Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter **www.mathe-laden.de** bestellen (falls Sie das möchten).
Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht aus dem Internet herunter geladen werden können.
Dazu gehören:
Inhaltsverzeichnis, **Stichwortverzeichnis**, und viele **Aufgaben zum Selberrechnen**.

Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.
Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

Sie können diese Datei gerne beliebig für den eigenen Gebrauch verwenden.
Nicht gestattet sind Änderungen sowie kommerzielle Nutzung.

A.28 Umkehrfunktionen

Was sind Umkehrfunktionen ?!?
Eine normale Funktion macht Folgendes:
Man gibt einen x-Wert vor, z.B. x=3, setzt diesen in die Funktion ein und erhält einen y-Wert.

Nun könnte es ja durchaus sein, dass man nicht den x-Wert gegeben hat und den y-Wert sucht, sondern den y-Wert gegeben hat und den x-Wert sucht.
Um diesen x-Wert zu berechnen, müsste man natürlich nach „x" auflösen, was im Prinzip schon der Berechnung der Umkehrfunktion entspricht.

Eine Umkehrfunktion erhält man, indem man die Funktion nach „x" auflöst und somit „x" in Abhängigkeit von „y" erhält.

Wenn man also eine Funktion nach „x" auflöst und somit „x" in Abhängigkeit von „y" erhält, ist dieses die Umkehrfunktion.
Man bezeichnet die Umkehrfunktion von f(x) entweder mit $\bar{f}(x)$ oder mit $f^{-1}(x)$. [1]

Eigenschaften der Umkehrfunktionen

1. Wenn man die Umkehrfunktion nochmal umkehrt, erhält man wieder die Ursprungsfunktion

$$\bar{\bar{f}}(x) = f(x)$$

2. „x"- und „y"-Werte vertauschen sich, wenn man eine Funktion umkehrt. Liegt also z.Aufg. der Punkt P(2|5) auf f(x), wird auf $\bar{f}(x)$ der Punkt $\bar{P}$(5|2) liegen!

$$\bar{x}=y \quad \text{bzw.} \quad \bar{y}=x$$

3. Die Definitionsmenge der Funktion wird die Wertemenge der Umkehrfunktion, die Wertemenge der Funktion wird die Definitionsmenge der Umkehrfunktion.

$$D_f=W_{\bar{f}} \quad \text{bzw.} \quad W_f=D_{\bar{f}}$$

4. **Graphisch:** Die Umkehrfunktion erhält man, indem man die Funktion an der ersten Winkelhalbierenden spiegelt!
[die erste Winkelhalbierende ist y=x, läuft von links unten nach rechts oben]

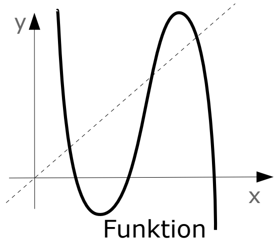
5. Die **Steigung** der Umkehrfunktion ist der Kehrwert der Steigung der Funktion.
[$\bar{x}$ ist natürlich ein x-Wert der Umkehrfunktion ⇒ $\bar{x}=y=f(x)$]

$$\bar{f}'(\bar{x}) = \frac{1}{f'(x)}$$

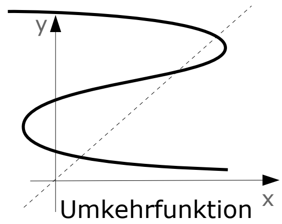
1 $f^{-1}(x)$ hat nichts mit $\frac{1}{f(x)}$ zu tun !!!

Umkehrbarkeit

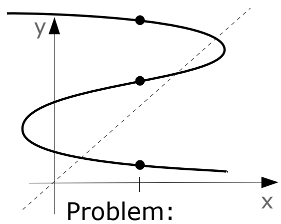
Eine häufige Frage im Zusammenhang mit Umkehrfunktionen ist die der Umkehrbarkeit. Umkehrbarkeit ist dabei die Frage, *ob* man die Funktion überhaupt umkehren kann, ob man sie im *ganzen Definitionsbereich* umkehren kann oder ob man die Funktion in mehrere Bereiche aufteilen muss und für jeden Bereich eine eigene Umkehrfunktion erstellen muss.
Stellen Sie sich vor, Sie müssten folgende Funktion umkehren:



Die Umkehrfunktion erhält man (zeichnerisch), in dem man die Funktion an der ersten Winkelhalbierenden [hier gestrichelt dargestellt], spiegelt. Man würde also die rechte Zeichnung erhalten:

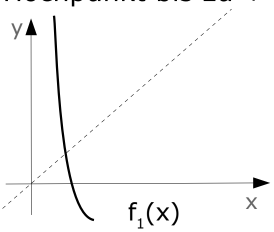


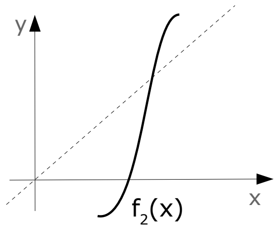
Nun gibt es an dieser Umkehrfunktion ein gewaltiges Problem:
Es gibt x-Werte die gleich drei y-Werte liefern. Das kann natürlich nicht sein. [Man kann ja nicht *eine* Zahl in f(x) ein und drei Ergebnisse *gleichzeitig* erhalten]. Dieses Problem kann man nur beheben, wenn man f(x) nicht im gesamten Bereich umkehrt, sondern in mehrere Teilbereiche aufteilt.

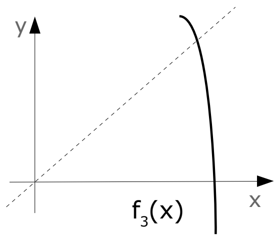


Problem:
Ein x-Wert hat drei y-Werte

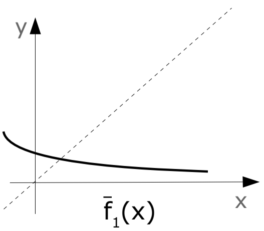
Als Grenzen von so einem Bereich wählt man immer Extrempunkte [oder Definitionslücken / senkrechte Asymptoten / .. falls vorhanden]. In unserer Fall würden wir die Funktion also in drei Teile aufspalten: Der erste Bereich geht von -∞ bis zum Tiefpunkt. Der zweite Bereich beginnt beim Tiefpunkt und endet beim Hochpunkt, der dritte Bereich geht vom Hochpunkt bis zu +∞.

