwenden.
Nicht gestattet sind Änderungen sowie kommerzielle Nutzung.

matheseite
Die gute Seite an Mathe.

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

A.42 Trigonometrische Funktionen

Ein bisschen Blablah vorab:

Bei trigonometrischen Funktionen muss der Taschenrechner immer auf Bogenmaß eingestellt sein! [Im Taschenrechner heißt „Bogenmaß" auch „RAD" oder „Radianten"]

Trigonometrische Funktionen sind Funktionen in denen „Sinus", „Kosinus" oder „Tangens" drin vorkommen.

In der Trigonometrie gibt es [wie Sie sicherlich zu Ihrem Leidwesen bereits mitgekriegt haben] Siebenundzwanzigphantastilliarden komischer Formeln. Alle wichtigen stehen in der Formelsammlung. Die meisten werden Sie allerdings nicht brauchen.

Zwei Formeln sind ganz wichtig. Diese sollten Sie auswendig können.
Sie sollten diese beiden in Aufgaben erkennen und anwenden können.

$$\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

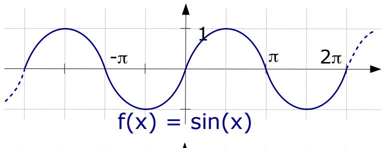
[dabei ist „ $\sin^2(x)$ " natürlich die Kurzschreibweise von „$(\sin(x))^2$" und $\cos^2(x)$ die von $(\cos(x))^2$]

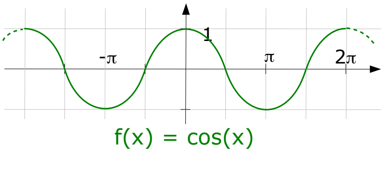
Vorab noch: Wir werden häufig den Begriff **„Argument"** verwenden. Das Argument bei sin, cos, tan [gibt's auch bei log und ln] ist der Term auf den sich sin, cos, ... beziehen. Unmathematisch: Das Argument ist das Ding in der Klammer.

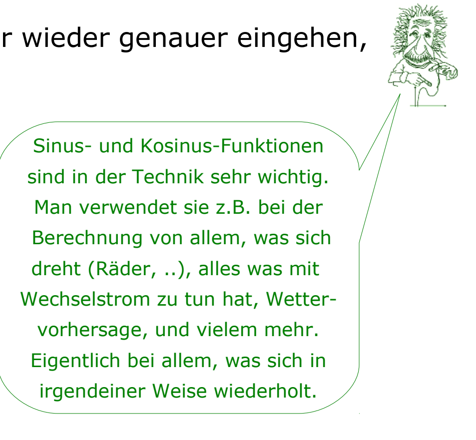
z.Aufgabe das Argument von $\sin(3x+5)$ ist $3x+5$
das Argument von $\cos(x^2-7)$ ist x^2-7

Die typische Sinus-Funktion hat die Form: $\mathbf{f(x)=a\cdot\sin(b[x-c])}$
Die typische Kosinus-Funktion hat die Form: $\mathbf{f(x)=a\cdot\cos(b[x-c])}$

Auf diese beiden Grundtypen werden wir immer wieder genauer eingehen, insbesondere im Kapitel A.42.08 auf Seite 16.





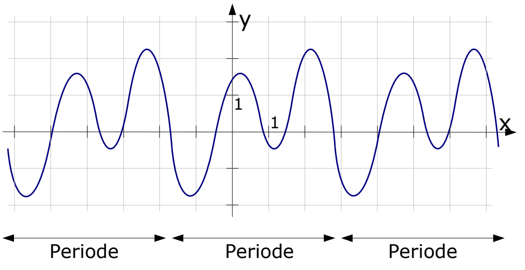


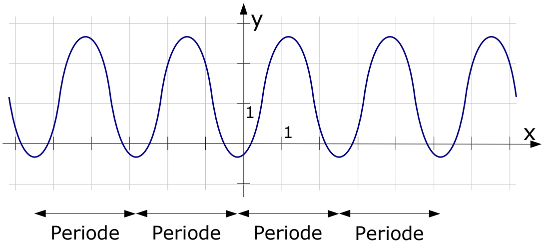
© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

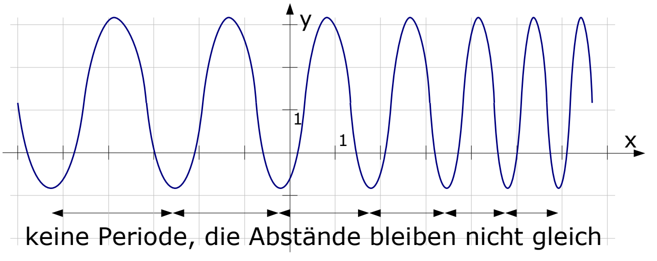
A.42.01 Die Periode (∰) (natürlich im Sinne trigonometrischer Funktionen)

Bei trigonometrischen Funktionen gibt es etwas, was bei keiner anderen Funktion vorkommt: Die meisten trigonometrischen Funktionen sind periodisch, d.h. in regelmäßigen Abständen wiederholen sie ihr Aussehen.

Das x-Intervall, in welchem sich eine Funktion wiederholt, nennt sich Periode oder Periodenlänge.







Wie erkennt man bei einer trigonometrischen Funktion die Periode?
Falls man die Skizze der Funktion bereits hat [z.B. mit einem GTR oder CAS oder sonst was], ist das normalerweise nicht sehr schwer. Man bestimmt den Abstand zwischen zwei Hochpunkten oder zwischen zwei Tiefpunkten und ist glücklich, denn das ist dann die Periodenlänge. [Ist aber, mathematisch gesehen, nicht sehr ehrenvoll.]

Wenn die Funktion die Form hat:
$f(x)=a\cdot\sin(bx+c)+d$ oder $f(x)=a\cdot\cos(bx+c)+d$
teilt man immer „2π“ durch „b“.
[„b“ ist die Zahl vor dem „x“]

Die Periode: $p = \frac{2\pi}{b}$

Aufgabe 1

Funktion	Zahl vor'm „x“	Periodenlänge
$f(x)=3\cdot\cos(5x-3)$	$b = 5$	$p = \frac{2\pi}{5}$
$f(x) = 2+\sin\left(\frac{1}{2}x-1\right)$	$b = \frac{1}{2}$	$p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$
$f(x) = 833-2{,}4\cdot\cos\left(\frac{2x}{3}\right)$	$b = \frac{2}{3}$	$p = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 2\pi\cdot\frac{3}{2} = 3\pi$

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

Aufgabe 2

$f(x) = 4x+2\sin(2x+1)$ $g(x) = \cos(x^2-7)$ $h(x) = 2(\sin(x))^2$

$i(x) = \sin(x)\cdot\cos(x)$ $j(x) = \frac{3}{\sin(x+4)-2}$ $k(x) = \sin(2x)+\sin(3x)$

Von all diesen Funktionen lässt sich die Periode nicht so einfach bestimmen, da alle diese Funktionen *nicht* die Form: „$a\cdot\sin(bx+c)+d$" oder „$a\cdot\cos(bx+c)+d$" haben.

[Beachten Sie bitte auch das Kapitel A.42.08 auf Seite 16]

A.42.02 einfache Gleichungen lösen (∰)

„Einfache" Gleichungen bedeutet in diesem Zusammenhang leider nicht, dass Sie die Gleichung anschauen und gleich sagen: „Ah ja, klar. Unterstes Niveau!".
„Einfache" Gleichung bedeutet hier, dass man die Gleichung ohne Taschenrechner lösen kann und als Hilfe nur die Skizze der Standard-Sinus bzw. Standard-Kosinus-Funktion braucht.

Meist kann man eine trigonometrische Gleichung so lösen:

→ Man formt die Gleichung derart um, dass nur noch
sin(…)=… oder cos(…)=… da steht.

→ Falls auf der rechten Seite „1", „-1" oder „0" steht, braucht man die Skizze der Standard-Sinus- oder -Kosinus-Funktion. Anderenfalls springen Sie bitte zum Kapitel A.42.03.

→ Das Innere der Klammer muss häufig substituiert werden.

Aufgabe 3

Löse die Gleichung: $5\cdot\sin(2x-4) - 4 = 1$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung: $2\cdot\cos(4x+1) = -5$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung: $\sin(x)\cdot\cos(x) = 0$

Aufgabe 6

Welche $x\in\mathbb{R}$ erfüllen die Gleichung: $2\cos^2(0{,}5x)-3\cos(0{,}5x) = 0$?

Aufgabe 7

Lösen Sie die Gleichung: $5\cdot\sin(2x-4)+4 = 4$

Aufgabe 8

Bestimme die Nullstellen von $f(x)=\sin^2(2x)-3\sin(2x)+2$ im Intervall $I=[0;2\pi]$.

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

Lösung von Aufgabe 3:

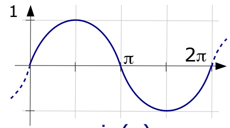
[Im ersten Schritt interessieren wir uns nicht dafür, was im Inneren der Sinus-Klammer steht.
Wir lösen nach sin(...) auf.]

$5 \cdot \sin(2x-4) - 4 = 1 \qquad |+4 \qquad |:5$

$\sin(2x-4) = 1$

Ab dieser Stelle müssen wir wissen, bei welchem x-Wert die Funktion den y-Wert „1" annimmt. Dafür substituieren wir $u=2x-4$ und bemühen die Skizze von Sinus.

$\sin(u) = 1$



sin(x)

Laut Skizze nimmt die Sinus-Funktion bei $x=\frac{1}{2}\pi$ einen y-Wert von y=1 an. $\Rightarrow u=\frac{1}{2}\pi$

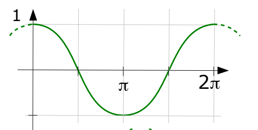
Resubstitution: $u=\frac{1}{2}\pi \;\Rightarrow\; 2x-4=\frac{1}{2}\pi \;\Rightarrow\; 2x=\frac{1}{2}\pi+4 \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{4}\pi+2$

Da eine Sinus-Funktion periodisch ist, wird es logischer Weise ein oder zwei Periodenlängen weiter wieder einen x-Wert geben, der die Gleichung erfüllt. Darum kümmern wir uns aber erst im übernächsten Rechenbeispiel.

Lösung von Aufgabe 4:

$2 \cdot \cos(4x+1) = -5 \qquad |:2$

$\cos(4x+1) = -2{,}5$



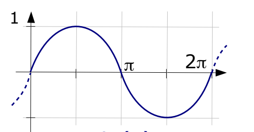
cos(x)

Eine Kosinus-Funktion kann nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen. Der Wert „-2,5" kann nie angenommen werden. Es gibt keine Lösung!

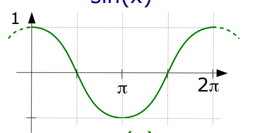
Lösung von Aufgabe 5:

$\sin(x) \cdot \cos(x) = 0$

$\sin(x)=0 \qquad \cos(x)=0$



sin(x)



cos(x)

Wichtige Vorüberlegung:

Wären nicht *alle* Lösungen der Gleichung gefragt, sondern nur ein paar [z.B. alle zwischen 0 und 2π], würde man ab jetzt einfach die Skizze von sin(x) anschauen, dann die von cos(x) und würde sofort folgern:

$\sin(x)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=\pi,\ x_3=2\pi. \qquad \cos(x)=0 \Rightarrow x_4={}^1/_2\cdot\pi,\ x_5={}^3/_2\cdot\pi$

Da aber alle Lösungen der Gleichung gefragt sind, hängen wir hinter jede Lösung noch ein „$+k\cdot 2\pi$" dran. Das kommt daher, weil sowohl sin(x) als auch cos(x) eine Periode von „2π" haben und jede Lösung, die zwischen „0" und „2π" gilt, automatisch auch ein, zwei oder beliebig viele Perioden weiter gelten muss. „k" ist hierbei eine beliebige ganze Zahl, es gilt also immer $k \in \mathbb{Z}$!

