Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter **www.mathe-laden.de** bestellen (falls Sie das möchten).
Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht aus dem Internet herunter geladen werden können.
Dazu gehören:
Inhaltsverzeichnis, **Stichwortverzeichnis**, und viele **Aufgaben zum Selberrechnen**.

Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.
Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

A.14 Stammfunktionen

Stammfunktionen braucht man, um Flächen zwischen Funkionen zu berechnen. Im Gegensatz zu Ableitungen, wo man *jede* Funktion ableiten kann, kann man nicht jede Funktion integrieren [=„aufleiten"=„Stammfunktion bilden"].
Im Allgemeinen kann man **keine Produkte und keine Brüche integrieren**[1].

Stammfunktion bezeichnet man meist mit Großbuchstaben: F(x), G(x),..

A.14.01 Integrieren von ganzrationalen Funktionen (∰)

Die Vorgehensweise:
Die Hochzahl wird um eins erhöht, die *neue* Hochzahl kommt in den Nenner.
Die allgemeine Formel lautet:

$$\mathbf{f(x)= a\cdot x^n}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbf{F(x)= \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}}$$

Aufg.1

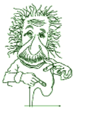
$f(x) = x^4+4x^3-7x^2+5x-2$

$F(x) = \frac{1}{5}x^5+\frac{4}{4}x^4-\frac{7}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-2x+c =$

$= \frac{1}{5}x^5+x^4-\frac{7}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-2x+c$

Die Integrationskonstante „c" steht für eine beliebige Zahl, die man hinter die Funktion F(x) dranhängen kann. [Macht man nämlich die Probe und leitet F(x) wieder ab, erhält man f(x), egal welche Zahl man für „c" gewählt hat.]
Meistens lässt man das „c" weg.

Die Integrationskonstante „c" sollte hinter jede Stammfunktion. Meist braucht man sie jedoch nicht und lässt sie weg.



Aufg.2

sei: $g(x) = \frac{1}{4}x^3+\frac{2}{7}x^2-6x-1$

$\Rightarrow \quad G(x) = \frac{1}{4\cdot 4}x^4+\frac{2}{7\cdot 3}x^3-\frac{6}{2}x^2-1\cdot x+c =$

$= \frac{1}{16}x^4+\frac{2}{21}x^3-3x^2-x+c$

Aufg.3

sei: $h(x) = x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 5x^2 +3x + 3$

$\Rightarrow \quad H(x) = \frac{1}{6}x^6+\frac{4}{5}x^5-\frac{2}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+c$

---

1 Produkte kann man nur mit der „Produktintegration" aufleiten. An vielen Schulen lernt man das aber nicht.
Zu den Brüchen: Ein paar Ausnahmen von Brüchen kann man aufleiten. →siehe hierzu Kap A.14.05 und A.14.06

A.14.02 einfache Wurzeln und Brüche (##)

Wie für die Ableitungen auch, kann man Wurzeln und Brüche zum Aufleiten ebenfalls häufig umschreiben. Bei Brüchen der Form $\frac{\text{Zahl}}{x^{\text{Zahl}}}$ bringt man den Nenner von unten hoch, in den Zähler, in dem man das Vorzeichen der Hochzahl ändert.
Wurzeln schreibt man um, in dem man aus der Hochzahl von „x" einen Bruch macht.

Aufg.4
Schreiben Sie folgende Funktionen um und bestimmen Sie die Stammfunktion.

$f(x)=\frac{5}{x^3}$ $\quad g(x)=\frac{2}{3x^6}$ $\quad h(x)=\frac{4}{5x^2}$ $\quad i(x)=\frac{12}{5x^{-3}}$

$j(x)=\sqrt{x}$ $\quad k(x)=4\sqrt{x}$ $\quad l(x)=\sqrt[3]{x}$ $\quad m(x)=\sqrt[5]{x^2}$

Aufg. 5
Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x)=3\sqrt{x}+4x$

Aufg. 6
Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x)=\frac{3}{x^3}+\frac{6}{5x^2}$

Aufg. 7
Bestimmen Sie die Stammfunktion von:

$$g(x) = 3x^4+2x^{2,5}-\sqrt{x}+\frac{5}{x^3}+4x^{-8}+7$$

Aufg. 8
Bestimmen Sie die Stammfunktion von:

$$h_t(x) = \frac{1}{2t^2}x^3+\frac{3t}{8}x^2-5tx-\sqrt{t^2+3}$$

Lösung von Aufg.4:

$f(x)=\frac{5}{x^3} \Rightarrow f(x)=5\cdot x^{-3} \Rightarrow F(x)=\frac{5}{-2}\cdot x^{-2}=\frac{-5}{2x^2}$

$g(x)=\frac{2}{3x^6} \Rightarrow g(x)=\frac{2}{3}\cdot x^{-6} \Rightarrow G(x)=\frac{2}{3\cdot(-5)}\cdot x^{-5}=\frac{-2}{15x^5}$

$h(x)=\frac{4}{5x^2} \Rightarrow h(x)=\frac{4}{5}\cdot x^{-2} \Rightarrow H(x)=\frac{4}{5\cdot(-1)}\cdot x^{-1}=\frac{-4}{5x}$

$i(x)=\frac{12}{5x^{-3}} \Rightarrow i(x)=\frac{12}{5}\cdot x^3 \Rightarrow I(x)=\frac{12}{5\cdot 4}\cdot x^4=\frac{3}{4}\cdot x^4$

$j(x)=\sqrt{x} \Rightarrow j(x)=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow J(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

$k(x)=4\sqrt{x} \Rightarrow k(x)=4x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow K(x)=4\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{3}\sqrt{x^3}$

$l(x)=\sqrt[3]{x} \Rightarrow l(x)=x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow L(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{x^4}$

$m(x)=\sqrt[5]{x^2} \Rightarrow m(x)=x^{\frac{2}{5}} \Rightarrow M(x)=\frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}}=\frac{5}{7}\cdot\sqrt[5]{x^7}$

Lösung von Aufg.5:

f(x) umschreiben: $f(x) = 3x^{0,5} + 4x$

f(x) integrieren: $F(x) = \frac{3}{1,5}\cdot x^{1,5}+\frac{4}{2}x^2 = 2x^{1,5}+2x^2$

Falls man möchte, kann man F(x) wieder umschreiben zu:

$F(x) = 2\sqrt{x^3}+2x^2$

Lösung von Aufg.6:

f(x) umschreiben: $f(x) = 3\cdot x^{-3} + \frac{6}{5}x^{-2}$

f(x) integrieren: $F(x) = \frac{3}{-2}\cdot x^{-2} + \frac{6}{5\cdot(-1)}x^{-1} = -\frac{3}{2}\cdot x^{-2} - \frac{6}{5}x^{-1}$

Falls man möchte, kann man F(x) wieder umschreiben: $F(x)=-\frac{3}{2x^2}-\frac{6}{5x}$