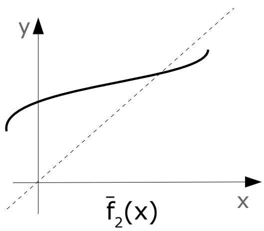


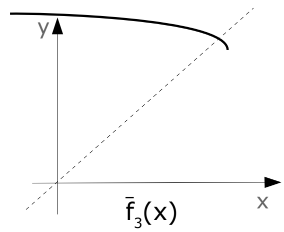




Nun kann man zu jedem der drei Bereiche eine Umkehrfunktion angeben







Wenn also die Frage nach einer Umkehrfunktion oder Umkehrbarkeit gestellt wird:

→ Rechnet man zuerst die Extrempunkte aus [falls man das nicht bereits getan hat].

→ Falls es keine Extrempunkte gibt (also $f'(x)=0$ keine Lösung liefert), ist die Funktion im ganzen Definitionsbereich umkehrbar. Damit nennt sich die **Funktion umkehrbar**.

→ Falls es Extrempunkt gibt, muss man die Funktion in mehrere Bereiche aufteilen, die Funktion nennt sich **nicht umkehrbar**, allerdings ist die Funktion in den jeweiligen Bereichen umkehrbar.

Offensichtlich ist die Umkehrbarkeit einer Funktion eng mit der Frage der **Monotonie** verknüpft.
Wenn eine Funktion monoton ist, ist sie auch umkehrbar. Ist die Funktion nicht monoton, dann kann man sie nur in den Teilbereichen umkehren, in denen sie monoton ist.

A.28.01 Bestimmung diverser Umkehrfunktionen (∰)

Aufg.1 [siehe →Aufg.4, →Aufg.8]

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von $f(x) = \frac{1}{3}x^3+4$.

Aufg.2 [siehe →Aufg.6, →Aufg.9]

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von $f(x) = \frac{x+2}{2x-4}$.

Aufg.3 [siehe →Aufg.7, Aufg.10]

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von $f(x) = x^2+6x-7$.

Lösung von Aufg.1:
Um die Umkehrfunktion zu erhalten, werden wir nach „x“ auflösen, [statt „f(x)“ schreiben wir „y“, das ist kürzer] und tun so, als ob „y“ ein stinknormaler Parameter wäre.

$$y = \frac{1}{3}x^3+4 \qquad | -4$$
$$y-4 = \frac{1}{3}x^3 \qquad | \cdot 3$$
$$3y-12 = x^3 \qquad | \sqrt[3]{\ }$$
$$x = \sqrt[3]{3y-12}$$

Die Umkehrfunktion lautet also: $\bar{f}(x) = \sqrt[3]{3x-12}$

Die ganz korrekte Schreibweise wäre eigentlich: $\bar{f}(\bar{x}) = \sqrt[3]{3\bar{x}-12}$, denn $y=\bar{x}$.
Das schreibt aber kein Mensch so.

Lösung von Aufg.2:
Wir schreiben wieder „y" statt „f(x)".

$$y = \frac{x+2}{2x-4}$$

Nun vertauschen wir die Variablen. [Sie müssen sich vor Augen halten, dass wir am Schluss nach dem „y" der Umkehrfunktion auflösen wollen, also nach „$\overline{y}$".] $x \to \overline{y} \quad y \to \overline{x}$

$\overline{x} = \frac{\overline{y}+2}{2\overline{y}-4}$	$\mid \cdot (2\overline{y}-4)$
$\overline{x} \cdot (2\overline{y}-4) = \overline{y}+2$	Klammer auflösen
$2\overline{x} \cdot \overline{y} - 4\overline{x} = \overline{y}+2$	alles mit „$\overline{x}$" nach links, alles andere nach rechts
$2\overline{x} \cdot \overline{y} - \overline{y} = 4\overline{x}+2$	„$\overline{y}$" ausklammern
$\overline{y} \cdot (2\overline{x}-1) = 4\overline{x}+2$	durch „2x−1" teilen
$\overline{y} = \frac{4\overline{x}+2}{2\overline{x}-1}$	

Im Endergebnis schreibt man die Striche über „x" und „y" eher nicht hin.

Die Umkehrfunktion lautet also: $f^{-1}(x) = \frac{4x+2}{2x-1}$

Lösung von Aufg.3:

$y = x^2+6x-7$ Variablentausch: $x \to \overline{y} \quad y \to \overline{x}$

$\overline{x} = \overline{y}^2+6\overline{y}-7$ Um nach $\overline{y}$ aufzulösen, macht man sich klar, dass man eine quadratische Gleichung hat und braucht die p-q- oder a-b-c-Formel. Also alles auf eine Seite bringen, „$\overline{x}$" wie einen Parameter behandeln.

$$0 = \overline{y}^2+6\overline{y}-7-\overline{x}$$

p-q-Formel

$$\overline{y}^2+6\overline{y}-7-\overline{x}=0$$

p=6; q=$-7-\overline{x}$

$$\overline{y}_{1,2} = -3 \pm \sqrt{(-3)^2-(-7-\overline{x})}$$
$$= -3 \pm \sqrt{9+7+\overline{x}} =$$
$$= -3 \pm \sqrt{16+\overline{x}}$$

a-b-c-Formel

$$\overline{y}^2+6\overline{y}-7-\overline{x}=0$$

a=1; b=6; c=$-7-\overline{x}$

$$\overline{y}_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{(-6)^2-4 \cdot 1 \cdot (-7-\overline{x})}}{2 \cdot 1}$$
$$= \frac{-6 \pm \sqrt{36+28+4\overline{x}}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{64+4\overline{x}}}{2} =$$

[unter der Wurzel „4" ausklammern]

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{4 \cdot (16+\overline{x})}}{2} =$$

[teilweise Wurzel ziehen]

$$= \frac{-6 \pm 2\sqrt{16+\overline{x}}}{2} =$$

[oben „2" ausklammern, mit unten kürzen]

$$= \frac{\cancel{2}(-3 \pm \sqrt{16+\overline{x}})}{\cancel{2}} = -3 \pm \sqrt{16+\overline{x}}$$

Wir haben eben *zwei* Umkehrfunktionen erhalten!

$\overline{y}_1 = -3+\sqrt{16+\overline{x}}$ und $\overline{y}_2 = -3-\sqrt{16+\overline{x}}$

[Das liegt daran, dass die Ausgangsfunktion $f(x)=x^2+6x-7$ *nicht* monoton war.]

A.28.02 Zeichnung (Spiegelung an y=x) (∯)

Wir hatten es eingangs bereits erwähnt:
Man erhält das Schaubild einer Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$, in dem man das Schaubild der Funktion f(x) an der ersten Winkelhalbierenden [y=x] spiegelt.
Hilfreich ist jedoch auch, sich vor Augen zu halten, dass bei der Umkehrfunktion x- und y-Werte vertauscht werden.
Man könnte also eine Wertetabelle von f(x) machen, x- und y-Werte vertauschen und hätte bereits eine Wertetabelle der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$!