$\sin(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_1=0+k\cdot 2\pi} \qquad \mathbf{x_2=\pi+k\cdot 2\pi}$

[die Lösung $x_3=2\pi+k\cdot 2\pi$ erübrigt sich,
da „2π" bereits in $x_1=0+k\cdot 2\pi$ enthalten ist.]

$\cos(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_3=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi} \qquad \mathbf{x_4=\frac{3}{2}\pi+k\cdot 2\pi}$

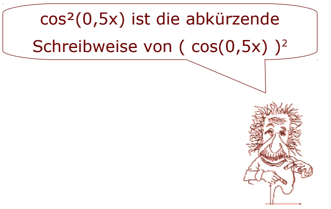
© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

Lösung von Aufgabe 6:

$2\cos^2(0{,}5x) - 3\cos(0{,}5x) = 0$?   cos²() umschreiben

$2\cdot[\cos(0{,}5x)]^2 - 3\cos(0{,}5x) = 0$ cos() ausklammern

$\cos(0{,}5x)\cdot[\,2\cdot\cos(0{,}5x)-3\,] = 0$



$\cos(0{,}5x) = 0$

Substitution: $u=0{,}5x$

$\cos(u) = 0$ [1]

$u_1=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$, $\quad u_2=\frac{3}{2}\pi+k\cdot 2\pi$

Resubstitution:

$u_1=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi \qquad u_2=\frac{3}{2}\pi+k\cdot 2\pi$

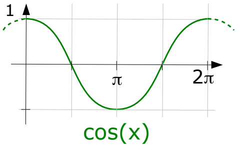
$0{,}5x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi \qquad 0{,}5x=\frac{3}{2}\pi+k\cdot 2\pi$

$x_1=\pi+k\cdot 4\pi \qquad x_2=3\pi+k\cdot 4\pi$

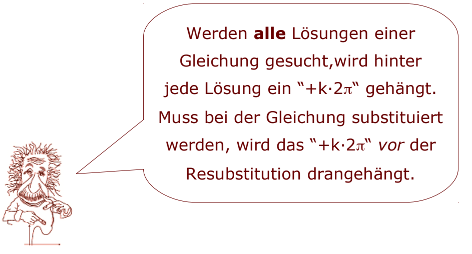
$2\cos(0{,}5x)-3 = 0$

$2\cos(u) = 3$ $|:2$

$\cos(u)=1{,}5 \;\Rightarrow\;$ k.Lös.



Bemerkung: Beide Lösungen könnte man auch zu $x=\pi+k\cdot 2\pi$ zusammenfassen.



Lösung von Aufgabe 7:

$5\cdot\sin(2x-4) + 4 = 4$ $|-4 \quad |:5$

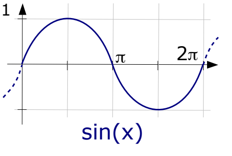
$\sin(2x-4) = 0$ Substitution: $u=2x-4$

$\sin(u) = 0$

Laut Skizze liefert sin(…) das Ergebnis „0" bei den x-Werten:

$u_1=0,\; u_2=\pi,\; u_2=2\pi, \ldots$ Kurz gesagt: bei $u=n\cdot\pi$.

[„n" ist hierbei eine beliebige ganze Zahl, es gilt also $n\in\mathbb{Z}$]



Resubstitution: $u=n\cdot\pi \;\Rightarrow\; 2x-4=n\cdot\pi \;\Rightarrow\; 2x=n\cdot\pi+4 \;\Rightarrow\; \mathbf{x = \frac{n}{2}\cdot\pi+2}$ $[n\in\mathbb{Z}\,]$

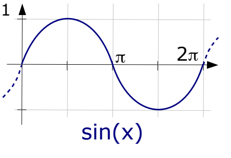
Lösung von Aufgabe 8:

$\sin^2(2x)-3\sin(2x)+2 = 0$

[Substitution $u=\sin(2x)$]

$u^2 - 3u + 2 = 0$

[p-q-Formel oder a-b-c-Formel]



$u_1=2 \;\Rightarrow\; \sin(2x)=2 \;\rightarrow\;$ keine Lösung [denn sin(…) wird nie „2"]

$u_2=1 \;\Rightarrow\; \sin(2x)=1 \;\rightarrow\;$ Substitution $2x=z \;\Rightarrow\; \sin(z)=1$

laut Skizze gilt: $\sin(z)=1$ bei $z=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$

$z=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi \;\Rightarrow\; 2x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi \;\Rightarrow\; \mathbf{x=\frac{1}{4}\pi+k\cdot\pi}$

---

1 Laut Skizze oder Tabelle liefert cos bei den x-Werten: $x_1=\frac{1}{2}\pi$ und $x_2=\frac{3}{2}\pi$ den Wert 0!

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

A.42.03 komplexe Gleichungen lösen (∰)

„Komplexe" Gleichung bedeutet hier, dass man für die Gleichung einen Taschenrechner braucht und dass man *nur* mit der Skizze von „sin(x)" und „cos(x)" nicht durch kommt. Man braucht noch ein paar Ideen mehr für die Lösung. (Siehe nächster Absatz, die Rahmen auf der rechten Seite).

Man kann eine trigonometrische Gleichung so lösen:

→ Man formt die Gleichung derart um, dass nur noch
sin(...)=... oder cos(...)=... da steht.
[Dafür benötigt man meist schon eine oder zwei Substitutionen.]

→ Falls auf der rechten Seite „1", „-1" oder „0" steht, kann man die Gleichung doch einfacher lösen. In diesem Fall springen Sie bitte zum Kapitel A.42.02.

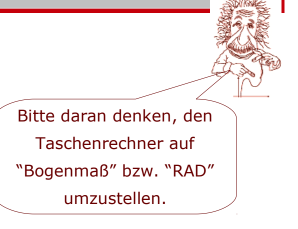
→ Die erste Lösung für „x" oder „u" erhält man mit dem Taschenrechner.
Es gibt dann immer noch eine zweite Lösung, die man aus Symmetrieeigenschaften von Sinus und Kosinus erhält. [Siehe Rahmen rechts].

→ Eventuell muss man zu den erhaltenen x-Werten noch ein paar Periodenlängen dazuzählen oder abziehen [je nach Aufgabenstellung].

$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$
[das gilt für jedes „x" oder „u" oder „α"]

aus
$\sin(u) = \text{Zahl}$
folgt als erste Lösung:
$u_1=\arcsin(\text{Zahl})$
[Ihnen bekannt als $\sin^{-1}(\text{Zahl})$]
und als zweite Lösung:
$u_2 = \pi - u_1$

aus
$\cos(u) = \text{Zahl}$
folgt als erste Lösung:
$u_1=\arccos(\text{Zahl})$
[Ihnen bekannt als $\cos^{-1}(\text{Zahl})$]
und als zweite Lösung:
$u_2 = -u_1$



Aufgabe 9
Bestimmen Sie die Nullstellen von $f_t(x)=5\sin(tx)-2$

Aufgabe 10
Bestimme die Schnittpunkte von
$f(x)=\sin^2(x)$ und $g(x)=\sin(x)+0{,}75$

Aufgabe 11
Bestimmen Sie im Intervall $[0;3\pi]$ alle Lösungen von
$$\left(4\cos(0{,}4x+2)-1\right)^2-4=0$$

Aufgabe 12
Welche $x\in\mathbb{R}$ erfüllen die Gleichung: $2\cos^2(0{,}5x)-3\cos(0{,}5x) = 0$?

Aufgabe 13
Bestimme die Schnittpunkte von $f(x)=4\cdot\cos^2(x)$ und $g(x)=12\cdot\sin(x)$

Lösung von Aufgabe 9:

$5\cdot\sin(tx)-2 = 0 \qquad |+2 \quad |:5$

$\sin(tx) = 0{,}4$

Um das Problem mit den zwei Unbekannten „t" und „x" zu lösen, wendet man einen kleinen, miesen, hinterhältigen Trick an, der wirklich nur von einem Mathematiker stammen kann:

Man substituiert $tx=u$.

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

$\Rightarrow\ \sin(u)=0{,}4$ [2] mit u=tx
$u_1=\arcsin(0{,}4)\approx 0{,}412$ [3]
$u_2=\pi-u_1=\pi-0{,}412\approx 2{,}730$

Resubstitution

$u_1=0{,}412 \ \Rightarrow\ t\cdot x_1=0{,}412 \ \Rightarrow\ x_1=\frac{0{,}412}{t}$

$u_2=2{,}73 \ \Rightarrow\ t\cdot x_2=2{,}73 \ \Rightarrow\ x_2=\frac{2{,}73}{t}$

Nun haben wir zwei Nullstellen. Eine trigonometrische Funktion hat aber unendlich viele. Wir erhalten *alle* Nullstellen, indem man zu x_1 und x_2 beliebig oft die Periode dazurechnet.

Erst bestimmen wir die Periode: $p=\frac{2\pi}{b}$ = (hier gilt: b=t) = $\frac{2\pi}{t}$

$\Rightarrow\ \mathbf{x_1=\frac{0{,}412}{t}+k\cdot\frac{2\pi}{t}}$ und $\mathbf{x_2=\frac{2{,}73}{t}+k\cdot\frac{2\pi}{t}}$ mit $k\in\mathbb{Z}$

Lösung von Aufgabe 10:

$f(x) = g(x)$
$\sin^2(x) = \sin(x)+0{,}75$ | $-\sin(x)-0{,}75$
$\sin^2(x)-\sin(x)-0{,}75 = 0$ Substitution: $\sin(x)=z$
$z^2 - z - 0{,}75 = 0$

p-q-Formel oder a-b-c-Formel liefert: $z_1=-0{,}5$ und $z_2=1{,}5$

$z_1=-0{,}5$ Resubstitution:
$\sin(x)=-0{,}5$
$x_1=\arcsin(-0{,}5)\approx -0{,}523$
$x_2=\pi-x_1=\pi-(-0{,}523)\approx 3{,}665$

$z_2=1{,}5$ Resubstitution:
$\sin(x)=1{,}5$
[keine Lösung]

Theoretisch müssten wir jetzt noch zu beiden Lösungen beliebige Vielfache der Perioden dazuzählen, aber darauf verzichten wir, da die Bestimmung der Periode hier nicht so einfach ist.

Da wir die Schnitt*punkte* gefragt sind, brauchen wir auch noch die y-Werte.

$y_1=f(x_1)=\sin^2(-0{,}523)=0{,}25 \ \Rightarrow$ **$S_1(-0{,}523|0{,}25)$**
$y_2=f(x_2)=\sin^2(3{,}665)=0{,}25 \ \Rightarrow$ **$S_2(3{,}665|0{,}25)$**

Lösung von Aufgabe 11:

$\left(4\cos(0{,}4x+2)-1\right)^2 - 4 = 0$ | $+4$
$\left(4\cos(0{,}4x+2)-1\right)^2 = 4$ | $\sqrt{\ }$
$4\cos(0{,}4x+2)-1 = \pm 2$ | $+1$

$4\cos(0{,}4x+2)=-1$ | $4\cos(0{,}4x+2)=3$ | :4
$\cos(0{,}4x+2)=-0{,}25$ | $\cos(0{,}4x+2)=0{,}75$ Substitution $u=0{,}4x+2$
$\cos(u)=-0{,}25$ [4] | $\cos(u)=0{,}75$
$u_1=\arccos(-0{,}25)\approx 1{,}82$ | $u_2=\arccos(0{,}75)\approx 0{,}72$ die zweiten Lösungen bestimmen
$u_3=-u_1=-1{,}82$ | $u_4=-u_2=-0{,}72$ Resubstitution $u=0{,}4x+2$

$u_1=1{,}82 \ \Rightarrow\ 0{,}4x_1+2=1{,}82 \ \Rightarrow\ 0{,}4x_1=-0{,}18 \ \Rightarrow\ x_1=-\frac{0{,}18}{0{,}4}=-0{,}45$

$u_2=0{,}72 \ \Rightarrow\ 0{,}4x_2+2=0{,}72 \ \Rightarrow\ 0{,}4x_2=-1{,}28 \ \Rightarrow\ x_2=-\frac{1{,}28}{0{,}4}=-3{,}2$

---

2 Wegen sin(u)=... wissen wir sofort, dass wir später mal die Regel des zweiten Rahmens brauchen.
3 „arcsin(-0,5)“ kennen Sie vermutlich als „$\sin^{-1}(-0{,}5)$“. Streng genommen gibt es $\sin^{-1}$ in der Mathematik nicht, sondern nur arcsin.
4 Wegen cos(u)=... wissen wir sofort, dass wir später mal die Regel des dritten Rahmens brauchen.