Lösung von Aufg.7

$g(x) = 3x^4+2x^{2,5}-\sqrt{x}+\frac{5}{x^3}+4x^{-8}+7$ erst g(x) umschreiben

$= 3x^4 + 2x^{2,5} - x^{0,5} + 5x^{-3} + 4x^{-8} + 7$

$\Rightarrow$ jetzt Stammfunktion bilden

$G(x) = \frac{3}{5}x^5+\frac{2}{3,5}x^{3,5}-\frac{1}{1,5}x^{1,5}+\frac{5}{-2}x^{-2}+\frac{4}{-7}x^{-7}+7x =$

$= \frac{3}{5}x^5 + \frac{4}{7}x^{3,5} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{5}{2x^2} - \frac{4}{7x^7} + 7x$

Lösung von Aufg.8

$h_t(x) = \frac{1}{2t^2}x^3+\frac{3t}{8}x^2-5tx-\sqrt{t^2+3}$

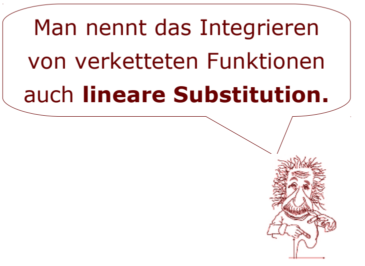
$\Rightarrow$

$H_t(x) = \frac{1}{2t^2\cdot 4}x^4+\frac{3t}{8\cdot 3}x^3-\frac{5t}{2}x^2-\sqrt{t^2+3}\cdot x =$

$= \frac{1}{8t^2}x^4 + \frac{t}{8}x^3-\frac{5t}{2}x^2-\sqrt{t^2+3}\cdot x$

In der Wurzel ist *kein* „x" drin. Somit gilt die Wurzel als Zahl und erhält beim Integrieren einfach ein „x" hinten dran.

A.14.03 Integrieren von einfachen verketteten Funktionen (∰)



Mal ganz blöd gesagt: Wie beim Ableiten auch, erkennt man eine verkettete Funktion an einer Klammer die eine Hochzahl hat, einem Sinus oder Kosinus vor der Klammer oder daran, dass „x“ in der Hochzahl einer e-Funktionen steht.
Zum Integrieren macht man eine Umkehrung der Kettenregel.

Beispiele für ***verkettete Funktionen***:
$f(x) = 3(2x-4)^6$, $g(x) = 3\cdot(5-4x)^{-3}$, $h(x) = \sqrt{2x+5t}$,
$j(x) = \sin(2-x)$, $k(x) = 6\cos(x^2+1)$, $l(x) = e^{tx-1}$

Beispiele für *keine* verkettete Funktionen (trotz Klammer):
$f(x) = x\cdot(2x-4)$, $g(x) = 3x\cdot(5-4x^2)$,
$h(x) = (x+1)\cdot\sin(x)$, $k(x) = (x^2-1)\cdot e^x$
[Es handelt sich hier hauptsächlich um Produkte.
Dafür braucht man die Klammern.]

Die wichtigste Idee bei der Bildung der Stammfunktion ist die, dass die innere Ableitung der Funktion [also die Ableitung der Klammer] in den Nenner muss.

Aufg. 9
$f(x)=3\cdot(2x-4)^6$ Bestimmen Sie die Stammfunktion F(x)!

Aufg.10
Bestimmen Sie die Stammfunktion von: $g(x) = 3\cdot(5-4x)^{-3}$

Aufg.11
Bestimme die Stammfunktion von: $h(x) = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{4}{3}x+\pi\right)^4$

Aufg.12
Bestimmen Sie die Stammfunktion von: $i(x)=3\sqrt{5x+2}$

Aufg.13
Bestimme die Stammfunktion von $f(x) = \frac{5}{(2x-3)^4}$!

Lösung von Aufg.9:

Zum „Aufleiten" [1] ignoriert man zuerst das Innere der Klammer, man denkt also nur an „$3\cdot(\ )^6$".
Die Stammfunktion von $3\cdot(\ )^6$ gibt $\frac{3}{7}\cdot(\ )^7$, das Innere der Klammer bleibt *immer* unverändert.
Das Einzige was noch fehlt, ist die innere Ableitung der Klammer „2x–4", die in den Nenner muss. Die Ableitung von „2x–4" ist „2".

> Bei Bildung einer Stammfunktion muss die **innere Ableitung** immer in den Nenner.

Die Stammfunktion von $3\cdot(2x-4)^6$ ist daher:

$$F(x) = \frac{3}{7}\cdot(2x-4)^7\cdot\frac{1}{\mathbf{2}}$$ (die „2" hinten im Nenner kommt von der inneren Ableitung.)

$$= \frac{3}{14}\cdot(2x-4)^7$$

Lösung von Aufg.10:

Die „Aufleitung" von $3\cdot(\ )^{-3}$ ist $\frac{3}{-2}\cdot(\ )^{-2}$, das Innere der Klammer bleibt dabei unverändert. Die innere Ableitung ist „-4", welche hinten in den Nenner geschrieben wird.

> Die innere Ableitung ist „-4", sie steht am Ende der Stammfunktion im Nenner.

$$\Rightarrow\ G(x) = \frac{3}{-2}\cdot(5-4x)^{-2}\cdot\frac{1}{\mathbf{-4}} = \frac{3}{8}\cdot(5-4x)^{-2} = \frac{3}{8(5-4x)^2}$$

Lösung von Aufg.11:

$$H(x) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{3}x+\pi\right)^5\cdot\frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{25}\cdot\left(\frac{4}{3}x+\pi\right)^5\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{50}\cdot\left(\frac{4}{3}x+\pi\right)^5$$

> Die innere Ableitung ist $\frac{4}{3}$, sie steht am Ende der Stammfunktion im Nenner.

Lösung von Aufg.12:

Erst muss i(x) umgeschrieben werden: $i(x)=3\cdot(5x+2)^{0,5}$

$$I(x) = \frac{3}{1,5}\cdot(5x+2)^{1,5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{5}\cdot(5x+2)^{1,5}$$

[Die innere Ableitung ist „5", sie steht am Ende der Stammfunktion im Nenner.]

Lösung von Aufg.13:

Zuerst muss f(x) umgeschrieben werden: $f(x) = 5\cdot(2x-3)^{-4}$.
Nun kann man die Stammfunktion bilden:

$$F(x) = \frac{5}{-3}\cdot(2x-3)^{-3}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{5}{6}\cdot(2x-3)^{-3} = -\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{(2x-3)^3} = \frac{-5}{6(2x-3)^3}$$

1 Ich möchte mich dafür entschuldigen, dass ich den Begriff „Aufleiten" verwende, obwohl es diesen Begriff eigentlich in Mathe gar nicht gibt. Er vereinfacht mir jedoch manche Formulierungen.

A.14.04 Stammfunktionen, die zum ln() führen (∯)

Brüche, die oben nur eine Zahl haben und unten nur ein „x" ohne Hochzahl, kann man nicht mit normalen Integrationsregeln aufleiten.
Nach der „normalen" Regel wäre:

$\int \frac{1}{x}dx = \int x^{-1}dx = \frac{1}{0}\cdot x^0$ ← das ist natürlich Quatsch.