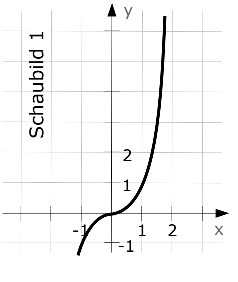
Aufg.4 [siehe →Aufg.1, →Aufg.8]
Fertigen Sie eine Skizze der Umkehrfunktion von $f(x) = \frac{1}{3}x^3+6$.

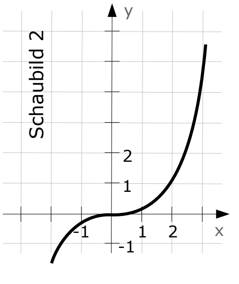
Aufg.5
Fertigen Sie eine Skizze der Umkehrfunktion von $f(x)=0{,}5x^3+x$

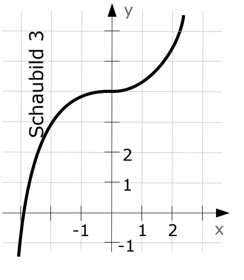
Aufg.6 [siehe →Aufg.2, →Aufg.9]
Zeichnen Sie das Schaubild der Umkehrfunktion von $f(x) = \frac{x+2}{2x-4}$.

Aufg.7 [siehe →Aufg.3, Aufg.10]
Skizzieren Sie die Umkehrfunktion von $f(x) = x^2+6x-7$.

Lösung von Aufg.4:
Es ist hilfreich, wenn man das Aussehen von ein paar Funktionen im Kopf hat.
→ Wir überlegen zuerst, wie die Standardfunktion $y=x^3$ aussieht [Schaubild 1].
→ Wir stauchen diesen Funktion in y-Richtung mit dem Streckfaktor „$^1/_6$“ und erhalten damit die Funktion $y={}^1/_6\cdot x^3$ [Schaubild 2].
→ Zum Schluss verschieben wir die Funktion um „4“ nach oben und erhalten: $f(x)={}^1/_6\cdot x^3+4$ [Schaubild 3].



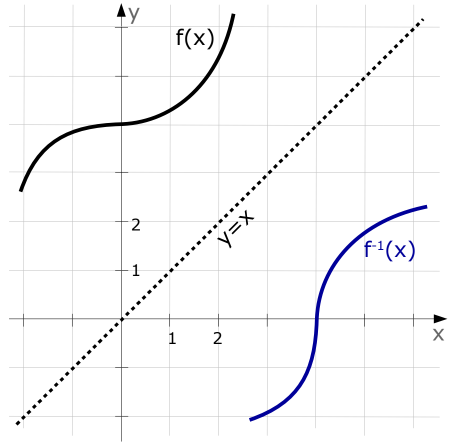




Nun wollen wir das Schaubild der Umkehrfunktion. Dafür spiegeln wir das Schaubild der Funktion f(x) an der ersten Winkelhalbierenden y=x.

[Bemerkung: Man spiegelt am einfachsten, in dem man einzelne Punkte spiegelt. Der Wendepunkt von f(x) in W(0|4) wird zum Wendepunkt von $f^{-1}(x)$ mit W(4|0). Der Kurvenpunkt (2|5,3) wird zu (5,3|2) und so weiter …]

Das erhaltene Schaubild gehört zur Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.



Lösung von Aufg.5:

Es ist ziemlich mühselig f(x) zu zeichnen. Es geht zwar, aber das wollen wir nicht. Wir fertigen eine Wertetabelle. [Die x-Werte sind beliebig. Im Zweifelsfall $-3 \leqslant x \leqslant 3$]

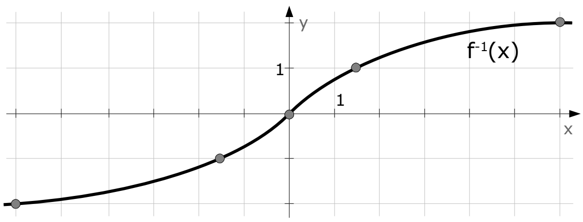
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-16,5	-6	-1,5	0	1,5	6	16,5

Wenn nun die Umkehrfunktion gezeichnet werden soll, vertauschen wir x- und y-Werte und erhalten eine neue Wertetabelle.

x	-16,5	-6	-1,5	0	1,5	6	16,5
$f^{-1}(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Die Punkte dieser neuen Wertetabelle tragen wir in ein Koordinatensystem ein und können die Umkehrfunktion skizzieren.

[Vermutlich ist das die einfachste Methode.]



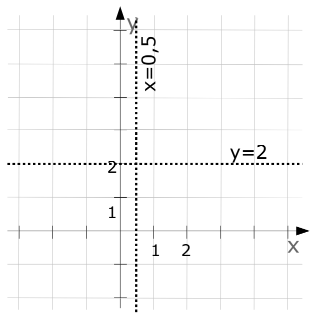
Lösung von Aufg.6:

f(x) hat eine senkrechte Asymptote bei x=2.

[Nenner Null setzen: $2x-4=0 \Rightarrow x=2$]

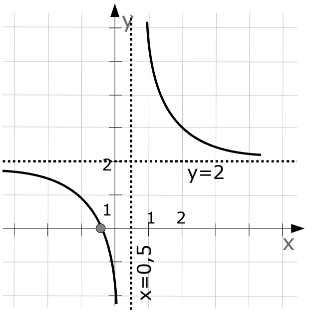
Desweiteren hat f(x) eine waagerechte Asymptote bei y=½ [die Hochzahlen oben und unten sind gleich, daher betrachtet man die Zahlen vor den höchsten Potenzen.]

Da bei f(x) und $f^{-1}(x)$ x- und y-Werte vertauscht sind, hat die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ eine waagerechte Asymptote bei y=2 und eine senkrechte bei x=½. Wenn wir jetzt noch ein paar Punkte von $f^{-1}(x)$ haben, können das Schaubild zeichnen.

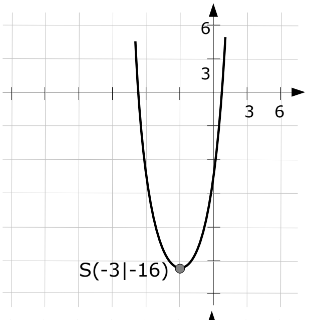


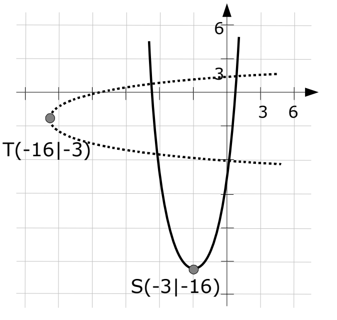
Wir wählen einen beliebigen x-Wert z.B. x=0 und setzen ihn in f(x) ein $\Rightarrow$ $y=f(0)=\frac{0+2}{2\cdot 0-4}=-0{,}5$.