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

$u_3=-1{,}82 \;\Rightarrow\; 0{,}4x_3+2=-1{,}82 \;\Rightarrow\; 0{,}4x_3=-3{,}82 \;\Rightarrow\; x_3=-\frac{3{,}82}{0{,}4}=-9{,}55$

$u_4=-0{,}72 \;\Rightarrow\; 0{,}4x_4+2=-0{,}72 \;\Rightarrow\; 0{,}4x_4=-2{,}72 \;\Rightarrow\; x_4=-\frac{2{,}72}{0{,}4}=-6{,}8$

Leider liegen sämtliche x-Werte nicht im geforderten Intervall $[0;3\pi]$.

$3\pi\approx 9{,}42$. Alle x-Werte müssen daher zwischen 0 und 9,42 liegen!

Also addieren wir die Periodenlänge so oft, bis die x-Werte dazwischen liegen.

Die Periodenlänge berechnen wir über: $p=\frac{2\pi}{b}$ = (hier gilt: $b=0{,}4$) = $\frac{2\pi}{0{,}4}=5\pi$

$x_1=-0{,}45$ [zu klein] → $x_1=-0{,}45+5\pi\approx 15{,}25$ [zu groß]

$x_2=-3{,}2$ [zu klein] → $x_2=-3{,}2+5\pi\approx 12{,}51$ [zu groß]

$x_3=-9{,}55$ [zu klein] → $x_3=-9{,}55+5\pi\approx 6{,}16$ [perfekt] $\Rightarrow$ $\mathbf{x_3=6{,}16}$

$x_4=-6{,}8$ [zu klein] → $x_4=-6{,}8+5\pi\approx 6{,}16$ [perfekt] $\Rightarrow$ $\mathbf{x_4=8{,}91}$

Lösung von Aufgabe 12:

$2\cdot[\cos(0{,}5x)]^2 - 3\cos(0{,}5x) = 0$

$\cos(0{,}5x)\cdot[\,2\cdot\cos(0{,}5x)-3\,] = 0$

Substitution $0{,}5x=u$

$\cos(0{,}5x)=0$	$2\cos(0{,}5x)-3=0$
$\cos(u)=0$	$2\cos(u)=3$
$u_1=\arccos(0)\approx 1{,}57$	$\cos(u)=1{,}5$
$u_2=-u_1=-1{,}57$	keine Lösung

Resubstitution $u=0{,}5x$

$u_1=1{,}57 \;\Rightarrow\; 0{,}5x_1=1{,}57 \;\Rightarrow\; x_1=\frac{1{,}57}{0{,}5}\approx 3{,}14$

$u_2=-1{,}57 \;\Rightarrow\; 0{,}5x_2=-1{,}57 \;\Rightarrow\; x_2=-\frac{1{,}57}{0{,}5}\approx -3{,}14$

Zu jedem erhaltenen x-Wert muss noch ein Vielfaches der Periode dazu gezählt werden. Dann haben wir *alle* Lösungen.

Die Periodenlänge berechnet man über: $p=\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{0{,}5}=4\pi$

Die Lösungen der Gleichung sind:

$\mathbf{x_1=3{,}14+k\cdot 4\pi}$ **und** $\mathbf{x_2=-3{,}14+k\cdot 4\pi}$ mit $k\in\mathbb{Z}$

Bemerkung:
$x_1=3{,}14+k\cdot 4\pi$ könnte man zu $x_1=\pi+k\cdot 4\pi$ umschreiben und $x_2=-3{,}14+k\cdot 4\pi$ könnte man zu $x_1=-\pi+k\cdot 4\pi$ umschreiben. Beide Lösungen kann man auch zu $x=\pi+k\cdot 2\pi$ zusammenfassen.

Lösung von Aufgabe 13:

$f(x) = g(x)$

$4\cdot\cos^2(x) = 12\cdot\sin(x)$

[man kann nicht ausklammern, nicht substituieren, eigentlich geht gar nichts außer dem Trick: $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1 \;\Rightarrow\; \cos^2(x)=1-\sin^2(x)$.]

Aus der Formel $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ folgt $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)$.
Wir ersetzen in unserer Gleichung $\cos^2(x)$ durch $1-\sin^2(x)$.
Die Gleichung wird zwar auf den ersten Blick etwas komplizierter, dafür hat man aber nur noch sin-Terme und kann substituieren.

© Havonix 2017 www.mathe-seite.de

$4\cdot(1-\sin^2(x)) = 12\cdot\sin(x)$

$4-4\cdot\sin^2(x) = 12\cdot\sin(x)$ | $-12\cdot\sin(x)$ und umsortieren

$-4\cdot\sin^2(x)-12\cdot\sin(x)+4 = 0$ |:(-4) (vereinfachen)

$\sin^2(x)+3\cdot\sin(x)-1 = 0$ Substitution **$\sin(x)=u$**

$u^2+3u-1 = 0$

p-q-Formel oder a-b-c-Formel

Resubstitution $u=\sin(x)$

$u_1\approx 0{,}303$ | $u_2\approx -3{,}303$
$\sin(x_1)=0{,}303$ | $\sin(x_2)=-3{,}303$
$x_1=\arcsin(0{,}303)$ | keine Lösung
$\approx 0{,}308$

[Die zweite Lösung berechnen, wie am Anfang des Kapitels beschrieben!]

$x_2=\pi-x_1=\pi-0{,}308\approx 2{,}834$

Nun haben wir zwei Lösungen: $x_1=0{,}308$ $x_2=2{,}834$

Theoretisch müssen wir jedoch noch zu jeder Lösung beliebig viele Perioden dazuzählen oder abziehen. Dazu müssen wir aber die Periodenlänge kennen. In $f(x)=\cos^2(x)$ und $g(x)=12\cdot\sin(x)$ tauchen die Terme „sin(x)" und „cos(x)" auf. Beide haben die Periode von $p=2\pi$. Es ist naheliegend, dass die ganze Gleichung eine Periode von 2π hat.

Damit gilt für *alle* Lösungen der Gleichung:

$$\mathbf{x_1=0{,}308+k\cdot 2\pi}$$
$$\mathbf{x_2=2{,}834+k\cdot 2\pi} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

A.42.04 Ableitungen (Basiswissen) (∰)

Sinus abgeleitet gibt Kosinus.
Kosinus abgeleitet ergibt den negativen Sinus.
[Selbstverständlich muss man innere Ableitungen beachten, falls welche existieren].

$f(x) = \sin(x)$	$g(x) = \cos(x)$
$f'(x) = \cos(x)$	$g'(x) = -\sin(x)$
$f''(x) = -\sin(x)$	$g''(x) = -\cos(x)$

Bei Stammfunktionen denkt man einfach rückwärts.

$f(x) = \sin(x)$	$g(x) = \cos(x)$
$F(x) = -\cos(x)$	$G(x) = \sin(x)$.

Darauf gehen wir aber erst in Kapitel A.42.06 ein.

ableiten ↓

sin
cos
-sin
-cos
sin

↑ aufleiten

Aufgabe 14

$f(x) = 2\sin(x) \Rightarrow f'(x) = 2\cos(x)$

$g(x) = \cos(x^2-1) \Rightarrow g'(x) = -\sin(x^2-1)\cdot 2x$ (2x ist die innere Ableitung von x^2-1)

$h(x) = 2x+\sin(2x) \Rightarrow h'(x) = 2 + \cos(2x)\cdot 2$

$j(x) = x\cdot\sin(x+2) \Rightarrow j'(x) =$ [Produktregel] $= 1\cdot\sin(x+2) + x\cdot\cos(x+2)$

Aufgabe 15 (nette Beispiele mit Kettenregel)

$$f(x) = 2\sin(2x) \Rightarrow f'(x) = 2\cdot 2\cos(2x) = 4\cos(2x)$$

$$g(x) = \frac{5}{2}\cos(\pi x) \Rightarrow g'(x) = -\frac{5}{2}\cdot\left(\sin(\pi x)\right)\cdot\pi = -\frac{5\pi}{2}\sin(\pi x)$$

$$h(x) = 3x-\cos(4x+2) \Rightarrow h'(x) = 3+\sin(4x+2)\cdot 4 = 3+4\sin(4x+2)$$

$$i(x) = -3\sin(-x+1)+2 \Rightarrow i'(x) = -3\cos(-x+1)\cdot(-1) = 3\cos(-x+1)$$

$$j(x) = \pi\cdot x^2+0{,}2\cdot\cos(5\pi x) \Rightarrow j'(x) = \pi\cdot 2x-0{,}2\cdot 5\pi\cdot\sin(5\pi x) = 2\pi x-\pi\cdot\sin(5\pi x)$$

$$k(x) = \frac{2}{3}\cos(6x)+\frac{7}{2}\sin(4x) \Rightarrow k'(x) = \frac{2}{3}\left(-6\cdot\sin(6x)\right)+\frac{7}{2}\cdot 4\cdot\cos(4x) = -4\sin(6x)+14\cos(4x)$$

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

A.42.05 Ableitungen (Herausforderung) (∰)

Bei hässlichen Ableitungen kommt meist noch Ketten-, Produkt- und Quotientenregel dazu.

Aufgabe 16

$$f(x) = (1-2x)\cdot\sin(3x^2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -2\cdot\sin(3x^2) + (1-2x)\cdot 6x\cdot\cos(3x^2) =$$

$$= -2\cdot\sin(3x^2) + (6x-12x^2)\cdot\cos(3x^2)$$

$u = 1-2x \quad \Rightarrow \quad u' = -2$

$v=\sin(3x^2) \quad \Rightarrow \quad v'=6x\cdot\cos(3x^2)$

Aufgabe 17

Bestimmen Sie die Tangentensteigung von $f(x)=\tan(2x)$ im Ursprung.

Lösung:

Eine Tangentensteigung ist der Wert der ersten Ableitung.
Der x-Wert, der eingesetzt werden muss, ist x=0, denn es geht um den Ursprung.
Den Tangens kann man so nicht ableiten, man muss f(x) erst umschreiben.
[Tangens ist Sinus durch Kosinus]

$$f(x) = \tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$$

$u=\sin(2x) \quad \Rightarrow \quad u'=2\cos(2x)$

$v=\cos(2x) \quad \Rightarrow \quad v'=-2\sin(2x)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2} = \frac{2\cos(2x)\cdot\cos(2x)-\sin(2x)\cdot(-2\sin(2x))}{(\cos(2x))^2} =$$

$$= \frac{2\cos^2(2x)+2\sin^2(2x)}{\cos^2(2x)} = \frac{2\cdot\left(\cos^2(2x)+\sin^2(2x)\right)}{\cos^2(2x)} = ^{(5)} = \frac{2}{\cos^2(2x)}$$

Nun können wir die Tangentensteigung bei x=0 berechnen.

$$m = f'(0) = \frac{2}{\cos^2(2\cdot 0)} = \frac{2}{1^2} = 2$$

Aufgabe 18

Bestimmen Sie die tolle erste Ableitung von $f(x) = \sqrt{\sin(2x+4)+1}$.