Tatsächlich gilt für $\int \frac{1}{x}dx$ eine Sonderregel: →

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln(x)$$

Ein Bruch, in welchem sich ein oben nur eine Zahl befindet und unten ein „x" ohne Hochzahl, hat als Stammfunktion den Logarithmus (ln).

Aufg.14

Bestimmen Sie die Stammfunktionen der Funktionen:

$f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad g(x)=\frac{5}{x+20}$ $\quad h(x)=\frac{2}{x-3}$

$i(x)=\frac{5}{2x+1}$ $\quad j(x)=\frac{-6}{3x-10}$ $\quad k_t(x)=\frac{2t}{t^2-x}$

Lösung von Aufg.14

$F(x)=\ln(x)$ $\quad G(x)=5\cdot\ln(x+20)$ $\quad H(x)=2\cdot\ln(x-3)$

Steht beim „x" noch eine Zahl, wendet man die Kettenregel für die Integration an (man teilt also durch die innere Ableitung).
Man könnte sich folgende allgemeine Regel merken: →

$$\int \frac{a}{bx+c}dx = \frac{a}{b}\cdot\ln(bx+c)$$

$I(x)=\frac{5}{2}\cdot\ln(2x+1)$ $\quad J(x)=-\frac{6}{3}\cdot\ln(3x-10)=-2\cdot\ln(3x-10)$

$K_t(x)=\frac{2t}{-1}\cdot\ln(t^2-x)=-2t\cdot\ln(t^2-x)$

Ein Kosinus kommt zu einer Sinus-Party. Die Party geht zwar voll ab, aber überall sind nur Sinuse. In der Küche, in allen Zimmern, an der Musikanlage und an der Bar. Der Kosinus wird allmählich ganz geknickt, da er ganz allein ist und zieht sich traurig und einsam in eine Ecke zurück. Da kommt ein Sinus vorbei, legt ihm eine Hand auf die Schulter und sagt: „Hey, jetzt integrier dich doch mal!"

A.14.05 Produktintegration (∰)

Die Produktintegration heißt auch partielle Integration und man wendet sie an, wenn man ein Produkt integrieren muss. [Das sagt ja schon der Name aus.] Es gibt eine Formel dafür, die wendet man an und ist glücklich [oder auch nicht].

Ungewöhnlich an der Formel ist eventuell die Tatsache, dass man nicht in *einem* Schritt fertig ist. Die Formel wandelt im Wesentlichen die Funktion, die man integrieren will, in ein anderes Integral um. Wenn dieses neue Integral dann nicht einfacher ist, hat man Pech gehabt.
Also: die Funktion, die man integrieren will, soll aus zwei Faktoren bestehen.
Nennen wir den einen Faktor $u(x)$, den anderen nennen wir $v'(x)$. $\Rightarrow f(x) = u(x) \cdot v'(x)$
Den Faktor $u(x)$ muss man ableiten, also man sucht $u'(x)$, den Faktor $v'(x)$ muss man aufleiten, also man sucht $v(x)$.

Die Formel lautet:

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx$$

Aufg.15
Bestimme die Fläche, die $f(x)=3x\cdot e^{0,5x-1}$ mit der x-Achse und den Geraden $x=1$ und $x=2$ bildet !

Aufg.200.323.594.33 MF/7
Bestimme die Stammfunktion von $f(x)=2x\cdot\sqrt{x-1}$

Aufg.16
Sagä sovort de Stammfunkzion vun de $f(x) = x^2\cdot\ln(x)$

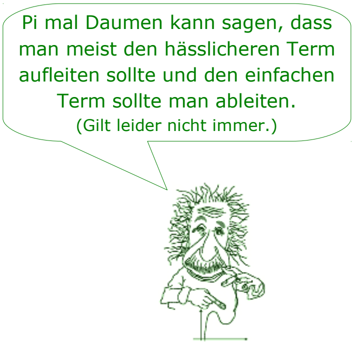
Aufg.17
Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x) = (x^2-3)\cdot e^{2x-2}$

Aufg.18
Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x) = 6\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$

Aufg.19
Bestimme das Integral $\int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}dx$! [vergleiche auch →Aufg.16 und →Aufg.27]

Aufg.20

Bestimme die Stammfunktion von $f(x) = \sin^2(x)$! [vergleiche auch Aufg.18]



Eine vielleicht Gans interessante Frage:
Welchen der beiden Terme sollte man bei einer Produktintegration als u wählen, welchen als v' ?
Leider kann man auch dieses nicht definitiv sagen.
Es gibt ein paar Funktionstypen bei denen man es sagen kann: z.Bsp:

(x-Term) · (e-Term) [vgl. Aufg.15]
(da sollte der x-Term immer u sein, der e-Term immer v')

(x-Term) · (ln-Term) [vgl. Aufg.16]
(da sollte der x-Term immer v' sein, der ln-Term immer u)

Lösung von Aufg.15:
Wir müssen ein Produkt integrieren, welches aus den beiden Faktoren „3x" und „$e^{0,5x-1}$" besteht.
Die Formel für die Produktintegration lautet:
$\int u\cdot v'dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$ mit $u=3x$ und $v'=e^{0,5x-1}$.

$u = 3x \Rightarrow u'=3$
$v'=e^{0,5x-1} \Rightarrow v=2e^{0,5x-1}$

$$A = \int_1^2 3x\cdot e^{0,5x-1}dx = \left[3x\cdot 2e^{0,5x-1}\right]_1^2 - \int_1^2 3\cdot 2e^{0,5x-1}\,dx =$$

vereinfachen

$$= \left[6x\cdot e^{0,5x-1}\right]_1^2 - \int_1^2 6e^{0,5x-1}dx =$$

← Dieses Integral ist einfach zu berechnen.

$$= \left[6x\cdot e^{0,5x-1}\right]_1^2 - \left[\frac{6}{0,5}e^{0,5x-1}\right]_1^2 =$$

$$= \left[6x\cdot e^{0,5x-1}\right]_1^2 - \left[12e^{0,5x-1}\right]_1^2 = \left[(6x-12)\cdot e^{0,5x-1}\right]_1^2 =$$

$$= [(6\cdot 2-12)\cdot e^{0,5\cdot 2-1}] - [(6\cdot 1-12)\cdot e^{0,5\cdot 1-1}] = [0]-[-6e^{-0,5}] = 6e^{-0,5}$$

Lösung von 200.323.594.33 MF/7:

$u = 2x \Rightarrow u'=2$
$v'=(x-1)^{0,5} \Rightarrow \frac{2}{3}\cdot(x-1)^{1,5}$

$$F(x) = 2x\cdot\sqrt{x-1} = \left[2x\cdot\frac{2}{3}(x-1)^{1,5}\right] - \int 2\cdot\frac{2}{3}(x-1)^{1,5}dx =$$

$$= \left[\frac{4}{3}x(x-1)^{1,5}\right] - \int \frac{4}{3}(x-1)^{1,5}dx =$$

$$= \left[\frac{4}{3}x(x-1)^{1,5}\right] - \left[\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2,5}(x-1)^{2,5}\right] = \left[\frac{4}{3}x(x-1)^{1,5}\right] - \left[\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2,5}(x-1)^{2,5}\right] =$$

$$= \left[\frac{4}{3}x(x-1)^{1,5}\right] - \left[\frac{8}{15}(x-1)^{2,5}\right] =$$ $(x-1)^{1,5}$ ausklammern =

$$= \left[\frac{4}{3}x(x-1)^{1,5}\right] - \left[\frac{8}{15}(x-1)^{2,5}\right] = \left[\frac{4}{3}x(x-1)^{1,5}\right] - \left[\frac{8}{15}(x-1)^{2,5}\right] =$$

$$= \left[(x-1)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{4}{3}x - \frac{8}{15}x+1\right)\right] = \left[\sqrt{(x-1)^3}\cdot\left(\frac{4}{5}x+1\right)\right]$$

Lösung von Aufg.16:

$F(x) = \int x^2 \cdot \ln(x) =$

[In diesem Fall klappt die Rechnung nur, wenn man „ln(x)" ableitet und „x²" aufleitet.]

$$= \left[\ln(x) \cdot \tfrac{1}{3}x^3\right] - \int \tfrac{1}{\cancel{x}} \cdot \tfrac{1}{3} \cancel{x^3} dx =$$

$$= \left[\ln(x) \cdot \tfrac{1}{3}x^3\right] - \tfrac{1}{3} \cdot \int x^2 dx =$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3}x^3 = \tfrac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3}x^3 =$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \tfrac{1}{9}x^3 = x^3 \cdot \left(\tfrac{1}{3}\ln(x) - \tfrac{1}{9}\right)$$

$u = \ln(x) \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

$v' = x^2 \Rightarrow v = \frac{1}{3}x^3$

Formel: $\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$

Lösung von Aufg.17:

$$F(x) = \int (x^2-3) \cdot e^{2x-2} = \int (x^2-3) \cdot e^{2x-2} dx =$$

$$= \left[(x^2-3) \cdot \tfrac{1}{2} e^{2x-2}\right] - \int \cancel{2}x \cdot \tfrac{1}{\cancel{2}} e^{2x-2} dx =$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}\right) \cdot e^{2x-2} - \int x \cdot e^{2x-2} dx =$$

$u = x^2-3 \Rightarrow u' = 2x$

$v' = e^{2x-2} \Rightarrow v = ½ \cdot e^{2x-2}$

Formel: $\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$

[Dummer Weise ist im Integral immer noch ein Produkt, so dass man hier noch mal eine Produktregel anwenden muss ☹ und zwar nur für das hintere Integral $\int (x^2-3) \cdot e^{2x-2}$]

$$= \left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}\right) \cdot e^{2x-2} - \left[x \cdot \tfrac{1}{2} e^{2x} - \int 1 \cdot \tfrac{1}{2} e^{2x-2} dx\right] =$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}\right) \cdot e^{2x-2} - \tfrac{1}{2}x \cdot e^{2x} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot e^{2x-2} =$$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = e^{2x-2} \Rightarrow v = ½ \cdot e^{2x-2}$

Formel: $\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$

[e^{2x-2} ausklammern]

$$= \left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\right) \cdot e^{2x-2} = \left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{4}\right) \cdot e^{2x-2}$$

Bei der Produktintegration stößt man öfter auf einen ganz bestimmten Trick: Und zwar, wenn man auf der rechten Seite das gleiche Integral erhält, wie das mit dem man angefangen hat.

Lösung von Aufg.18:

$F(x) = \int 6\sin(x)\cos(x)dx =$

[Hier ist es egal, ob man 6sin(x) als u oder als v' wählt.]

$= 6\sin(x)\cdot\sin(x) - \int 6\cos(x)\cdot\sin(x)\,dx$

$u = 6\sin(x) \Rightarrow u' = 6\cos(x)$
$v' = \cos(x) \Rightarrow v = \sin(x)$

Formel: $\int u\cdot v'dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$

Nun haben wir genau das gleiche Integral erhalten, wie das von dem wir ausgegangen sind. Stellen Sie sich die beiden oberen Zeilen nicht als Rechnung vor, sondern als Gleichung.

Ich schreib' sie nochmal hin:

$\int 6\sin(x)\cos(x)dx = 6\sin(x)\cdot\sin(x) - \int 6\cos(x)\cdot\sin(x)\,dx$

Wir bringen das rechte Integral auf die linke Seite und erhalten:

$\underbrace{\int 6\sin(x)\cos(x)dx + \int 6\sin(x)\cos(x)dx} = 6\sin(x)\cdot\sin(x)$

$\Rightarrow \quad 2\cdot\int 6\sin(x)\cos(x)dx = 6\sin(x)\cdot\sin(x) \qquad |:2$

$\int 6\sin(x)\cos(x)dx = 3\sin(x)\cdot\sin(x)$

Betrachten Sie mal, was links steht. Das ist das anfangs gesuchte Integral

Damit ist $F(x)=3\sin(x)\cdot\sin(x)$ die Stammfunktion.

Lösung von Aufg.19:

$\int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}dx =$ [umschreiben] $= \int_e^{e^2} \frac{1}{x}\cdot\ln(x)dx =$

$= [\ln(x)\cdot\ln(x)]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \ln(x)\cdot\frac{1}{x}dx = [\ln^2(x)]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}dx$

$u = \ln(x) \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$
$v' = \frac{1}{x} \Rightarrow v = \ln(x)$

Formel: $\int u\cdot v'dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$

Nun haben wir wieder die Situation, dass das rechte Integral, welches wir erhalten haben, wieder genau das ist mit welchem wir begonnen haben. Noch einmal hinschreiben:

$\Rightarrow \int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}dx = [\ln^2(x)]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}dx \qquad | +\int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}dx$

$\Rightarrow 2\cdot\int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}dx = [\ln^2(x)]_e^{e^2} \qquad | :2$

$\Rightarrow \int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\cdot[\ln^2(x)]_e^{e^2} =$ [Grenzen einsetzen] $= \frac{1}{2}\cdot[\ln^2(e^2)] - \frac{1}{2}\cdot[\ln^2(e)] =$

$= \frac{1}{2}\cdot[\ln(e^2)]^2 - \frac{1}{2}\cdot[\ln(e)]^2 = \frac{1}{2}\cdot[2]^2 - \frac{1}{2}\cdot[1]^2 = \ldots = \frac{3}{2}$

Lösung von Aufg.20:

$F(x) = \int \sin^2(x)dx =$ [umschreiben] $= \int \sin(x)\cdot\sin(x)dx =$

$= \sin(x)\cdot(-\cos(x)) - \int \cos(x)\cdot(-\cos(x))dx =$

$= -\sin(x)\cdot\cos(x) + \int \cos^2(x)dx =$

$u = \sin(x) \Rightarrow u' = \cos(x)$
$v' = \sin(x) \Rightarrow v = -\cos(x)$

Formel: $\int u\cdot v'dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$

Auf der rechten Seite haben wir im Integral „cos²(x)".
Der übliche Weg wäre, es vielleicht nochmal mit der Produktintegration zu probieren. Sie glauben mir jetzt einfach, dass da jedoch nur Mist `rauskommt. Es fällt alles komplett weg und man erhält die sinnlose Gleichung $\int \sin^2(x)dx = \int \sin^2(x)dx$. Man muss also etwas anderes probieren.