Zum Punkt (0|-0,5) von f(x) gehört natürlich der Punkt (-0,5|0) von $f^{-1}(x)$. Damit kann man $f^{-1}(x)$ einzeichnen.
Man kann natürlich auch noch mehr Punkte bestimmen und einzeichnen, wenn man das möchte.



Lösung von Aufg.7:
Betrachten wir das Schaubild der Funktion $f(x)=x^2+6x-7$.
Es handelt sich um eine quadratische Parabel mit dem Scheitelpunkt in S(-3|-16). [$f'(x)=0 \Rightarrow 2x+6=0 \Rightarrow x=-3$. x-Wert in f(x) einsetzen $\Rightarrow$ $y=f(-3)=...=-16$]
Sie sieht also in etwa so aus, wie in der rechten Skizze.
Die Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.
Den Scheitelpunkt der Umkehrfunktion erhält man durch Vertauschen der Koordinaten $\Rightarrow$ T(-16|-3).
Die Umkehrfunktion ist eine liegende Parabel.
Das Problem:
Eigentlich ist die Umkehrfunktion keine *Funktion*, da einzelne x-Werte mehrere y-Werte hat. Es sind eigentlich *zwei* Funktionen.
Die Hälfte oberhalb T ist eine der Funktionen, die Hälfte unterhalb T ist die andere Funktion. Wir sind in Aufg.3 näher darauf eingegangen, also ersparen wir uns an dieser Stelle weitere Theorien.





A.28.03 Definitions- und Wertemenge (∯)

Bei Funktion und Umkehrfunktion sind die Definitions- und Wertemenge vertauscht. Das liegt daran, dass die Definitionsmenge sich auf die x-Werte und die Wertemenge sich auf die y-Werte bezieht [welche ja bei f und f^{-1} vertauscht sind].

$$D_f = W_{f^{-1}}$$
$$W_f = D_{f^{-1}}$$

Im Prinzip war das eigentlich auch schon die gesamte Theorie.
Sicherheitshalber aber an dieser Stelle noch eine kleine Wiederholung:
→ Die Definitionsmenge muss man beachten bei: 1.Brüchen, 2.Wurzeln, 3.Logarithmen. Bei Brüchen darf der Nenner nicht Null werden, bei Wurzeln darf unter der Wurzel(1) nichts Negatives stehen, bei Logarithmen darf in der Klammer nicht Null und nichts Negatives stehen.
→ Die Wertemenge kann man nicht so einfach ablesen. Man braucht eine Skizze der Funktion und schaut welche y-Werte angenommen werden können.

1 Tatsächlich geht es nur um gerade Wurzeln, also um Quadratwurzel, 4.Wurzel, 6.Wurzel, …

Aufg.8 [siehe →Aufg.1, →Aufg.4]

Bestimmen Sie die Definitions- und Wertemenge der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3+4$ sowie der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

Aufg.9 [siehe →Aufg.2, →Aufg.6]

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von $f(x) = \frac{x+2}{2x-4}$.

Aufg.10 [siehe →Aufg.3, Aufg.7]

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von $f(x) = x^2+6x-7$.

Lösung von Aufg.8:

Die Definitionsmenge von f(x) ist einfach: es gibt keinen Nenner, keine Wurzel und keinen Logarithmus. Also gibt es keine Einschränkung ⇒ $\mathbf{D}_f=\mathbb{R}$.

Die Wertemenge kann man sich bei dieser Funktion recht einfach überlegen:

Was für y-Werte kann man erhalten? Setzt man für x „-∞" ein, erhält man für y den Wert „-∞". Setzt man für x „+∞" ein, erhält man für y den Wert „+∞". Mathematisch korrekt heißt das so:

$x\to-\infty \;\Rightarrow\; f(x)\to-\infty$ bzw. $x\to+\infty \;\Rightarrow\; f(x)\to+\infty$

Also werden alle y-Werte von „−∞" bis „+∞" angenommen ⇒ $\mathbf{W}_f=\mathbb{R}$.

Da bei f(x) und $f^{-1}(x)$ Definitions- und Wertemenge vertauscht sind, gilt:

⇒ $\mathbf{D}_f=\mathbf{W}_{f^{-1}}=\mathbb{R}$ $\mathbf{W}_f=\mathbf{D}_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

Lösung von Aufg.9:

Die Definitionsmenge einer gebrochen-rationalen Funktion erhält man, indem man den Nenner Null setzt. $2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$ ⇒ $\mathbf{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{2\}$

Dadurch haben wir auch die Wertemenge der Umkehrfunktion ⇒ $\mathbf{W}_{f^{-1}}=\mathbb{R}\backslash\{2\}$

Nun brauchen wir die Wertemenge der Funktion. Man kann diese auch als Definitionsmenge der Umkehrfunktion bestimmen, dafür müsste man aber die Umkehrfunktion bestimmen und den Nenner davon Null setzen.

Die Wertemenge der Funktion f(x): Prinzipiell kann die Funktion jeden y-Wert annehmen. Aber – wenn $x\to\pm\infty$, läuft f(x) gegen y=½. Und damit kann der y-Wert y=½ gar nicht angenommen werden. ⇒ $\mathbf{W}_f=\mathbb{R}\backslash\{½\}$

Jetzt haben wir auch die Definitionsmenge von $f^{-1}(x)$ ⇒ $\mathbf{W}_{f^{-1}}=\mathbb{R}\backslash\{½\}$

Lösung von Aufg.10:

Die Definitionsmenge von f(x) ist $\mathbb{R}$

[keine Wurzel, kein Bruch, kein Logarithmus drin]. ⇒ $\mathbf{D}_f=\mathbf{W}_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

Für die Wertemenge, überlegt man sich, dass f(x) eine nach oben geöffnete Parabel ist. Der höchste y-Wert, der angenommen wird, ist „+∞".

Der kleinste y-Wert ist der y-Wert des Tiefpunktes. Also berechnen wir diesen.

$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 2x+6=0 \;\Rightarrow ... \Rightarrow\; x=-3$

$y=f(-3)=(-3)^2+6\cdot(-3)-7=-16 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{W_f=D_{f^{-1}}}=[-16;\infty)$

Bemerkung: Wenn Sie sich die Umkehrfunktion von f(x) anschauen [→ Aufg.3]: $f^{-1}(x)=-3-\sqrt{16+x}$, so können Sie auch hier sehen, dass die Definitionsmenge von f^{-1} das Intervall [-16;∞) ist, denn der Term unter der Wurzel ist erst für x⩾-16 positiv, die Wurzel ist also nur für dieses Intervall definiert. Man hätte W_f also auch über diesen Weg bestimmen können.