Lösung:

$$f(x) = \sqrt{\sin(2x+4)+1} = \text{[umschreiben]} = \left(\sin(2x+4)+1\right)^{0,5}$$

$$f'(x) = \cancel{0,5}\cdot\left(\sin(2x+4)+1\right)^{-0,5}\cdot\cancel{2}\cos(2x+4) = \quad \leftarrow$$

2cos(2x+4) ist die innere Ableitung von (sin(2x+4)+1)

$$= \frac{\cos(2x+4)}{\left(\sin(2x+4)+1\right)^{0,5}} = \frac{\cos(2x+4)}{\sqrt{\sin(2x+4)+1}}$$

5 Denken Sie bitte daran: $\sin^2()+\cos^2()=1$

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

Aufgabe 19

Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen von $f(x)=0{,}25\sin(2x^2-2)$.

Lösung:

$f'(x) = 0{,}25\cdot\cos(2x^2-2)\cdot 4x = x\cdot\cos(2x^2-2)$

$f''(x) = u'\cdot v+u\cdot v' = 1\cdot\cos(2x^2-2)+1x\cdot(-\sin(2x^2-2))\cdot 4x =$
$= \cos(2x^2-2)-4x^2\cdot\sin(2x^2-2)$

$u=x$	$v = \cos(2x^2-2)$
$u'=1$	$v'=-4x\cdot\sin(2x^2-2)$

Aufgabe 20

Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x) = x^2\cdot\sin(x^2)$

Lösung:

$f(x) = x^2\cdot\sin(x^2)$

$f'(x) = u'\cdot v+u\cdot v' = 2x\cdot\sin(x^2)+x^2\cdot 2x\cdot\cos(x^2) =$
$= 2x\cdot\sin(x^2)+2x^3\cdot\cos(x^2)$

$u=x^2$	$v = \sin(x^2)$
$u'=2x$	$v'=2x\cdot\cos(x^2)$

Aufgabe 21

Bestimmen Sie alle Punkte mit waagerechter Tangente von $f(x) = (\cos(\pi\cdot x)+2\pi)^5$

Lösung:

In einem Punkt mit waagerechter Tangente muss die Steigung Null sein $\Rightarrow f'(x)=0$.

$f'(x) =$ [mit Kettenregel] $= 5\cdot(\cos(\pi\cdot x)+2\pi)^4\cdot(-\sin(\pi\cdot x)\cdot\pi) = -5\pi\cdot\sin(\pi\cdot x)\cdot(\cos(\pi\cdot x)+2\pi)^4$

[Die innere Ableitung von „$(\cos(\pi\cdot x)+2\pi)$" ist „$-\pi\cdot\sin(\pi\cdot x)$"]

$f'(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad -5\pi\cdot\sin(\pi\cdot x)\cdot(\cos(\pi\cdot x)+2\pi)^4=0$ Satz vom Nullprodukt anwenden

$-5\pi=0$

keine Lös.

$\sin(\pi\cdot x)=0$

aus Skizze:

$\pi\cdot x=k\cdot\pi$

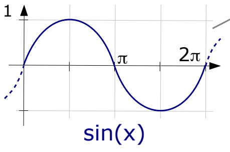
$x=k$

$(\cos(\pi\cdot x)+2\pi)^4=0$

$\cos(\pi\cdot x)+2\pi=0$

$\cos(\pi\cdot x)=-2\pi$

keine Lösung (6)



Lösung: **L={k}** mit $k\in\mathbb{Z}$. d.h. **L={...;-2;-1;0;1;2;...}**

6 cos() kann nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen. $-2\pi\approx-6{,}28$ kann nie angenommen werden.

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

A.42.06 Integrieren (Basiswissen) (∰)

Eine normale Sinus- oder Kosinusfunktion
wird mit der Kettenregel integriert.
Aus „sin" wird „-cos", aus „cos" wird „sin", usw...
Natürlich teilt man noch durch die innere Ableitung.

ableiten

sin
cos
-sin
-cos
sin

aufleiten

Hier ein paar kleine Rechenbeispiele:

Aufgabe 22

$f(x) = 2\sin(2x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = 2\cdot(-\cos(2x))\cdot\frac{1}{2} = -\cos(2x)$

$g(x) = \frac{5}{2}\cos(\pi x) \quad \Rightarrow \quad G(x) = \frac{5}{2\pi}\sin(\pi x)$

$h(x) = 3x-\cos(4x+2) \quad \Rightarrow \quad H(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}\sin(4x+2)$

Aufgabe 23

$f(x)=\frac{2}{5}x^2+\cos\left(\frac{1}{5}x\right) \quad \Rightarrow \quad F(x)=\frac{2}{15}x^3+\sin\left(\frac{1}{5}x\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{5}}=\frac{2}{15}\cdot x^3+5\cdot\sin\left(\frac{1}{5}x\right)$

$g(x)=6\cdot\sin(0{,}5x)-4 \quad \Rightarrow \quad G(x)=6\cdot(-\cos(0{,}5x))\cdot\frac{1}{0{,}5}-4x=-12\cdot\cos(0{,}5x)-4x$

$h_t(x)=t^2\cdot\sin(2tx)-6tx \quad \Rightarrow \quad H_t(x)=\frac{t^2}{2t}\cdot(-\cos(2tx))-\frac{6t}{2}x^2=-\frac{1}{2}t\cdot\cos(2tx)-3tx^2$

A.42.07 Integrieren (Herausforderung) (∰)

Wir werden in diesem Kapitel die Produktintegration [= partielle Integration] brauchen und die Integration durch Substitution. Falls Sie hierin nicht sicher sind, lesen Sie hierzu bitte die Kapitel A.14.05 und A.14.06.

Aufgabe 24

Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x)=x\cdot\sin(2x-3)$

Lösung:

Da es sich bei f(x) um ein Produkt handelt, braucht man die Produktintegration [=partielle Integration]. Zur Erinnerung: $\int u\cdot v'\,dx = u\cdot v-\int u'\cdot v\,dx$

$f(x)=x\cdot\sin(2x-3)$

$u=x$	$v'=\sin(2x-3)$
$u'=1$	$v=-\frac{1}{2}\cos(2x-3)$

$$F(x)=\left[x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2x-3)\right)\right]-\int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2x-3)\right)dx =$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x\cdot\cos(2x-3)\right]+\int \frac{1}{2}\cos(2x-3)\,dx =$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x\cdot\cos(2x-3)\right]+\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin(2x-3)\right] = \left[-\frac{1}{2}x\cdot\cos(2x-3)+\frac{1}{4}\cdot\sin(2x-3)\right]$$

Aufgabe 25

Bestimmen Sie das Integral, das $f(x)=2x\cdot\cos(x^2-12)$ mit der x-Achse im Intervall $[-3;3]$ einschließt.

Lösungsweg 1 [Standardweg]

Zu berechnen ist: $\int_{-3}^{3} 2x\cdot\cos(x^2-12)\,dx$

Die Ableitung des inneren Terms „x^2-12" ist „$2x$". Diese innere Ableitung steht draußen, vor dem cos(...). Daher ist die Integration durch Substitution geeignet.

$u=x^2-12 \Rightarrow u'=2x$

$dx=\frac{du}{u'}$

→ siehe Kap.A.14.06

$$\int_{-3}^{3} 2x\cdot\cos(x^2-12)\,dx =$$
$$= \int_{x=-3}^{x=3} 2x\cdot\cos(u)\frac{du}{u'} = \int_{x=-3}^{x=3} \cancel{2x}\cdot\cos(u)\frac{du}{\cancel{2x}} =$$
$$= \int_{x=-3}^{x=3} \cos(u)\,du = \left[\sin(u)\right]_{x=-3}^{x=3} = \left[\sin(x^2-12)\right]_{-3}^{3} =$$
$$= \sin(3^2-12)-\sin((-3)^2-12) = \sin(-3)-\sin(-3) = 0$$

Lösungsweg 2 [genialer Weg]

Die Funktion f(x) ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

[Beweis: $f(-x)=2\cdot(-x)\cdot\cos((-x)^2-12) = -2x\cdot\cos(x^2-12)=-f(x)$]

Daher sind die Flächen von $x=-3$ bis $x=0$ und die von $x=0$ bis $x=3$ vom Betrag her gleich, die eine liegt aber unterhalb, die andere oberhalb der x-Achse.

Die beiden Flächeninhalte heben sich im Integral auf, das gesamte Integral ergibt Null.

Aufgabe 26

$$f_t(x) = \sqrt{t}\cdot x+\frac{t+1}{t^2}\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{5}x\right)$$

Bestimmen Sie den Wert für t so, dass $f_t(x)$ im Intervall $[0;5]$ mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt von $A=10$ einschließt.

Lösung:

Gesucht ist: $\int_0^5 \sqrt{t}\cdot x+\frac{t+1}{t^2}\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{5}x\right)dx$

Bemerkung zur Stammfunktion: Denken Sie bitte dran, dass alle Terme mit „t" konstante Faktoren sind. Die Stammfunktion ist also bei weitem nicht so kompliziert, wie sie auf den ersten Blick aussieht. f(x) hat die Form: Zahl·x+Zahl·cos(Zahl·x).

$$\int_0^5 \sqrt{t}\cdot x+\frac{t+1}{t^2}\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{5}x\right)dx = \left[\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}x^2+\frac{t+1}{t^2}\cdot\left(-\sin\left(\frac{2\pi}{5}x\right)\cdot\frac{1}{\frac{2\pi}{5}}\right)\right]_0^5 = \left[\frac{\sqrt{t}}{2}\cdot x^2-\frac{t+1}{t^2}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{5}x\right)\cdot\frac{5}{2\pi}\right]_0^5 =$$
$$= \left[\frac{\sqrt{t}}{2}\cdot 5^2-\frac{t+1}{t^2}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{5}\cdot 5\right)\cdot\frac{5}{2\pi}\right] - \left[\frac{\sqrt{t}}{2}\cdot 0^2-\frac{t+1}{t^2}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{5}\cdot 0\right)\cdot\frac{5}{2\pi}\right] =$$
$$= \left[\frac{\sqrt{t}}{2}\cdot 25-\frac{t+1}{t^2}\cdot\sin(2\pi)\cdot\frac{5}{2\pi}\right] - \left[\frac{\sqrt{t}}{2}\cdot 0-\frac{t+1}{t^2}\cdot\sin(0)\cdot\frac{5}{2\pi}\right] = \qquad [\sin(0)=0 \text{ und } \sin(2\pi)=0\ !]$$
$$= \left[\frac{25}{2}\cdot\sqrt{t}-\frac{t+1}{t^2}\cdot 0\cdot\frac{5}{2\pi}\right] - \left[0-0\right] = \frac{25}{2}\cdot\sqrt{t}$$

Die Fläche soll den Wert $A=10$ annehmen

$$\Rightarrow \frac{25}{2}\cdot\sqrt{t}=10 \Rightarrow \sqrt{t}=\frac{2}{25}\cdot 10 \Rightarrow \sqrt{t}=\frac{20}{25} \Rightarrow \sqrt{t}=\frac{4}{5} \Rightarrow t=\left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow t=\frac{16}{25}$$

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

A.42.08 Grundfunktion a·sin(b[x–c])+d (∰)

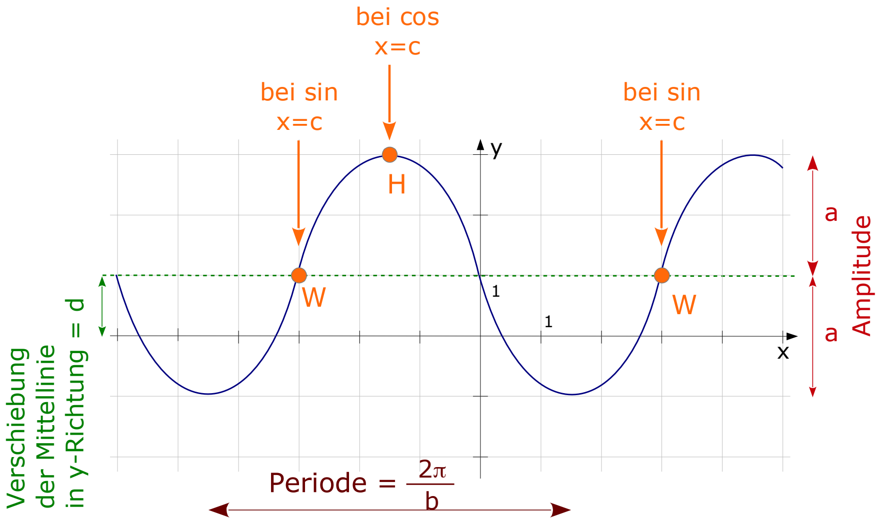
„Normale" sin- und cos-Funktionen haben die Form:
f(x) = a·sin(b·[x–c])+d bzw. **f(x) = a·cos(b·[x–c])+d**

Hierbei ist:
a = die Amplitude, also die senkrecht gemessene Strecke von der Mitte der Funktion ganz hoch bzw. ganz runter. Von ganz oben vom Hochpunkt bis ganz runter zum Tiefpunkt sind´s also 2·a

b = eine Zahl mit deren Hilfe die Periode p berechnen kann. Es gilt: $p = \frac{2\pi}{b}$

c : bei sin: c ist der x-Wert jenes Wendepunkts, der positive Steigung hat.
(die Wendepunkte liegen immer genau zwischen Hoch- und Tiefpunkten)
bei cos: c ist der x-Wert des Hochpunkts

d = Die [waagerechte] Mittellinie der Funktion bzw. Verschiebung in y-Richtung.