Ein Weg der funktioniert ist Folgender:
Aus der Gleichung $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ löst man nach $\cos^2(x)$ auf und erhält: $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)$.
Dieses setzen wir ins Integral der rechten Seite ein und erhalten:

$$= -\sin(x)\cdot\cos(x) + \int 1-\sin^2(x)dx = -\sin(x)\cdot\cos(x) + \int 1dx - \int \sin^2(x)dx =$$
$$= -\sin(x)\cdot\cos(x) + x - \int \sin^2(x)dx$$

Mal wieder die Situation, dass das rechte Integral, welches wir erhalten haben, genau das ist mit welchem wir begonnen haben. Noch einmal hinschreiben:

$$\Rightarrow \int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cdot\cos(x) + x - \int \sin^2(x)dx \qquad | +\int \sin^2(x)dx$$
$$2\cdot \int \sin^2(x)dx = -\sin(x)\cdot\cos(x) + x \qquad | :2$$
$$\Rightarrow \int \sin^2(x)dx = -\frac{1}{2}\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)+\frac{1}{2}\cdot x$$

A.14.06 Integration durch Substitution (∯)
oder kurz: **Substitutionsregel**

Ein Spezialfall der Substitution ist die lineare Substitution, welche wir in A.14.03 bereits betrachtet hatten. Hier folgt also die verallgemeinerte Theorie.

Betrachten wir `mal die Funktion: $f(x) = \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}$

Man bemerkt vielleicht [irgendwann], dass der Zähler die Ableitung vom Inneren der unteren Klammer ist. D.h. „x^2-3x+2" gibt beim Ableiten „$2x-3$".
Um so etwas geht es bei der Integration durch Substitution:
Es muss zwei Terme geben, wobei die Ableitung vom einen [meist dem komplizierteren], zufällig der andere Term ist.

Eine Sache, die Ihnen auch noch merkwürdig erscheinen dürfte, ist die mit dem „dx". Als Sie irgendwann die Integrale zum ersten Mal sahen, hat man Ihnen vermutlich erzählt, das „dx" hätte keine Bedeutung, sondern würde nur am Ende des Integrals dumm `rum stehen und sich des Lebens freuen.
Da ich ein gemeiner Kerl bin, erzähle ich Ihnen trotzdem nicht was es mit dem „dx" auf sich hat. Man kann allerdings mit dem „dx" rumrechnen und es kürzen, ersetzen, usw.
Sie erhalten jetzt großzügiger Weise von mir zwei Merksätze und versprechen mir dafür im Gegenzug, nicht zu fragen: „Waruum?" und „Wiesoo?"

Bei der Integration durch Substitution gilt immer:

1. $dx = \frac{du}{u'}$ und
2. Einer der Terme wird „u" genannt.

$$dx = \int \frac{du}{u'}$$

Aufg.20

Bestimme die Stammfunktion von: $f(x) = \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}$

Aufg.21

Bestimme die Stammfunktion von: $f(x) = 5x\cdot(2-x^2)^7$

Aufg.22

Welche Fläche schließt $f(x) = 0{,}5x\cdot\sqrt{16-x^2}$ mit der positiven x-Achse ein ?

Aufg.23

Welche Fläche bildet $f(x)=\tan(x)$ mit der x-Achse und den Geraden $x=0$ und $x=1$?

Aufg.24

Welche Fläche bildet $f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x}$ mit der x-Achse, zwischen $x_1=2$ und $x_2=8$?

Aufg.25

Bestimmen Sie: $\int_0^3 \frac{4e^{2x}}{e^{2x}+4}\,dx$

Aufg.26

Bestimme das Integral $\int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}\,dx$! [vergleiche auch →Aufg.24]

Lösung von Aufg.20:

Uns fällt auf dass „x^2-3x+2" abgeleitet genau „$2x-3$" gibt.

Daher ersetzen wir „x^2-3x+2" durch „u". ⇒ $u = x^2-3x+2$

Da „x^2-3x+2" abgeleitet „$2x-3$" ist, gilt $u'=2x-3$. ⇒ $u' = 2x-3$

Damit sieht unser Integral so aus:

$$F(x) = \int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}dx = \int \frac{2x-3}{u^2}dx = \int \frac{2x-3}{u^2}\frac{du}{u'} = \qquad dx = \frac{du}{u'}$$

$$= [u=2x-3] = \int \frac{\cancel{2x-3}}{u^2}\frac{du}{\cancel{2x-3}} = \int \frac{1}{u^2}du = [\text{umschreiben}] =$$

$$= \int u^{-2}du = \frac{1}{-1}u^{-1} = -\frac{1}{u} = [\text{Resubstituieren } u=x^2-3x+2] = \frac{-1}{x^2-3x+2}$$

Damit ist die Stammfunktion von $f(x)=\frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}$ $\quad F(x)=\frac{-1}{x^2-3x+2}$

Eigentlich ist es so: Der eine Term muss nicht *haargenau* die Ableitung vom anderen Term sein. Es reicht, wenn er ein Vielfaches von der Ableitung ist, so wie im folgenden Beispiel.

Lösung von Aufg.21:
Die Ableitung von „$2-x^2$" ist „$-2x$". Diese Ableitung ist ein Vielfaches vom anderen Term $5x$ [um genau zu sein: das 2,5-fache], welcher vor der Klammer steht. Deswegen wird die Methode durch Substitution funktionieren.

$$F(x) = \int 5x\cdot(2-x^2)^7 dx = \int 5x\cdot(2-x^2)^7 \frac{du}{u'} =$$

$u = 2-x^2$ $\quad dx = \frac{du}{u'}$
$u' = -2x$

$$= \int 5\cancel{x}\cdot(2-x^2)^7 \frac{du}{-2\cancel{x}} = \int -\frac{5}{2}\cdot(2-x^2)^7 du =$$

$$= \int -\frac{5}{2}\cdot u^7 du = \left[-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot u^8\right] = -\frac{5}{16}\cdot u^8 = -\frac{5}{16}\cdot(2-x^2)^8$$

Lösung von Aufg.22:
Wir brauchen die Flächengrenzen, das sind die Nullstellen.

$$f(x) = 0$$
$$0{,}5x\cdot\sqrt{16-x^2} = 0$$

$0{,}5x=0 \qquad \sqrt{16-x^2}=0 \quad |\,(\ )^2$

$x_1=0 \qquad 16-x^2=0 \Rightarrow 16=x^2 \Rightarrow x_{2,3}=\pm 4$

Die Grenzen sind also $x_1=0$ und $x_2=4$.
[„-4" fällt wegen der *positiven* x-Achse weg]

$$A = \int_0^4 0{,}5x\cdot\sqrt{16-x^2}\,dx = \int_0^4 0{,}5x\cdot\sqrt{u}\,\frac{du}{u'} =$$