A.28.04 Ableitung der Umkehrfunktion (∮)

Man kann die Ableitung einer Umkehrfunktion selbstverständlich ganz „normal“ berechnen: Man bestimmt die Umkehrfunktion, leitet diese ab und falls nötig setzt man noch einen x-Wert ein, um die Steigung zu bestimmen.
Das kann echt jeder. Wir interessieren uns daher für eine viel tollere Methode.

Aus der Idee, dass die Umkehrfunktion durch Spiegelung an y=x entsteht [grafisch gesehen], kann man sich folgende Theorie herleiten: →

$$\boxed{\bar{f}'(\bar{x}) = \frac{1}{f'(x)}}$$

Schauen wir mal, wie man diese Theorie anwendet:

Aufg.11

Bestimmen Sie für x>0 und y>0 den Wert der ersten Ableitung der Umkehrfunktion von $f(x)=\sqrt{x^2-7}$ an der Stelle x=3.

Lösung von Aufg.11:

Zuerst machen Sie sich bitte klar, dass da zwar steht „x=3“, aber eigentlich ist gemeint „$\bar{x}=3$“ [Lesen Sie die Aufgabenstellung nochmal genau durch. Das Wort „Stelle“ bezieht sich grammatikalisch auf „Umkehrfunktion“. Insofern geht es um den x-Wert der Umkehrfunktion. D.h. $\bar{x}=f(x)=y=3$.]

Weg 1 [ohne die tolle Formel]: Zuerst bestimmen wir die Umkehrfunktion von f(x)

$y = \sqrt{x^2-7} \qquad |\,(\;)^2$

$y^2 = x^2-7 \qquad |+7$

$y^2+7 = x^2 \qquad |\,\sqrt{\;}$

$\pm\sqrt{y^2+7} = x \qquad$ Variablentausch: $x\to\bar{y}$, $y\to\bar{x}$.

$\bar{y} = \sqrt{\bar{x}^2+7} \qquad$ [Die „Minus“-Lösung brauchen wir nicht, da x>0 und y>0]

Nun schreiben wir $\bar{y}$ um und leiten $\bar{y}$ dann ab. $\bar{y}=\sqrt{\bar{x}^2+7}=(\bar{x}^2+7)^{0,5}$

$$\bar{y}' = 0{,}5\cdot(\bar{x}^2+7)^{-0,5}\cdot 2\bar{x} = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2+7}}$$

$\bar{x}=3$ einsetzen:

$$\bar{y}'(3) = \frac{3}{\sqrt{3^2+7}} = \frac{3}{4}$$

Weg 2 [mit toller Formel]:

Wir suchen $\bar{f}'(3)$. Wir berechnen dieses mit der Formel $\bar{f}'(3) = \frac{1}{f'(x)}$.

Da wir $\bar{x}=3$ kennen [$\bar{x}=y$], brauchen wir noch x.

$\bar{x}=y=3 \;\Rightarrow\; 3 = \sqrt{x^2-7} \qquad |\,(\;)^2$

$3^2 = x^2-7 \qquad |+7$

$16 = x^2 \quad | \sqrt{}$

$\pm 4 = x$ [Die „Minus"-Lösung brauchen wir nicht, da x>0 und y>0]

x=4 setzen wir in f'(x) ein, also berechnen wir f'(x).

$$f(x) = \sqrt{x^2-7} = (x^2-7)^{0,5}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0{,}5\cdot(x^2-7)^{-0,5}\cdot 2x = \frac{3}{\sqrt{3^2+7}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-7}}$$

$$f'(4) = \frac{4}{\sqrt{4^2-7}} = \frac{4}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$$

Nun kann man die Ableitung der Umkehrfunktion bestimmen:

$$\bar{f}'(3) = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

Aufg.12

Der Punkt A(2|f(2)) liegt auf $f(x)=x^3+2x-4$.
Bei Umkehrung von f(x) wird im Umkehrpunkt von A eine Tangente an die Umkehrfunktion gelegt. Bestimmen Sie die Steigung dieser Tangente.

Lösung von Aufg.12:
Die Umkehrfunktion f(x) werden Sie kaum bestimmen können, denn $y=x^3+2x-4$ kann man nicht nach „x" auflösen. Also brauchen wir Plan B.
Kümmern wir uns um den Punkt A.
Der y-Wert von A beträgt: $y=f(2)=2^3+2\cdot 2-4=8 \quad \Rightarrow \quad A(2|8)$
Der Umkehrpunkt von A liegt auf $f^{-1}(x)$ und hat die Koordinaten $\bar{A}(8|2)$.
Wir brauchen also die Steigung der Tangente an $f^{-1}(x)$ im Punkt $\bar{A}(8|2)$,
also $f^{-1}(8)$. Das berechnen wir mit der Formel: $\bar{f}'(8) = \frac{1}{f'(2)}$

$f'(x)=3x^2+2 \quad \Rightarrow \quad f'(2)=3\cdot 2^2+2=14 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}'(8) = \frac{1}{14}$

Die gesuchte Steigung der Tangente beträgt: $\mathbf{m_{Tan}={}^1/_{14}}$.

A.28.05 Rotation um die y-Achse (∯)

Rotationsvolumen um die y-Achse:

$$V_y = \pi\cdot\int_{f(a)}^{f(b)} \left(\bar{f}(x)\right)^2 dx$$

Rotiert eine Funktion um die y-Achse, braucht man die Umkehrfunktion. Die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ [bzw. $\bar{f}(x)$] wird quadriert und dann integriert.
Die Grenzen des Integrals sind die y-Werte.

Der Ablauf der Berechnung ist ähnlich wie bei der Rotation einer Funktion um die y-Achse, bloß dass die Berechnung mit der Umkehrfunktion erfolgt.

Aufg.13

Die Funktion f(x)=x²+2 rotiert im x-Intervall [1;3] um die y-Achse.
Dabei entsteht ein Rotationskörper. Bestimmen Sie dessen Volumen.

Lösung von Aufg.13:

Das Rotationsvolumen um die y-Achse bestimmt man mit $V_y = \pi\int_{f(a)}^{f(b)} \left(\bar{f}(x)\right)^2 dx$.