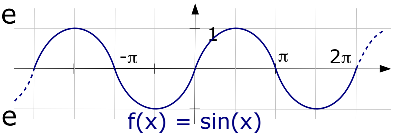


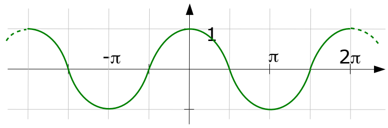
a = Amplitude
b gibt die Periode an, über $p = {}^{2\pi}/_{b}$
d = Mittellinie

c : bei sin-Funktionen ist c der x-Wert des Wendepunkts
bei cos-Funktionen ist c der x-Wert des Hochpunkts.

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

Es ist sehr empfehlenswert zu wissen, wie die normale Sinus- und die normale Kosinus-Funktion aussehen. Beide habe eine Periode von 2π,
die Sinus-Funktion beginnt im Ursprung, während die Kosinus-Funktion den Hochpunkt auf der y-Achse hat.





f(x) = cos(x)

Man kann aus den Skizzen sofort die wichtigsten Werte ablesen:

$\sin(0) = 0$	$\cos(0) = 1$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
$\sin(\pi) = 0$	$\cos(\pi) = -1$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

Tabelle mit den wichtigen und unwichtigen Werten:

Winkel	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

A.42.09 von Funktionsgleichung zum Schaubild (∰)

Aufgabe 27

Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion $f(x) = 2\cdot\sin(0{,}75x+1{,}5)+1$

Lösung:

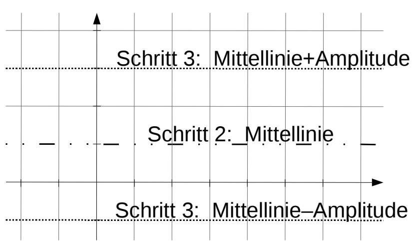
Schritt 1: Ausklammern der Zahl vor dem „x".

$f(x) = 2\cdot\sin(0{,}75x+1{,}5)+1$

$\Rightarrow f(x) = 2\cdot\sin(0{,}75[x+2])+1$

Schritt 2: Einzeichnen der Mittellinie. (d=1)

Schritt 3: Einzeichnen, wie weit die Amplitude (a=2) hoch und runter reicht. (von d=1 um 2 hoch und runter gehen..)



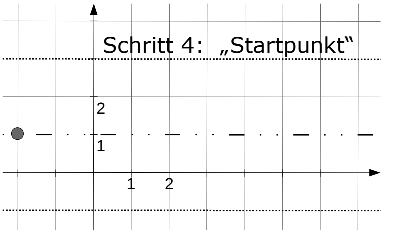
© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

Schritt 4: Wo beginnt die Funktion ?

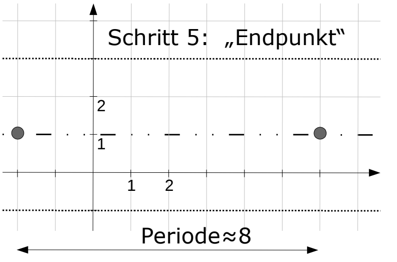
[Verschiebung in x-Richtung]

Bei sin-Funktionen ist dieser „Startpunkt" immer der Wendepunkt mit positiver Steigung [also der Wendepunkt, der aufsteigt]. Dieser Wendepunkt liegt immer auf der Mittellinie. Der x-Wert ist in diesem Fall bei „-2", denn wegen „[x+2]" haben wir eine Verschiebung um 2 nach links. ⇒ Startpunkt: W(-2|1)

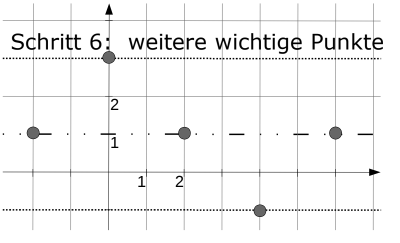
Bei cos-Funktionen liegt er auf der oberen bzw. unteren „Amplitudengerade" [je nachdem ob's f(x)=+a·cos(...) bzw. f(x)=-a·cos(..) heißt.]



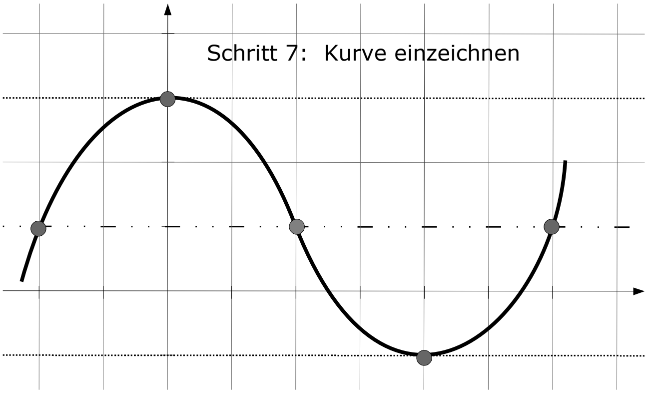
Schritt 5: Bestimmung der Periode. Da wir wissen, dass eine sin-Funktion immer so  aussieht, wissen wir, wo eine Periodenlänge aufhört. (Hier: Per $= \frac{2\pi}{0{,}75} \approx 8$)



Schritt 6: Wichtige Punkte bestimmen. In der Mitte zwischen Start- und Endpunkt muss ein Punkt sein, der wieder auf der Mittellinie liegt. Zwischen diesem „Mittelpunkt" und dem linken Startpunkt befindet sich der Hochpunkt. Zwischen „Mittelpunkt" und dem rechten Endpunkt befindet sich ein Tiefpunkt.



Schritt 7: Punkte verbinden.



Aufgabe 28

Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion $f(x) = 3\cos(\pi x - 4\pi) + 3$

Lösung:

Schritt 1: Ausklammern der Zahl vor dem „x".

$f(x) = 3\cos(\pi x - 4\pi) + 3 \;\Rightarrow\; \mathbf{f(x) = 3\cos(\pi[x-4]) + 3}$

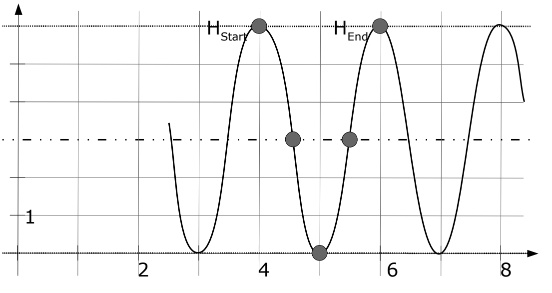
Schritt 2: Einzeichnen der Mittellinie. [d=3]

Schritt 3: Einzeichnen, wie weit die Amplitude (a=3) hoch und runter reicht. [Maximum: 3+3=6 und Minimum: 3–3=0]

Schritt 4: Wo beginnt die Funktion [Verschiebung in x-Richtung]. Der Startpunkt ist bei cos-Funktionen der Hochpunkt. Dieser hat hier den x-Wert x=+4 (wegen [x–4] gibt es eine Verschiebung um 4 nach rechts). Der y-Wert liegt natürlich auf der oberen Amplitudenlinie ⇒ Startpunkt bei H(4|6)

Schritt 5: Bestimmung der Periode. Per=$\frac{2\pi}{\pi}$=2. Der Endpunkt ist also wieder ein Hochpunkt, der *eine* Periodenlänge weiter rechts liegt ⇒ $H_{end}(4+2|6)=H_{End}(6|6)$

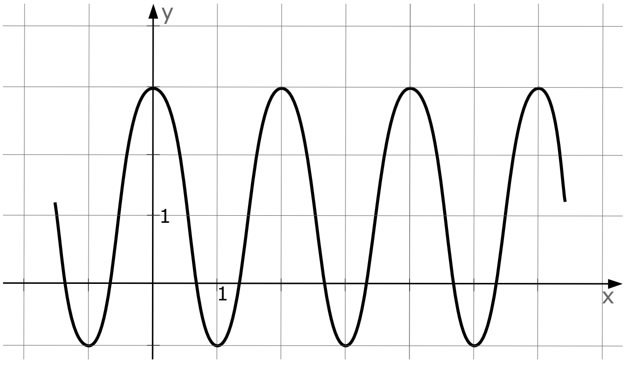
Schritt 6: Wichtige Punkte bestimmen. In der Mitte zwischen Start- und Endpunkt muss der Tiefpunkt liegen. Sowohl zwischen Start- und Tiefpunkt als auch zwischen End- und Tiefpunkt müssen wieder Punkte auf der Mittellinie liegen.



Schritt 7: Punkte verbinden.

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

A.42.10 vom Schaubild zur Funktionsgleichung (∰)

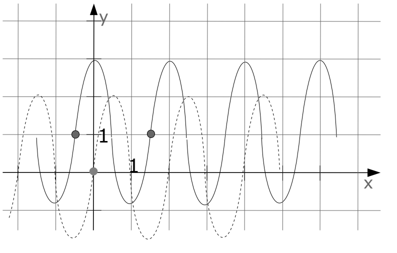


Aufgabe 28

Welche sin-Funktion hat folgendes Schaubild ? →

Lösung:
Zuerst schauen wir uns die Mittellinie der Kurve an.
Diese liegt bei y=1. Die Funktion ist also um 1 nach oben verschoben, es gilt also d=1.
Der Abstand [in y-Richtung] von der Mittellinie bis zum Hochpunkt [oder nach unten bis zum Tiefpunkt] beträgt 2. Damit ist der Streckfaktor in y-Richtung 2, es gilt also a=2.

Wir wissen also bisher, dass unsere Funktion die Form $f(x) = 2\cdot\sin(bx-c)+1$ hat.
Um die Verschiebung in x-Richtung besser einbringen zu können, schreiben wir f(x) in einer leicht anderen Form: $f(x) = 2\cdot\sin(b\cdot[x-c])+1$.