$u=16-x^2$ $\quad dx = \frac{du}{u'}$
$\Rightarrow u'=-2x$

[Ab jetzt haben wir kein „dx" mehr sondern „du". Wir müssen jetzt irgendwie auch klar mache, dass es sich bei den Integralgrenzen „0" und „4" um x-Werte handelt, nicht um u-Werte. Deswegen schreiben wir jetzt immer x=0 und x=4 hin.]

b jetzt haben wir kein „dx" mehr,

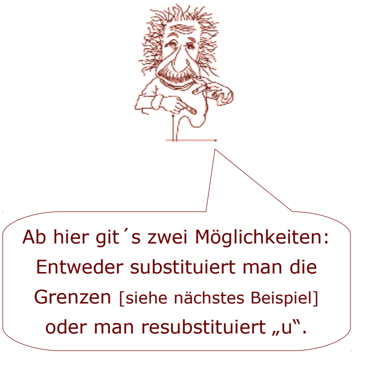
$$= \int_{x=0}^{x=4} 0{,}5\cancel{x}\cdot\sqrt{u}\,\frac{du}{-2\cancel{x}} = \int_{x=0}^{x=4} \frac{0{,}5}{-2}\cdot\sqrt{u}\,du =$$

[$^{0,5}/_{-2}=-^{1}/_{4}$. Diese Zahl kann man auch vor das Integral ziehen. Die Wurzel wird umgeschrieben zu „hoch 0,5".]

$$= -\frac{1}{4}\cdot\int_{x=0}^{x=4} u^{0,5} du = -\frac{1}{4}\cdot\int_{x=0}^{x=4} u^{0,5} du = -\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{1{,}5}\cdot u^{1,5}\right]_{x=0}^{x=4} =$$

[Wir resubstituieren u. $\Rightarrow u=16-x^2$]

$$= -\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{1{,}5}\cdot u^{1,5}\right]_{x=0}^{x=4} = -\frac{1}{6}\cdot\left[(16-x^2)^{1,5}\right]_{x=0}^{x=4} =$$



[Ab jetzt müssen wir bei den Grenzen nicht mehr ausdrücklich betonen, dass es „x"-Grenzen sind. Es gibt je keine Buchstaben „u" mehr in der Rechnung!]

$$= -\frac{1}{6}\cdot\left[(16-x^2)^{1,5}\right]_0^4 = [\text{Grenzen einsetzen}] =$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot\left[(16-4^2)^{1,5}\right]-\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left[(16-0^2)^{1,5}\right] = -\frac{1}{6}\cdot[0^{1,5}]+\frac{1}{6}\cdot[16^{1,5}] =$$

[Falls man einen Taschenrechner zur Hand hat, kann man alles einfach eintippen, sonst macht man noch folgende Umformung:]

$$= -\frac{1}{6}\cdot[0^{\frac{3}{2}}]+\frac{1}{6}\cdot[16^{\frac{3}{2}}] = -\frac{1}{6}\cdot[\sqrt{0}^3]+\frac{1}{6}\cdot[\sqrt{16}^3] = -\frac{1}{6}\cdot[0^3]+\frac{1}{6}\cdot[4^3] =$$
$$= -\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot 64 = \frac{64}{6}$$

Lösung von Aufg.23:
Die Geraden x=0 und x=1 sind senkrechte Geraden, also Grenzen.

$$A = \int_0^1 \tan dx =$$

[tan(x) kann man auf normalem Weg nicht integrieren. Entweder darf man die Stammfunktion aus der Formelsammlung ablesen oder man muss tan(x) zu $^{\sin(x)}/_{\cos(x)}$ umschreiben]

$$= \int_0^1 \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \int_{x=0}^{x=1} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\frac{du}{u'} = \int_{x=0}^{x=1} \frac{\sin(x)}{u}\,\frac{du}{u'} =$$
$$= \int_{x=0}^{x=1} \frac{\cancel{\sin(x)}}{u}\,\frac{du}{-\cancel{\sin(x)}} = \int_{x=0}^{x=1} \frac{-1}{u}du = \left[-\ln(u)\right]_{x=0}^{x=1} =$$

$u = \cos(x)$ $\Rightarrow u' = -\sin(x)$ $\qquad dx = \frac{du}{u'}$

[Jetzt haben wir noch das Problem mit den Grenzen. Es handelt sich um „x"-Grenzen, in der Stammfunktion haben wir jedoch „u". Um „u"-Grenzen zu erhalten, setzen wir natürlich x in u=cos(x) ein.]

$x_1=0 \Rightarrow u_1=\cos(0)=1 \qquad x_2=1 \Rightarrow u_2=\cos(1)\approx 0{,}54$

$$= \left[-\ln(u)\right]_1^{0,54} = -\ln(0{,}54)-(-\ln(1)) \approx +0{,}62$$

Ab hier git´s zwei Möglichkeiten: Entweder substituiert man die Grenzen oder man resubstituiert „u" [siehe letztes Beispiel] .

Lösung von Aufg.24:
Auch hier erkennt man erst auf den zweiten Blick, dass es sich um Substitution handelt. Um die Stammfunkition zu erhalten, muss man f(x) umschreiben:

$$A = \int_2^8 \frac{(\ln(x))^2}{x}dx = \int_2^8 \frac{1}{x}\cdot(\ln(x))^2 dx =$$

[Die Ableitung vom Inneren, von ln(x), ist $^1/_x$, welches vorne im Integral steht. Spätestens jetzt ahnt man: „Ah! Substitution!"]

$$= \int_2^8 \frac{1}{x}\cdot(\ln(x))^2dx = \int_2^8 \frac{1}{x}\cdot u^2 dx = \int_2^8 \frac{1}{x}\cdot u^2\,\frac{du}{u'} =$$
$$= \int_{x=2}^{x=8} \frac{1}{x}\cdot u^2\,\frac{du}{u'} = \int_{x=2}^{x=8} \cancel{\frac{1}{x}}\cdot u^2\,\frac{du}{\cancel{\frac{1}{x}}} = \int_{x=2}^{x=8} u^2 du =$$
$$= \left[\frac{1}{3}u^3\right]_{x=2}^{x=8} = \left[\frac{1}{3}\cdot(\ln(x))^3\right]_{x=2}^{x=8} =$$

$u = \ln(x)$ $\Rightarrow u' = \frac{1}{x}$ $\qquad dx = \frac{du}{u'}$

[„u" wieder resubstituieren. Man könnte auch die x-Grenzen zu u-Grenzen ändern. Als mathematische Formulierung hieße das: „die Grenzen substituieren". Also: $u_1=\ln(2)$ $u_2=\ln(8)$.]

$$= \left[\frac{1}{3}\cdot(\ln(8))^3\right]-\left[\frac{1}{3}\cdot(\ln(2))^3\right] \approx [3]-[0{,}11] = 2{,}89$$

Lösung von Aufg.25:

$$A = \int_0^3 \frac{4e^{2x}}{e^{2x}+4}\,dx = \int_{x=0}^{x=3} \frac{4e^{2x}}{u}\,dx = \int_{x=0}^{x=3} \frac{4e^{2x}}{u}\,\frac{du}{u'} =$$