Wir brauchen die Umkehrfunktion:

$$y=x^2+2 \quad | -2$$
$$y-2=x^2$$
$$\pm\sqrt{y-2}=x$$

Uns interessieren nur positive x-Werte [das Intervall, um welches es geht, beginnt bei x=+1 und endet bei x=+3], also brauchen wir die „Minus-Wurzel" nicht.

$$\Rightarrow \sqrt{y-2}=x \quad \Rightarrow \text{Variablentausch} \Rightarrow \quad \bar{y}=\sqrt{\bar{x}-2} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x)=\sqrt{x-2}$$

$$\Rightarrow V_y=\pi\int_{f(1)}^{f(3)} \left(\sqrt{x-2}\right)^2 dx = \pi\int_{f(1)}^{f(3)} x-2\,dx$$

$$f(1)=1^2+2=3 \qquad f(3)=3^2+2=11$$

$$\Rightarrow V_y=\pi\int_{3}^{11} x-2\,dx = \pi\left[\tfrac{1}{2}x^2-2x\right]_3^{11} = \pi\left[\tfrac{1}{2}\cdot 11^2-2\cdot 11\right]-\pi\left[\tfrac{1}{2}\cdot 3^2-2\cdot 3\right] =$$
$$= \pi\left[\frac{77}{2}\right]-\pi\left[-\frac{3}{2}\right] = \frac{80}{2}\pi = 40\pi \approx 125{,}6$$

Das Rotationsvolumen um die y-Achse beträgt **40π LE³**.

Aufg.14

$f(x)=\sqrt{x+4}-2$, die y-Achse und die Gerade y=2 bilden eine Fläche A. Bei Rotation von A um die y-Achse entsteht ein Körper mit dem Volumen V. Bestimmen Sie V.

Lösung von Aufg.14:

Wir bestimmen zuerst die Umkehrfunktion, denn die brauchen wir sowieso.

$$y=\sqrt{x+4}-2 \quad |+2$$
$$y+2=\sqrt{x+4} \quad |\ (\ )^2$$
$$(y+2)^2 = x+4 \quad |-4$$
$$(y+2)^2-4 = x \quad \text{ausrechnen}$$
$$y^2+4y+4-4 = x$$
$$y^2+4y = x \quad \text{Variablentausch} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x)=x^2+4x$$

Das Volumen des Rotationskörpers berechnet man über: $V_y = \pi\cdot\int_{f(a)}^{f(b)} \left(f^{-1}(x)\right)^2 dx$

Nun brauchen wir noch die Grenzen. f(a) und f(b) sind y-Grenzen. Die obere Grenze ist y=2, die untere Grenze ist der y-Wert des Schnittpunkts von f(x) und der y-Achse [die Fläche wird ja von f(x) und der y-Achse und y=2 gebildet]. Da bei der y-Achse x=0 gilt, ist die untere Grenze: $f(0)=\sqrt{0+4}-2=2-2=0$

$$\Rightarrow V_y = \pi\cdot\int_0^2 \left(f^{-1}(x)\right)^2 dx = \pi\cdot\int_0^2 \left(x^2+4x\right)^2 dx = \pi\cdot\int_0^2 x^4+8x^3+16x^2\,dx =$$
$$= \pi\cdot\left[\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{8}{4}x^4+\tfrac{16}{3}x^3\right]_0^2 = \pi\cdot\left[\tfrac{1}{5}2^5+2\cdot 2^4+\tfrac{16}{3}\cdot 2^3\right] - \pi\cdot\left[\tfrac{1}{5}\cdot 0^5+2\cdot 0^4+\tfrac{16}{3}\cdot 0^3\right] =$$
$$= \pi\cdot\left[\frac{32}{5}+32+\frac{128}{3}\right] - \pi\cdot\left[0+0+0\right] = \frac{1216}{15}\cdot\pi \approx 254{,}68$$

A.28.06 grauenvolle Beispielaufgaben (∯)

Aufg.15

Es sei: $f(x) = \frac{2e^{-0,5x}-1}{e^{-0,5x}+2}$

a) Zeigen Sie, dass f(x) umkehrbar ist!

b) Geben Sie eine Umkehrfunktion von f(x) an, bestimmen Sie Definitions- und Wertemenge der Umkehrfunktion!

Lösung auf Seite 13.

Aufg.16

Es sei: $f(x) = 0,5x^2-2x-2,5$

a) Überprüfen Sie f(x) auf Umkehrbarkeit !

b) Geben Sie eine Umkehrfunktion von f(x) an, bestimmen Sie Definitions- und Wertemenge der Umkehrfunktion!

Lösung auf Seite 14.

Aufg.17

Es sei: $f(x) = x^3+2x+1$

a) Überprüfen Sie f(x) auf Umkehrbarkeit !

b) An $\bar{f}(x)$ wird im Punkt $\bar{P}(4|\bar{f}(4))$ eine Tangente angelegt.
Bestimmen Sie die Gleichung dieser Tangente.

Lösung auf Seite 15.

Aufg.18 [recht hässliches Beispiel]

Zeigen Sie, dass das Integral der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, durch F(x)=arctan(x) angegeben wird.

Lösung auf Seite 16.

Lösung von Aufg.15 (von Seite 13):

a) Wir zeigen die Umkehrbarkeit, indem wir zeigen, dass es keine Extrempunkte gibt, dass also f(x) monoton ist.
Keine Extrempunkte gibt es, wenn $f'(x)=0$ keine Lösung hat.

$$f'(x)=\frac{2\cdot e^{-0,5x}\cdot(-0,5)\cdot(e^{-0,5x}+2)-(2\cdot e^{-0,5x}-1)\cdot e^{-0,5x}\cdot(-0,5)}{(e^{-0,5x}+2)^2}=\frac{-e^{-x}-2e^{-0,5x}+e^{-x}-0,5e^{-0,5x}}{(e^{-0,5x}+2)^2}=\frac{-2,5e^{-0,5x}}{(e^{-0,5x}+2)^2}$$

$f'(x) = 0$

$\frac{-2,5e^{-0,5x}}{(e^{-0,5x}+2)^2} = 0 \qquad | \cdot (e^{-0,5x}+2)^2$

$-2,5e^{-0,5x} = 0 \qquad \Rightarrow$ keine Lösung

Damit hat die Funktion keine Extrempunkte, sie ist also immer monoton. [Um es genau zu nehmen, ist die Funktion monoton fallend, denn im Nenner ist ein Quadrat, welches ja immer positiv ist, im Zähler ist ein e-Term (auch immer positiv) und die „-2,5“, die alles negativ

macht. Damit ist die gesamte Ableitung immer negativ, die Funktion immer fallend].
Und damit immer umkehrbar.

b) Umkehrfunktion:

$y = \frac{2e^{-0,5x}-1}{e^{-0,5x}+2}$ | $\cdot\ (e^{-0,5x}+2)$

$y\cdot(e^{-0,5x}+2) = 2e^{-0,5x}-1$

$y\cdot e^{-0,5x}+2y = 2e^{-0,5x}-1$ | $-2e^{-0,5x}-2y$

$y\cdot e^{-0,5x}-2e^{-0,5x} = -2y-1$ ausklammern

$e^{-0,5x}\cdot(y-2) = -2y-1$ | $:(y-2)$

$e^{-0,5x} = \frac{-2y-1}{y-2}$ | ln( )