Wäre die Funktion *nicht* verschoben, würde sie aussehen, wie die gestrichelte hier der Zeichnung rechts. Der Wendepunkt läge im Ursprung. Nun ist sie aber verschoben. [durchgezogene Linie]
Der Wendepunkt ist vom Ursprung zu der Position (-0,5|1) gewandert [oder wenn's Ihnen lieber ist, können Sie auch den bei (1,5|1) nehmen]. Also haben wir eine Verschiebung um 0,5 nach links [oder 1,5 nach rechts]. [Die Verschiebung um 1 nach oben juckt nicht, die haben wir bereits].
Eine Verschiebung um 0,5 nach links bedeutet: c=+0,5 also:

$$f(x) = 2\cdot\sin(b\cdot[x+0{,}5])+1$$

[Die Verschiebung um 1,5 nach rechts hätte bedeutet: c=-1,5 ⇒ $f(x) = 2\cdot\sin(b[x-1{,}5])+1$]

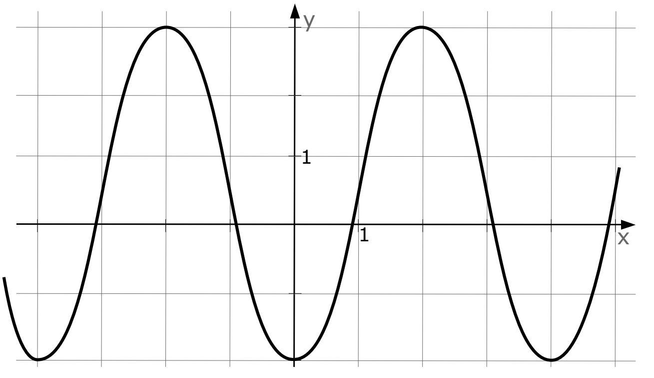
Jetzt brauchen wir noch „b". Das ist zum Glück nicht allzu schwer. Da für die Periodenlänge einer trigonometrischen Funktion $\text{Per}=\frac{2\pi}{b}$ gilt, muss umgekehrt auch gelten: $b=\frac{2\pi}{\text{Per}}$
Wir lesen also die Periodenlänge der Funktion auf der Zeichnung ab [z.Aufgabe von Tiefpunkt zu Tiefpunkt oder so..]. Die Periodenlänge ist 2 (LE). Deswegen gilt $b=\frac{2\pi}{2}=\pi$.
Damit haben wir unsere Funktion.

$$f(x) = 2\cdot\sin(\pi\cdot[x+0{,}5])+1 = 2\sin(\pi\cdot x+0{,}5\pi)+1$$

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

Aufgabe 29

Bestimmen Sie die Gleichung der trigonometrischen Funktion, deren Schaubild zum rechts eingezeichneten Graphen passt.



Lösung:
Eine trigonometrische Funktion hat die Gleichung:
$f(x)=a\cdot\sin(b\cdot[x-c])+d$ oder
$f(x)=a\cdot\cos(b\cdot[x-c])+d$
Unsere Funktion reicht bis hoch zu y=3 und runter bis y=-2.
Das ist eine Spannweite von 5 und die doppelte Amplitude

$\Rightarrow\ 2a=5\ \Rightarrow\ \mathbf{a=\frac{5}{2}}$

Die Mittellinie [Verschiebung in y-Richtung] ist der Mittelwert vom höchsten und vom tiefsten Punkt $\Rightarrow\ d=\frac{5+(-2)}{2}=\frac{1}{2}$ $\mathbf{d=\frac{1}{2}}$

Die Periodenlänge beträgt p=4, denn der Abstand der beiden Hochpunkte oder von je zwei Tiefpunkten beträgt 4.

Die Periodenlänge fließt in die Berechnung von b ein. $\Rightarrow\ b=\frac{2\pi}{\text{Per}}=\frac{2\pi}{4}\ \Rightarrow\ \mathbf{b=\frac{\pi}{2}}$

Der Parameter c ist bei einer Sinus-Funktion der x-Wert des Wendepunkts, bei einer Kosinus-Funktion ist es der x-Wert des Hochpunkts. Da man bei uns die Hochpunkte recht gut ablesen kann, machen wir eine Kosinus-Funktion draus. $\Rightarrow$ c=2 [oder c=-2]

$$\Rightarrow\ \mathbf{f(x)=\frac{5}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot[x-2]\right)+\frac{1}{2}}$$

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

A.42.11 Funktionsanalyse (∰)

Aufgabe 30

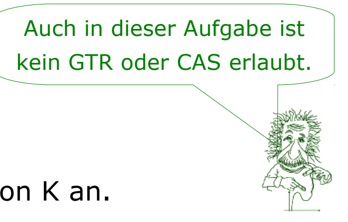
$f(x) = 4-4\cdot\cos(0{,}25x)$

a) Wie groß ist die Periodenlänge von f(x).
Bestimmen Sie alle Nullstellen und Extrempunkte von f(x).
Skizzieren Sie f(x) im Bereich $[0;8\pi]$.
b) f(x) bildet mit der x-Achse mehrere Flächen.
Bestimmen Sie den Inhalt einer dieser Flächen.
c) Im Wendepunkt mit der kleinsten positiven Abzisse und negativer Steigung wird eine Tangente gelegt, die mit den Koordinatenachsen eine Dreiecksfläche bildet. In welchem Verhältnis teilt f(x) diese Dreiecksfläche?

(Lösung auf Seite 23)

Aufgabe 31

Gegeben ist die Funktion f durch



$f(x) = 6\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right);\quad x\in[0;12].$

Ihr Schaubild sei K.

a) Geben Sie die Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte von K an.
Zeichnen Sie K.
Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch den Kurvenpunkt $P(u|f(u))$ mit $0<u<6$, begrenzen mit den Koordinatenachsen ein Rechteck.
Für welchen Wert von u hat dieses Rechteck maximalen Umfang ?

b) Eine Ursprungsgerade g mit der Steigung $m>0$ schneidet K im Punkt $P(p|f(p))$ K und g umschließen eine Fläche. K, g und die Gerade $x=6$ umschließen eine weitere Fläche.
Bestimmen Sie, ohne p zu berechnen, m so, dass die Inhalte der beiden Flächen gleich sind.

c) Die Tagesdauer ändert sich im Verlauf eines Jahres. In einem kleinen Kaff namens Großkarlbach schwankt die Tageslänge zwischen 17,26 Stunden am 1.Juli und 8,15 Stunden sechs Monate später. Die Tageslänge soll in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Monaten) durch eine Funktion T mit
$T(t) = a+b\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ beschrieben werden.
Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b.
Welche Tageslänge ergibt sich aus dem Modell für den 15.April?

(Lösung auf Seite 24)

Aufgabe 32

Betrachtet wird die Funktion $f_t(x)=3t\cdot\cos(0{,}5x)+t^2$ im Intervall $I=[0;8\pi[$ für $t>0$.
a) Untersuchen Sie $f_t(x)$ auf Extrema und Wendepunkte. Skizzieren Sie $f_1(x)$.
b) Für welche Werte von t hat $f_t(x)$ Nullstellen?

c) $f_3(x)$ schließt mit der x-Achse mehrere Flächenstücke ein.
Bestimmen Sie den Inhalt eines dieser Flächenstücke exakt.
(Lösung auf Seite 28)

Lösung von Aufgabe 30 (von Seite 22):

a) Die Periodenlänge einer Kosinus-Funktion bestimmt man mit der Formel:

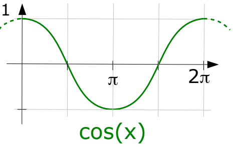
$p=\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{0{,}25}=8\pi$

Für die Nullstellen setzt man f(x)=0.

$4-4\cdot\cos(0{,}25x)=0 \qquad |-4 \qquad |:(-4)$

$\cos(0{,}25x) = 1$

[Laut Skizze ist cos(...)=1 beim x-Wert „0" und „2π" → → →]



$\Rightarrow\ 0{,}25x=0 \qquad$ bzw. $\qquad 0{,}25x=2\pi.$

$x_1=\frac{0}{0{,}25}=0 \qquad\qquad x_2=\frac{2\pi}{0{,}25}=8\pi$

Nun brauchen wir aber *alle* Nullstellen und nicht nur eine.
Also nehmen wir *eine davon* und zählen beliebig viele Perioden dazu.

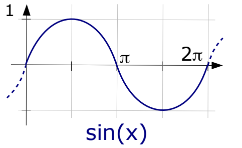
⇒ Alle Nullstellen erhalten wir über $x=0+n\cdot 8\pi$ ⇒ **N(n·8π|0)**

Für die Extrempunkte setzt man f'(x)=0.

$f'(x) = -4\cdot(-\sin(0{,}25x))\cdot 0{,}25 = \sin(0{,}25x)$

$f'(x)=0 \ \Rightarrow\ \sin(0{,}25x)=0$

[Laut Skizze ist sin(...)=1 beim x-Wert „0", „π" und „2π" → → →]



$\Rightarrow\ 0{,}25x=0 \quad$ bzw. $\quad 0{,}25x=\pi \quad$ bzw. $\quad 0{,}25x=2\pi.$

$x_1=\frac{0}{0{,}25}=0 \qquad x_2=\frac{\pi}{0{,}25}=4\pi \qquad x_3=\frac{2\pi}{0{,}25}=8\pi$

y-Werte:

$y_1=4-4\cdot\cos(0{,}25\cdot 0)=4-4\cdot 1=0 \quad\Rightarrow\quad EP_1(0|0)$

$y_2=4-4\cdot\cos(0{,}25\cdot 4\pi)=4-4\cdot\cos(\pi)=4-4\cdot(-1)=8 \quad\Rightarrow\quad EP_2(4\pi|8)$

$y_3=4-4\cdot\cos(0{,}25\cdot 8\pi)=4-4\cdot\cos(2\pi)=4-4\cdot 0=0 \quad\Rightarrow\quad EP_3(8\pi|0)$

Hoch- oder Tiefpunkt ?!?

$f''(x) = \cos(0{,}25x)\cdot 0{,}25 = 0{,}25\cdot\cos(0{,}25x)$

$f''(0) = 0{,}25\cdot\cos(0{,}25\cdot 0) = 0{,}25\cdot 1 > 0 \quad\Rightarrow\quad T_1(0|0)$

$f''(4\pi)=0{,}25\cdot\cos(0{,}25\cdot 4\pi)=0{,}25\cdot\cos(\pi)=0{,}25\cdot(-1)<0 \quad\Rightarrow\quad H(4\pi|8)$

$f''(8\pi)=0{,}25\cdot\cos(0{,}25\cdot 8\pi)=0{,}25\cdot\cos(2\pi)=0{,}25\cdot(-1)<0 \quad\Rightarrow\quad T_2(8\pi|0)$

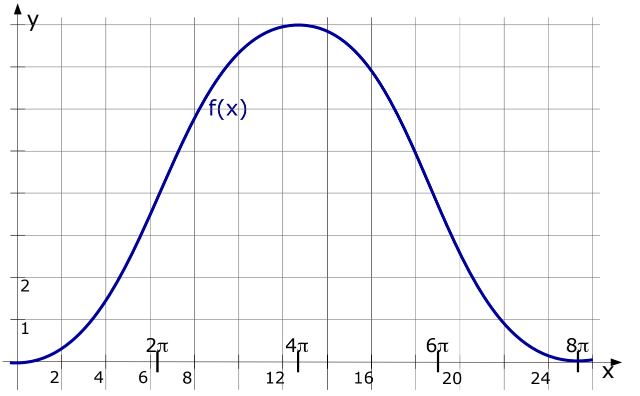
Nun brauchen wir wieder *alle* Extrempunkte, also zählen wir wieder zu allen x-Werten beliebig oft die Periode dazu.

⇒ **T_1(0+n·8π|0)**

⇒ **T_2(8π+n·8π|0)**

⇒ **H(4π+n·8π|8)**

Mit den bisher errechneten Ergebnissen kann man f(x) skizzieren →



b) Eine der Flächen sieht man in der Skizze.

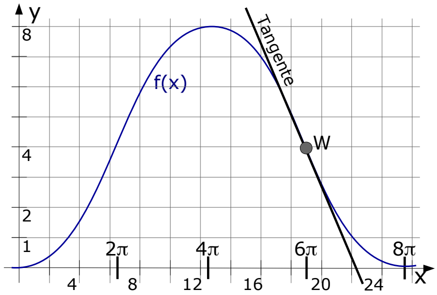
© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

Da wir die Nullstellen bereits berechnet haben, können wir gleich loslegen.

$$A = \int_0^{8\pi} 4-4\cdot\cos(0{,}25x)dx = \left[4x-\frac{4}{0{,}25}\cdot\sin(0{,}25x)\right]_0^{8\pi} = \left[4x-16\cdot\sin(0{,}25x)\right]_0^{8\pi} =$$

$$= [4\cdot 8\pi-16\cdot\sin(0{,}25\cdot 8\pi)]-[4\cdot 0-16\cdot\sin(0{,}25\cdot 0)] =$$

$$= [32\pi-16\cdot\sin(2\pi)]-[0-16\cdot 0] = [32\pi-16\cdot 0]-[0] = 32\pi.$$



c) Um welchen Wendepunkt geht's überhaupt? Der Wendepunkt hat positive Abzisse [=positiver x-Wert], hat eine *möglichst kleine positive* Abzisse und negative Steigung. Es geht also um den Wendepunkt, der sich zwischen Hoch- und Tiefpunkt befindet. Der Mittelpunkt zwischen $H(4\pi|8)$ und $T(8\pi|0)$ hat die Koordinaten: $W(6\pi|4)$

Nun berechnen wir die Tangente in W.