$u=e^{2x}+4$ $\Rightarrow u'=2e^{2x}$ $dx = \frac{du}{u'}$

$$= \int_{x=0}^{x=3} \frac{4e^{2x}}{u}\,\frac{du}{u'} = \int_{u=5}^{u=e^6+4} \frac{4e^{2x}}{u}\,\frac{du}{u'} = \int_{u=-3}^{u=e^6-4} \frac{\cancel{4e^{2x}}}{u}\,\frac{du}{\cancel{2e^{2x}}} =$$

[Die Grenzen substituieren: $u_1=e^{2\cdot 0}+4=5$, $u_2=e^{2\cdot 3}+4=e^6+4$.
Man könnte auch später in der Stammfunktion u substituieren zu $u=e^{2x}+4$. Es ist ziemlich egal, wie man vorgeht.}

$$= \int_{u=5}^{u=e^6+4} \frac{2}{u}\,du = \left[2\cdot\ln(u)\right]_5^{e^6+4} = 2\cdot\ln(e^6+4)-2\cdot\ln(5) \approx 8{,}8$$

Lösung von Aufg.26:

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}\,dx = [\text{f(x) umschreiben}] = \int_e^{e^2} \frac{1}{x}\cdot\ln(x)\,dx =$$

$u=\ln(x)$ $\Rightarrow u'=\frac{1}{x}$ $dx = \frac{du}{u'}$

$$= \int_{x=e}^{x=e^2} \frac{1}{x}\cdot u\,\frac{du}{u'} = \int_{x=e}^{x=e^2} \frac{1}{\cancel{x}}\cdot u\,\frac{du}{\frac{1}{\cancel{x}}} = \int_{x=e}^{x=e^2} u\,du =$$

$$= \left[\frac{1}{2}u^2\right]_{x=e}^{x=e^2} = [u=\ln(x)] = \left[\frac{1}{2}\cdot(\ln(x))^2\right]_{x=e}^{x=e^2} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cdot(\ln(e^2))^2\right]-\left[\frac{1}{2}\cdot(\ln(e))^2\right] = \left[\frac{1}{2}\cdot(2^2)\right]-\left[\frac{1}{2}\cdot(1^2)\right] = \frac{3}{2}$$

Sonstige Substitution (∮)

Ich denke so langsam müsste der Punkt kommen, an dem Sie denken, Substitution einigermaßen zu verstehen. Also ist es für mich an der Zeit zu erzählen, dass man die Substitution noch weit vielfältiger einsetzen kann. Substitution funktioniert auch in vielen Fällen, in denen weder die Ableitung vom anderen Term dasteht, noch lineare Terme substituiert werden. Das Problem ist, man kann nicht haargenau sagen, bei welchen Funktionstypen Substitution funktioniert und bei welchen nicht. **Man muss einfach ausprobieren** und schauen ob man zu einen vernünftigen Ergebnis kommt.
[Das werden Sie auch später als Suuper-Duuper-Mathematiker-Guru leider nicht anders können.]

Aufg.27

Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x) = \frac{5x}{(2x-3)^4}$!

Aufg.28

Bestimme die Stammfunktion von $f(x) = \frac{x}{x+2}$!

Lösung von Aufg.27:

Normaler Weise ist man versucht das Innere der Klammer zu substituieren, also u=2x–3. u'=2 steht aber nicht oben. [Das „x" ist zu viel, die Zahl „5" wäre egal.]

Trotzdem substituieren wir u=2x-3 und wenden einen klitzekleinen schnucklig-knuffigen Trick an.

$$F(x) = \int \frac{5x}{(2x-3)^4}dx = \int \frac{5x}{u^4}\,dx = \int \frac{5x}{u^4}\,\frac{du}{u'} = \int \frac{5x}{u^4}\,\frac{du}{2} =$$

$u=2x-3 \quad \Rightarrow u'=2 \qquad dx = \frac{du}{u'}$

[Im Moment ist das „x" aus dem Zähler ziemlich störend. Daher lösen wir aus der Gleichung „u=2x–3" nach „x" auf und setzen dieses ein. u=2x–3 ⇒ u+3=2x ⇒ 0,5·u+1,5=x]

$$= \frac{5}{2}\cdot\int \frac{x}{u^4}\,du = \frac{5}{2}\cdot\int \frac{0{,}5u+1{,}5}{u^4}\,du = \text{[in zwei Brüche aufspalten]} =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\int \frac{0{,}5\cancel{u}}{u^{\cancel{4}}}+\frac{1{,}5}{u^4}\,du = \frac{5}{2}\cdot\int \frac{1}{2u^3}+\frac{3}{2u^4}du = \text{[umschreiben]} =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\int \frac{1}{2}u^{-3}+\frac{3}{2}u^{-4}du = \frac{5}{2}\cdot\left[\frac{1}{2\cdot(-2)}u^{-2}+\frac{3}{2\cdot(-3)}u^{-3}\right] = \text{[umschreiben]} =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{u^2}-\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{u^3}\right] = \text{[vereinfachen]} = -\frac{5}{8u^2}-\frac{5}{4u^3} =$$

$$= \text{[„u" resubstituieren]} = -\frac{5}{8(2x-3)^2}-\frac{5}{4(2x-3)^3}$$

[Wenn's Sie glücklich macht, können Sie jetzt noch alles auf den Hauptnenner bringen.]

Lösung von Aufg.28:

Wenn die Funktion andersrum stände, also als $\frac{x+2}{x}$ könnte man sie in $\frac{x}{x}+\frac{2}{x}=1+\frac{2}{x}$ umschreiben, und dann recht einfach aufleiten. [zu: x+2ln(x)].

Da unten Strichrechnungen sind, kann man den Bruch nicht aufspalten. Es funktioniert nur die Substitution.

$$F(x) = \int \frac{x}{x+2}dx = \int \frac{x}{u}dx = \int \frac{x}{u}\,\frac{du}{u'} = \int \frac{x}{u}\,\frac{du}{1} =$$

$u=x+2 \quad \Rightarrow u'=1 \qquad dx = \frac{du}{u'}$

[u=x+2 ⇒ u–2=x. „u–2" statt dem „x" im Zähler schreiben]

$$= \int \frac{u-2}{u}\,du = \text{[aufspalten]} = \int \frac{u}{u}-\frac{2}{u}du = \int 1-\frac{2}{u}du =$$

$$= u - 2\cdot\ln(u) = \text{[„u" resubstituieren]} = (x+2)-2\cdot\ln(x+2)$$

A.14.07 Partialbruchzerlegung (∰)

Die Partialbruchzerlegung ist ein mächtiges Werkzeug um sehr viele Brüche aufzuleiten. Zähler und Nenner dürfen jedoch nur aus Polynomen bestehen [es dürfen also keine sin-, cos-, ln-Terme oder e-Terme oder etc. vorkommen].