$-0,5x = \ln\left(\frac{-2y-1}{y-2}\right)$ | $\cdot\ (-2)$

$x = -2\cdot\ln\left(\frac{-2y-1}{y-2}\right)$

Die Umkehrfunktion lautet: $\bar{f}(x) = -2\cdot\ln\left(\frac{-2y-1}{y-2}\right)$

Zur Definitions- und Wertemenge:

Wir werden **D** und **W** von f(x) bestimmen, denn es gilt ja: $\mathbf{D_f}=\mathbf{W_{\bar{f}}}$ und $\mathbf{W_f}=\mathbf{D_{\bar{f}}}$.
Die Definitionsmenge von f(x) ist $\mathbb{R}$, denn der Nenner der Funktion kann nie Null werden. [e-Term + 2 ist immer positiv] $\Rightarrow$ $\mathbf{D_f}=\mathbf{W_{\bar{f}}}=\mathbb{R}$.

Für die Wertemenge von f(x) braucht man eine kurze Kurvendiskussion von f(x) bzw. `ne Ahnung wie f(x) in etwa verläuft. [Falls Sie einen grafischen Taschenrechner verwenden dürfen, kriegen Sie natürlich sehr schnell eine Ahnung, wie f(x) verläuft.] Wir wissen aus Teilaufgabe a), dass f(x) [streng?] monoton fallend ist. Wir müssen also nur noch wissen, wohin f(x) am linken und rechten Rand hingeht.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{-0,5x}-1}{e^{-0,5x}+2} = [e^{-\infty}\to 0] = \frac{2\cdot 0-1}{0+2} = -0,5$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2e^{-0,5x}-1}{e^{-0,5x}+2} = [\text{Trick: mit } e^{+0,5x} \text{ erweitern}] = \lim_{x\to-\infty} \frac{(2e^{-0,5x}-1)\cdot e^{0,5x}}{(e^{-0,5x}+2)\cdot e^{0,5x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2e^{0}-1\cdot e^{0,5x}}{e^{0}+2e^{0,5x}} = [e^{-\infty}\to 0] = \frac{2\cdot 1-1\cdot 0}{1+2\cdot 0} = \frac{2}{1} = 2$$

Wir wissen also, dass links (bei $x\to-\infty$) die y-Werte der Funktion gegen +2 gehen, am rechten Rand (bei $x\to+\infty$) gehen die y-Werte gegen -0,5.
Damit nimmt die Funktion y-Werte zwischen +2 und -0,5 an.
$\Rightarrow$ $\mathbf{W_f} = \mathbf{D_{\bar{f}}} = \{ x \mid -0,5<x<2 \}$

Lösung von Aufg.16 (von Seite 13):

a) Um zu schauen, wie's mit der Umkehrbarkeit aussieht, setzen wir f'(x)=0.

$f'(x) = 0$

$x-2 = 0 \quad\Rightarrow\quad x=2$

Bei x=2 ist die Ableitung Null [1], also gibt's an dieser Stelle ein Problem.

1 Da verläuft f(x) waagerecht, also verläuft $\bar{f}(x)$ da senkrecht [keine Funktion darf senkrecht verlaufen!].

f(x) ist also nicht umkehrbar, allerdings ist f(x) in den beiden Bereichen $I_1=]-\infty;2[$ und $I_2=]2;+\infty[$ umkehrbar. [Für jeden Bereich eine Umkehrfunktion]

b) Umkehrfunktion:

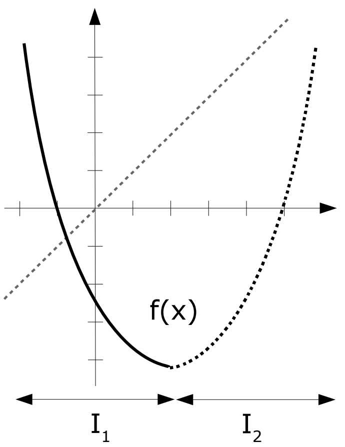
$y = 0{,}5x^2-2x-2{,}5 \qquad |-y \quad |\cdot 2$ nach „x" auflösen. [mit p-q-Formel oder a-b-c-Formel. „y" wird wie ein Parameter behandelt.]

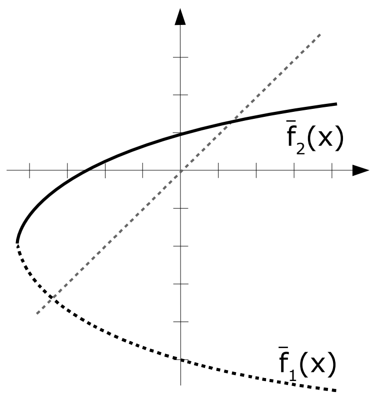
$x^2-4x-5-2y = 0$

$$x_{1,2} = 2\pm\sqrt{2^2-(-5-2y)} = 2\pm\sqrt{4+5+2y} = 2\pm\sqrt{9+2y}$$

Es gibt also für die beiden Intervalle $I_1=]-\infty;2[$ und $I_2=]2;+\infty[$ zwei Umkehrfunktionen: $\bar{f}_1(x) = 2-\sqrt{9+2x}$ und $\bar{f}_2(x) = 2+\sqrt{9+2x}$

Wir müssen jetzt noch \`rausfinden, welche Umkehrfunktion zu welchem Intervall gehört.
Das ist einfach: die x-Werte der Funktion entsprechen den y-Werten der Umkehrfunktion, also gehört zum Intervall I_1 [das die kleineren x-Werte hat] die Umkehrfunktion $\bar{f}_1$, die die kleineren y-Werte hat [wegen dem Minus vor der Wurzel].
Zum Intervall I_2, welches die größeren x-Werte hat, gehört die Funktion $\bar{f}_2$.





Wir wissen, dass $f(x)=0{,}5x^2-2x-2{,}5$ [in ihrer Gesamtheit] nicht umkehrbar ist.
Jedoch hat f(x) im Bereich $I_1=]-\infty;2[$ die Umkehrfunktion $\bar{f}_1(x) = 2-\sqrt{9+2x}$ und f(x) hat im Bereich $I_2=]2;+\infty[$ die Umkehrfunktion $\bar{f}_2(x) = 2+\sqrt{9+2x}$.