Die Tangente ist eine Gerade und hat damit die Form: $y=m\cdot x+b$

„m" ist die Steigung und wird über die Ableitunge berechnet:

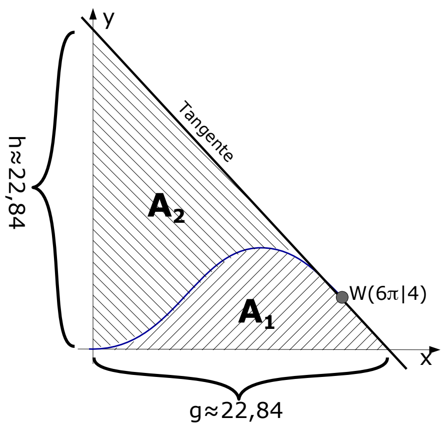
$$m=f'(6\pi)=\sin(0{,}25\cdot 6\pi)=\sin(1{,}5\pi)=-1$$

Für „x" und „y" kann man die Koordinaten von W einsetzen.

$y = m\cdot x+b$

$4 = -1\cdot 6\pi+b \quad\Rightarrow\quad b=4+6\pi$

$\Rightarrow \quad$ Tangente: $y=-1\cdot x+4+6\pi$



Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse:

$y=0 \;\Rightarrow\; 0=-1\cdot x+4+6\pi \;\Rightarrow\; x=4+6\pi\approx 22{,}84$

Schnittpunkt der Tangente mit der y-Achse:

$x=0 \;\Rightarrow\; y=-1\cdot 0+4+6\pi=4+6\pi\approx 22{,}84$

Die Fläche, die die Tangente mit den Koordinatenachsen bildet: [in der Skizze: A_1+A_2]

$A_{gesamt} = ½\cdot g\cdot h = ½\cdot 22{,}84\cdot 22{,}84 = 260{,}83$

Nun bestimmen wir die Fläche zwischen der Tangente, f(x) und der y-Achse [das ist A_2]

$$A_2 = \int_0^{6\pi} y_{Tan}-f(x)dx =$$

$$= \int_0^{6\pi} (-1x+\cancel{4}+6\pi)-(\cancel{4}+4\cdot\cos(0{,}25x))dx = \int_0^{6\pi} -x+6\pi-4\cdot\cos(0{,}25x)dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cdot x^2+6\pi\cdot x-4\cdot\sin(0{,}25x)\cdot\frac{1}{0{,}25}\right]_0^{6\pi} = \left[-\frac{1}{2}\cdot x^2+6\pi\cdot x-16\cdot\sin(0{,}25x)\right]_0^{6\pi} =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cdot(6\pi)^2+6\pi\cdot(6\pi)-16\cdot\sin(0{,}25\cdot 6\pi)\right]-\left[-\frac{1}{2}\cdot 0^2+6\pi\cdot 0-16\cdot\sin(0{,}25\cdot 0)\right] =$$

$$= [-18\pi^2+36\pi^2-16\cdot\sin(1{,}5\pi)] - [0+0-16\cdot\sin(0)] =$$

$$= [18\pi^2-16\cdot(-1)] - [0] = 18\pi^2+16 \approx 193{,}64$$

$A_1 = A_{gesamt} - A_2 = 260{,}83-193{,}64 = 67{,}19$

f(x) teilt die Dreiecksfläche im Verhältnis $\frac{193{,}64}{67{,}19} = 2{,}88 : 1$

Lösung von Aufgabe 31 (von Seite 22):

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

a) Ableitungen:

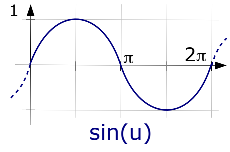
$$f(x) = 6\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{6}x\right)$$

$$f'(x) = 6\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{6}x\right)\cdot\tfrac{\pi}{6} = \pi\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{6}x\right)$$

$$f''(x) = \pi\cdot\left(-\sin\left(\tfrac{\pi}{6}x\right)\right)\cdot\tfrac{\pi}{6} = -\tfrac{\pi^2}{6}\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{6}x\right)$$

$$f'''(x) = -\tfrac{\pi^2}{6}\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{6}x\right)\cdot\tfrac{\pi}{6} = -\tfrac{\pi^3}{36}\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{6}x\right)$$

Nullstellen:



$f(x) = 0$

$6\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{6}x\right) = 0$ $\quad |:6$

$\sin\left(\tfrac{\pi}{6}x\right) = 0$ $\quad$ Substitution $\tfrac{\pi}{6}x = u$

$\sin(u) = 0$

Aus Skizze liest man ab: $u_1=0$, $u_2=\pi$, $u_3=2\pi$ ...

$u_1=0 \Rightarrow \tfrac{\pi}{6}x = 0 \Rightarrow x_1=0 \Rightarrow$ **N₁(0|0)**

$u_2=\pi \Rightarrow \tfrac{\pi}{6}x = \pi \Rightarrow x_2=6 \Rightarrow$ **N₂(6|0)**

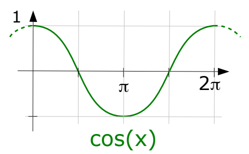
$u_3=2\pi \Rightarrow \tfrac{\pi}{6}x = 2\pi \Rightarrow x_3=12 \Rightarrow$ **N₃(12|0)**

Hoch- und Tiefpunkte:

$f'(x) = 0$

$\pi\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{6}x\right) = 0$ $\quad |:\pi$

$\cos\left(\tfrac{\pi}{6}x\right) = 0$ $\quad$ Substitution $\tfrac{\pi}{6}x = u$



$\cos(u) = 0$

Aus Skizze liest man ab: $u_1=\tfrac{1}{2}\pi$, $u_2=\tfrac{3}{2}\pi$ ...

$u_1=\tfrac{1}{2}\pi \Rightarrow \tfrac{\pi}{6}x_1 = \tfrac{1}{2}\pi \Rightarrow \pi\cdot x_1=3\cdot\pi \Rightarrow x_1=3$

$u_2=\tfrac{3}{2}\pi \Rightarrow \tfrac{\pi}{6}x_2 = \tfrac{3}{2}\pi \Rightarrow \pi\cdot x_2=9\cdot\pi \Rightarrow x_2=9$

y-Werte:

$y_1 = f(x_1) = f(3) = 6\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\cdot 3\right) = 6\cdot\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = 6\cdot 1 = 6$

$y_2 = f(x_2) = f(9) = 6\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\cdot 9\right) = 6\cdot\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = 6\cdot(-1) = -6$

Hoch- oder Tiefpunkt?

$f''(x_1) = f''(3) = -\tfrac{\pi^2}{6}\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\cdot 3\right) = -\tfrac{\pi^2}{6}\cdot\sin\left(\tfrac{1}{2}\cdot\pi\right) = -\tfrac{\pi^2}{6}\cdot 1 < 0 \Rightarrow$ **HP(3|6)**

$f''(x_2) = f''(9) = -\tfrac{\pi^2}{6}\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\cdot 9\right) = -\tfrac{\pi^2}{6}\cdot\sin\left(\tfrac{3}{2}\cdot\pi\right) = -\tfrac{\pi^2}{6}\cdot(-1) > 0 \Rightarrow$ **TP(9|-6)**

Wendepunkte:

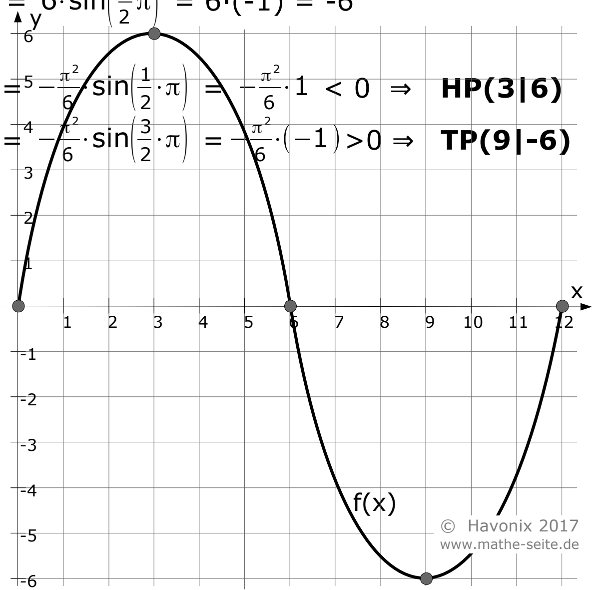
$f''(x) = 0$

$-\tfrac{\pi^2}{6}\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\cdot x\right) = 0$ $\quad |:\left(-\tfrac{\pi^2}{6}\right)$

$\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\cdot x\right) = 0$

Ab dieser Stelle ist alles [zufällig] genau gleich wie die Berechnung der Nullstellen. Daher sind die Wendepunkte gleichzeitig auch die Nullstellen.

$\Rightarrow$ **W₁(0|0)**



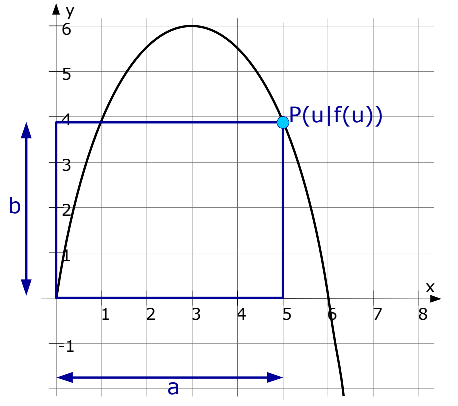
h[x]= matheseite
Die gute Seite an Mathe
© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

$\Rightarrow$ **$W_2(6|0)$**
$\Rightarrow$ **$W_3(12|0)$**

Maximaler Rechteckumfang:

Der Punkt $P(u|f(u))$ liegt auf $f(x)$ und hat einen x-Wert, der zwischen 3 und 6 liegt.

Das Rechteck sieht also aus wie in der nächsten Skizze.



Den Umfang eines Rechtecks berechnet man über U=2a+2b.
Die Seite „a“ ist eine waagerechte Strecke, man berechnet die Länge also über die Differenz der x-Werte:

$a = x_{rechts} - x_{links} = u - 0 = u$

Die Seite „b“ ist eine senkrechte Strecke, man berechnet die Länge also über die Differenz der y-Werte:

$b = y_{oben} - y_{unten} = f(u) - 0 = f(u)$

Den Umfang berechnet man über:

$$U = 2\cdot a + 2\cdot b = 2\cdot u + 2\cdot f(u) =$$
$$= 2\cdot u + 2\cdot 6\cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}u\right) = 2u + 12\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}u\right)$$

Den *maximalen* Umfang berechnet man, indem man U'(u) Null setzt.

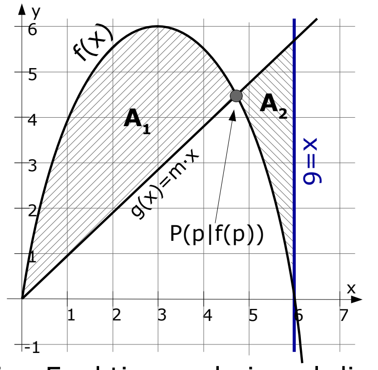
$$U'(u) = 2 + 12\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}u\right)\cdot\frac{\pi}{6} = 2 + 2\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}u\right)$$

$$U'(u) = 0$$
$$2 + 2\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}u\right) = 0 \qquad |-2$$
$$2\pi\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}u\right) = -2 \qquad |:(2\pi)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}u\right) \approx -0{,}318 \qquad \text{Substitution } \frac{\pi}{6}u = z$$
$$\cos(z) = -0{,}318$$
$$z = \arccos(-0{,}318) \approx 1{,}894$$

Resubstitution: $z=1{,}894 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{6}u = 1{,}894 \quad \Rightarrow \quad u = 3{,}618$

u liegt wie gefordert zwischen 0 und 6, alles ist in Ordnung. **u≈3,618**

b) Eine Ursprungsgerade geht durch den Ursprung und hat die Form: g(x)=m·x
Zusammen mit der senkrechten Gerade x=6 ergeben sich zwei Flächen, wie in der rechten Skizze dargestellt.
Nun soll man den Punkt P(p|f(p)) derart bestimmen, dass beide Flächen gleich sind. Man soll das bestimmen, ohne den Punkt P zu bestimmen.
Der Trick ist folgender:
Wir berechnen das Integral zwischen f(x) und y=m·x in den Grenzen von x=0 bis x=6.



Da beide Flächen gleich groß sind, aber einmal die eine Funktion und einmal die andere Funktion oberhalb liegt, hebt sich das Integral von x=0 bis x=6 komplett auf, das Gesamtintegral muss Null ergeben.

Also: $A_1 + A_2 = \int_0^6 \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_0^6 \left(6\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) - m\cdot x\right)dx =$

$$= \left[6\cdot\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{6}}\right) - \frac{m}{2}\cdot x^2\right]_0^6 = \left[-6\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)\cdot\frac{6}{\pi} - \frac{m}{2}\cdot x^2\right]_0^6 = \left[-\frac{36}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) - \frac{m}{2}\cdot x^2\right]_0^6$$

$$= \left[-\frac{36}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right) - \frac{m}{2}\cdot 6^2\right] - \left[-\frac{36}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 0\right) - \frac{m}{2}\cdot 0^2\right] =$$

$$= \left[-\frac{36}{\pi}\cdot\cos(\pi) - 18m\right] - \left[-\frac{36}{\pi}\cdot\cos(0) - 0\right] = \left[\frac{36}{\pi} - 18m\right] - \left[-\frac{36}{\pi}\right] = \frac{72}{\pi} - 18m$$

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

Da nun das Integral Null geben soll, gilt: $\frac{72}{\pi} - 18m = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m = \frac{4}{\pi} \approx 1{,}273}$

c) Die maximale Tageslänge von 17,26 Stunden hat man am 1.Juli. [siehe Skizze auf nächster Seite]. Da man in Monaten rechnet und der 1.Juli der Beginn des zweiten Halbjahres ist sind genau 6 Monate seit Jahresbeginn vergangen. Der 1. Juli entspricht also t=6. Der Hochpunkt unserer Funktion liegt also bei H(6|17,26). Dementsprechend liegt der Tiefpunkt bei T(12|8,15).

Nun können wir „a" und „b" bestimmen.

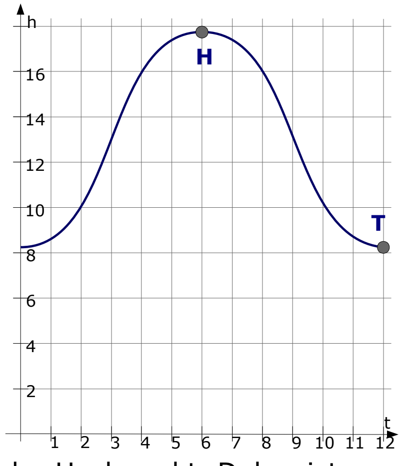
Betrachten wir $T(t) = a + b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$

„a" ist die Verschiebung in y-Richtung.
Bei einer Sinus- oder Kosinus-Funktion ist das die Mitte zwischen Hoch- und Tiefpunkt.

$\Rightarrow \ a = \frac{17{,}26+8{,}15}{2} \approx 12{,}7$

„b" ist die Amplitude. Die Differenz zwischen den y-Werten von Hoch- und Tiefpunkt ist die doppelte Amplitude.

$\Rightarrow \ b = \frac{17{,}26-8{,}15}{2} \approx 4{,}56$



Die Funktion lautet nun aber nicht

$T(t) = 12{,}7 + 4{,}56 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)$,

denn auf der y-Achse liegt ein Tiefpunkt und nicht der Hochpunkt. Daher ist es also vom Typ her keine „+cos()"–Funktion, sondern eine „–cos()"–Funktion.

$\Rightarrow \quad \mathbf{T(t) = 12{,}7 - 4{,}56 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)}$

Der 15.April entspricht dem Zeitpunkt t=3,5.
(Es sind seit Jahresbeginn dreieinhalb Monate vergangen.)
Die Tageslänge am 15.April in Großkarlbach ist also $T(3{,}5) = 12{,}7 - 4{,}56 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 3{,}5\right) \approx$ **13,9 Stunden**.

Lösung von Aufgabe 32 (von Seite 22):

a) Ableitungen:

$f_t(x) = 3t \cdot \cos(0{,}5x) + t^2$
$f_t'(x) = 3t \cdot (-\sin(0{,}5x) \cdot 0{,}5) = -1{,}5t \cdot \sin(0{,}5x)$
$f_t''(x) = -1{,}5t \cdot \cos(0{,}5x) \cdot 0{,}5 = -0{,}75t \cdot \cos(0{,}5x)$
$f_t'''(x) = -0{,}75t \cdot (-\sin(0{,}5x) \cdot 0{,}5) = 0{,}375t \cdot \sin(0{,}5x)$

Geniale Idee:

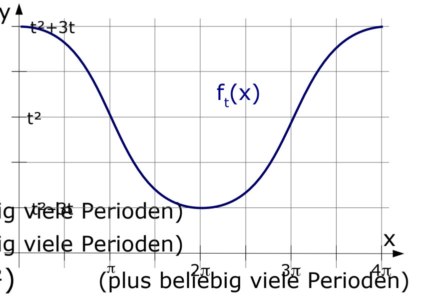
Man kann die Hoch- und Tiefpunkte von $f_t(x)$ auf dem klassischen Weg bestimmen, so mit Ableitung Null setzen usw. Das machen wir aber nur, wenn wir nichts zu tun haben.
Besser ist es, die Ideen von Kap. A.42.08 zu verwenden.
In der Funktion $f_t(x) = 3t \cdot \cos(0{,}5x) + t^2$ ist „t^2" die Mittellinie.
„3t" ist die Amplitude. $f_t(x)$ reicht also hoch bis „t^2+3t" und runter bis „t^2-3t".

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de
h[x]= matheseite
Die gute Seite an Mathe

Damit kennen wir also die y-Werte der Hoch- und Tiefpunkte ☺.

Die Periode der Funktion ist $p=\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{0{,}5}=4\pi$.

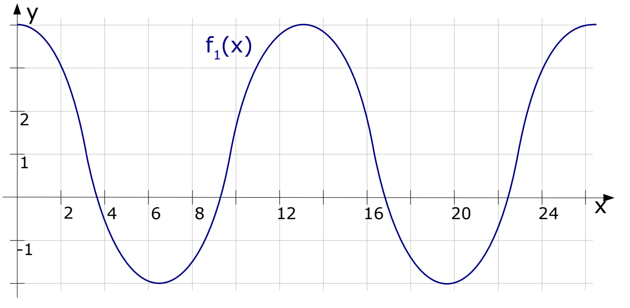
$f_t(x)$ ist nicht links- oder rechtsverschoben.
Damit sieht $f_t(x)$ in etwa so aus: →



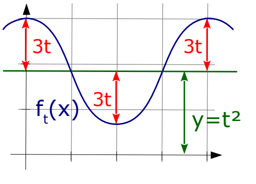
Der Hochpunkt ist bei $H(0|t^2+3t)$ (plus beliebig viele Perioden)
Der Tiefpunkt ist bei $T(2\pi|t^2-3t)$ (plus beliebig viele Perioden)
Die Wendepunkte sind bei $W_1(\pi|t^2)$ und $W_2(3\pi|t^2)$ (plus beliebig viele Perioden)
Alle Extrem- und Wendepunkte im Bereich [0;8] sind also bei:

$H_1(0|t^2+3t)$, $H_2(4\pi|t^2+3t)$, $H_3(8\pi|t^2+3t)$
$T_1(2\pi|t^2-3t)$, $T_2(6\pi|t^2-3t)$,
$W_1(\pi|t^2)$, $W_2(3\pi|t^2)$, $W_3(5\pi|t^2)$, $W_4(7\pi|t^2)$.

Die Skizze von $f_1(x)$ ist nun einfach. Einfach t=1 einsetzen.

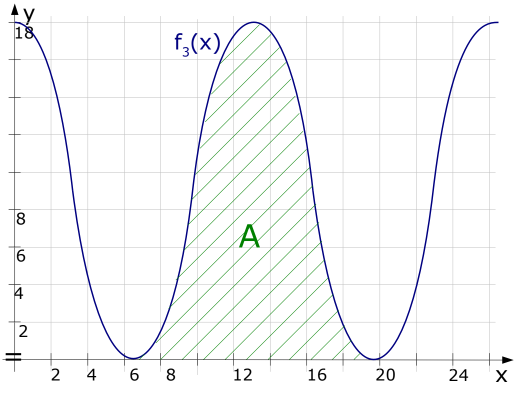


b) Der Standardweg, Nullstellen einer Funktion zu berechnen, wäre sie Null zu setzen und dann nach „x" aufzulösen. Dummerweise ist diese Funktionsgleichung derart hässlich, dass man kaum eine Chance hat, die Frage nach dem „t" gut zu beantworten.
Wir werden daher einen kleinen Trick anwenden:
Die Mittellinie [Verschiebung in y-Richtung] von $f_t(x)$ ist „t²"
Die Amplitude von $f_t(x)$ ist „3t".
$f_t(x)$ hat Nullstellen, wenn der tiefste Punkt der Funktion mindestens bis zur x-Achse herunterreicht.
Und dieses ist der Fall, wenn die Amplitude „3t" größer als die Mittellinie „t²" ist.



$f_t(x)$ hat demzufolge Nullstellen, wenn gilt: $3t \geqslant t^2$ | : t
$\Rightarrow \quad 3 \geqslant t$ bzw. $t \leqslant 3$.
Da laut Aufgabenstellung t>0, lautet die Antwort:
$f_t(x)$ besitzt Nullstellen, wenn: **$0<t\leqslant 3$.**

c) $f_3(x) = \ldots = 9\cos(0{,}5x)+9$
So wie die Skizze aussieht, sind die Tiefpunkte gleichzeitig die Nullstellen.
Am Ende von Teilaufgabe a) haben wir die Tiefpunkte bestimmt:
$T_1(2\pi|t^2-3t)$, $T_2(6\pi|t^2-3t)$.
Für t=3 ergibt sich:
$T_1(2\pi|0)$, $T_2(6\pi|0)$.
Da die y-Werte Null sind, sind die Tiefpunkte die Integralgrenzen.



$$A = \int_{2\pi}^{6\pi} f_3(x)dx = \int_{2\pi}^{6\pi} 9\cdot\cos(0{,}5x)+9\,dx =$$

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de

$$= \left[\frac{9}{0{,}5}\cdot\sin(0{,}5x)+9x\right]_{2\pi}^{6\pi} = \left[18\cdot\sin(0{,}5x)+9x\right]_{2\pi}^{6\pi} =$$

$$= [18\cdot\sin(0{,}5\cdot6\pi)+9\cdot6\pi] - [18\cdot\sin(0{,}5\cdot2\pi)+9\cdot2\pi] =$$

$$= [18\cdot\sin(3\pi)+54\pi] - [18\cdot\sin(\pi)+18\pi] =$$

$$= [18\cdot0+54\pi] - [18\cdot0+18\pi] = [54\pi]-[18\pi] = 36\pi \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A = 36\pi}$$

© Havonix 2017
www.mathe-seite.de