Zur Definitions- und Wertemenge der Umkehrfunktion:
Die Definitionsmenge der beiden Umkehrfunktionen ist einfach, denn es gibt eine Wurzel. Da alles unter der Wurzel immer positiv sein muss, gilt:

$$9+2x \geqslant 0 \;\Rightarrow\; x \geqslant -4{,}5 \qquad \Rightarrow \qquad D_{\bar{f}_1} = D_{\bar{f}_2} = \{x \mid x \geqslant -4{,}5\}$$

Die Wertemenge von $\bar{f}_1(x)$ ist das Intervall $I_3=]-\infty;2]$, denn die Funktion $\bar{f}_1(x)$ hat die Form „2 minus irgendetwas". Aus dem gleichen Grund hat $\bar{f}_2(x)$ das Intervall $I_4=[2;\infty[$ als Wertemenge. $\Rightarrow \quad W_{\bar{f}_1} = D_{f_1} = \{x \mid x<2\}$

$\Rightarrow \quad W_{\bar{f}_2} = D_{f_2} = \{x \mid x>2\}$

Lösung von Aufg.17 (von Seite 13):
a) Um zu schauen, wie's mit der Umkehrbarkeit aussieht, setzen wir wieder die

Ableitung Null.

$f'(x) = 0$

$3x^2+2=0 \;\Rightarrow\; 3x^2=-2 \;\Rightarrow\; x^2=-\frac{2}{3} \;\Rightarrow$ keine Lösung.

f(x) hat keine Punkte mit waagerechter Tangente, dadurch ist f(x) umkehrbar.

b) Umkehrfunktion:

$y = x^3+2x+1$

$x^3+2x+1-y = 0$

Gerne dürfen Sie probieren, diese Gleichung dritten Grades nach „x" aufzulösen. Falls jemand von Ihnen es schaffen sollte, wäre ich [und wahrscheinlich viele andere Mathematiker] sehr interessiert am Ergebnis.

Wir haben also das Problem, das es zwar eine Umkehrfunktion gibt [wie wir aus Teilaufgabe a) wissen], wir jedoch nicht in der Lage sind eine Gleichung dieser Funktion anzugeben. [Das ist nichts Ungewöhnliches]. Wir müssen uns also anders behelfen.

Wir können eine Tangente aufstellen, wenn wir die Steigung und einen Punkt [den Berührpunkt] der Tangente kennen.

Der Berührpunkt:

Der Berührpunkt [der Umkehrfunktion!!] lautet: $\bar{P}(4|\bar{f}(4))$

Da der x-Wert der Umkehrfunktion der y-Wert der Funktion ist, gilt: $y_f=x_{\bar{f}}=4$.

Den x-Wert der Funktion kennen wir nicht, da wir den y-Wert der Umkehrfunktion nicht kennen [und auch nicht berechnen können, da wir $\bar{f}(x)$ nicht haben].

In diesem Fall kann man den x-Wert jedoch „raten".

Wenn man eine Wertetabelle von f(x) erstellt, sieht man, dass bei x=1 der y-Wert y=4 rauskommt. $\Rightarrow$ $f(1)=4$

[x=1 ist der einzige x-Wert, der y=4 liefert. f(x) ist monoton, schließlich hat f(x) keine Extrema.]

$y_f = 4$

Die Berührpunkte von f(x) und $\bar{f}(x)$ lauten also: $P(1|4)$ und $\bar{P}(1|4)$.

Damit können wir endlich die Steigung der Umkehrfunktion berechnen.

$$\bar{f}'(\bar{x}) = \frac{1}{f'(x)} \quad\Rightarrow\quad \bar{f}'(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3\cdot 1^2+2} = \frac{1}{5}$$

Nun haben wir die Steigung und den Berührpunkt der Tangente an die Umkehrfunktion. Nun können wir die Tangente aufstellen. [Wir werden den Weg über die Punkte-Steigungs-Formel wählen. Natürlich kann man auch einen anderen Weg wählen, um die Tangente zu erstellen.]

$$m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{y-1}{x-4} \qquad | \cdot (x-4)$$

$$\frac{1}{5}\cdot(x-4) = y-1 \qquad | +1$$

$$\frac{1}{5}x+\frac{1}{5} = y$$ $\leftarrow$ Das ist die gesuchte Tangente an $\bar{f}(x)$!

Lösung von Aufg.18 (von Seite 13):

Zuerst hört sich diese Aufgabe sehr nach Integralrechnung an.

Das Problem besteht jedoch darin, dass es kaum eine halbwegs vernünftige Methode gibt, die Funktion f(x) zu integrieren.
Daher leiten wir F(x) ab und hoffen, dass da wiederum f(x) rauskommt.
Hier beginnt auch schon das nächste Problem: wie leitet man arctan(x) ab?!?
Jetzt kommt unsere Umkehrfunktion in Spiel!
Die Ableitung einer Funktion ist ja der Kehrwert von der Ableitung der Umkehrfunktion, es gilt also: $F'(x)=\frac{1}{\overline{F}'(\overline{x})}$.
Die Umkehrfunktion von F(x)=arctan(x) ist natürlich $\overline{F}(x)=\tan(x)$, besser eigentlich: $\overline{F}(\overline{x})=\tan(\overline{x})$, wobei $\overline{x}=y$, also $\overline{x}=F(x)$.

Als erste Nebenrechnung berechnen wir also zuerst die Ableitung von $\overline{F}(x)=\tan(x)$.
Um tan(x) abzuleiten, muss man tan(x) umschreiben zu: $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
[Wenn Sie Glück haben, dürfen Sie die Ableitung von tan(x) in der Formelsammlung nachschlagen]

$$\overline{F}(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\Rightarrow \overline{F}'(x) = \text{[Quotientenregel]} = \frac{\sin(x)\cdot\sin(x)-\cos(x)\cdot(-\cos(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)} =$$

$$= \text{[Bruch aufspalten]} = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}+\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2+1 = (\tan(x))^2+1$$

Wir wissen jetzt also: $\overline{F}'(x)=(\tan(x))^2+1$ bzw. $\overline{F}'(\overline{x})=(\tan(\overline{x}))^2+1$

Deswegen gilt also: $F'(x)=\frac{1}{\overline{F}'(\overline{x})}=\frac{1}{(\tan(\overline{x}))^2+1}$

Nun wissen wir ja, dass $\overline{x}=F(x)$, also $\overline{x}=\arctan(x)$, deswegen gilt:

$$F'(x)=\frac{1}{(\tan(\overline{x}))^2+1}=\frac{1}{(\tan(\arctan(x)))^2+1}=\frac{1}{(x)^2+1}$$

[tan(arctan(x)) hebt sich natürlich auf und wird zu „x"]

Damit haben wir also bewiesen, dass $F'(x)=\frac{1}{x^2+1}$ und damit:

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = F(x) = \arctan(x)$$