Vorgehensweise:

1. **Potenz des Zählers** [oben] **muss kleiner als die des Nenners sein.** Ist das nicht der Fall, muss erst eine Polynomdivision durchgeführt werden, man teilt also den Zähler durch den Nenner. [siehe Aufg.32]
2. **Der Nenner muss in Linearfaktoren zerlegt werden.** Man bestimmt daher zuerst alle Nullstellen des Nenners. Hat der Nenner weniger Nullstellen als seine Hochzahl beträgt, so ist keine Linearfaktorzerlegung und daher keine Partialbruchzerlegung möglich. [Doppelte und dreifache Nullstellen werden dabei doppelt und dreifach gezählt, d.h. $y=(x-2)^2$ hat hierbei *zwei* Nullstellen, beide bei x=2.]
3. **Man zerlegt den Bruch in viele kleine Brüchelein,** jeder Bruch hat oben einen Parameter (A, B, ..) und unten einen Linearfaktor. (siehe Beispiele)
4. **Man bestimmt die Parametern aller Zähler** in dem man mit dem Hauptnenner multipliziert und danach geschickte Zahlen einsetzt (z.B. alle Nennernullstellen).

Detaillierte Erläuterungen folgen dann im Rahmen der Aufgaben.

Stellen Sie sich vor, Sie müssten folgende Funktion integrieren: $f(x) = \frac{2}{x-2}+\frac{5}{x+1}$

Das wäre wahrlich einfach: $\int \frac{2}{x-2}+\frac{5}{x+1}dx = 2\cdot\ln|x-2| + 5\cdot\ln|x+1|$

Nun könnte es ja sein, dass irgendein Sadist Ihnen die Funktion nicht in obiger Form angibt, sondern beide Brüche auf den Hauptnenner bringt und Ihnen die Funktion so zeigt[1]: $f(x) = \frac{7x-8}{x^2-x-2}$

Nun die **Aufg.29** Bestimmen Sie $\int \frac{7x-8}{x^2-x-2}dx$

Aufg.30

Integrieren wir \`mal $f(x) = \frac{2x^6-12x^5+23x^4-13x^3-9x^2-17}{x^4-6x^3+12x^2-10x+3}$

Aufg.31

Integrieren wir $f(x) = \frac{x^4+2x^3-2x^2-5x-1}{x^3-4x}$

1 Natürlich nur rein hypothetisch. Niemand würde so etwas Gemeines tatsächlich tun.

Aufg.32

Bestimme die Stammfunktion von $f(x) = \frac{e^{0,5x}+1}{e^{0,5x}+3}$!

Lösung von Aufg.29:
Die Hochzahl oben ist kleiner als die unten, wir brauchen keine Polynomdivision.
Nun zerlegen wir den Nenner in Faktoren (dafür braucht man die Nullstellen):

$x^2-x-2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=+0,5\pm\sqrt{0,5^2+2} = 0,5\pm1,5$ [1] $\quad \Rightarrow x_1 = 2 \quad x_2=-1$

Der Nenner kann also in $(x-2)\cdot(x+1)$ zerlegt werden.

Die Funktion kann also in $f(x) = \frac{7x-8}{(x-2)(x+1)}$ umgeschrieben werden.

Da der Nenner in Linearfaktoren zerlegt werden kann, kann man die Funktion auf jeden Fall aufspalten in $f(x) = \frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$, wobei „A" und „B" irgendwelche Zahlen sind. [2]

Nun muss man nur noch wissen, welches die Zahlen „A" und „B" sind.
Dafür betrachten wir eine Gleichung:

$\frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1} \qquad | \cdot (x-2)\cdot(x+1)$

$7x-8 = A\cdot(x+1) + B\cdot(x-2)$

Um die Werte für „A" und „B" zu errechnen, gibt es viele Möglichkeiten. Einer der besten Tricks ist der, die Nullstellen des Nenners einzusetzen.

$x_1=2 \quad \Rightarrow 7\cdot2-8=A\cdot(2+1)+B\cdot(2-2) \Rightarrow 6=A\cdot3+B\cdot0 \Rightarrow 6=3A \Rightarrow A=2$

$x_2=-1 \quad \Rightarrow 7\cdot(-1)-8=A\cdot(-1+1)+B\cdot(-1-2) \Rightarrow -15=A\cdot0+B\cdot(-3) \Rightarrow -15=-3B \Rightarrow B=5$

Damit wissen wir nun, dass sich f(x) umschreiben lässt als:

$f(x) = \frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1} = \frac{2}{x-2}+\frac{5}{x+1}$

Nun ist auch das Integrieren einfach: $\int \frac{2}{x-2}+\frac{5}{x+1}dx = 2\cdot\ln|x-2|+5\cdot\ln|x+1|$

Lösung von Aufg.30:
[Diese Funktion gehört zu den etwas Aufwändigen. Ich habe sie ausgewählt, weil ich `was ganz Bestimmtes an ihr erklären möchte. Meist werden Sie solche Monster-Funktionen nicht sehen.]

Die Hochzahl des Zählers ist höher als die des Nenners. Wir müssen die Funktion zuerst mit Hilfe der Polynomdivision zerlegen.

$(2x^6-12x^5+23x^4-13x^3-9x^2+20x-17):(x^4-6x^3+12x^2-10x+3)=2x^2-1+\mathit{Rest}$

$-(2x^6-12x^5+24x^4-20x^3+6x^2)$

$-1x^4+7x^3-15x^2+20x-17$

$-(-x^4+6x^3-12x^2+10x-3)$

$1x^3-3x^2+10x-14$

1 Ich habe hier die p-q-Formel angewendet. Natürlich kann man auch a-b-c-Formel verwenden.
2 Falls im Nenner der Funktion eine Potenz steht, also z.Aufg. $(x+1)^3$ ... siehe nächstes Beispiel.

Es geht nicht weiter. $1x^3$ kann man nicht mehr durch x^4 teilen.

Der *Rest* ist daher: $\frac{x^3-3x^2+10x-14}{x^4-6x^3+12x^2-10x+3}$

Man kann die Funktion f(x) daher umschreiben zu:

$$f(x) = \frac{2x^6-12x^5+23x^4-13x^3-9x^2-17}{x^4-6x^3+12x^2-10x+3} = 2x^2-1+\frac{x^3-3x^2+10x-14}{x^4-6x^3+12x^2-10x+3}$$

[Zum Integrieren: Der Teil „$2x^2-1$" ist nicht schwer zu integrieren. Der Bruch ist das Problem!]

Beim Bruch kommt nun die Partialbruchzerlegung zum Tragen. Dazu müssen erst die Nullstellen des Nenners errechnet werden.

$x^4-6x^3+12x^2-10x+3 = 0$ Raten, Polynomdivision. $\mathbf{x_1=1}$

$$\begin{array}{l}
(x^4-6x^3+12x^2-10x+3):(x-1) = x^3-5x^2+7x-3 \\
-(x^4-x^3) \\
\hline
\quad -5x^3+12x^2-10x+3 \\
\quad -(-5x^3+5x^2) \\
\hline
\qquad 7x^2-10x+3 \\
\qquad -(7x^2-7x) \\
\hline
\qquad\quad -3x+3 \\
\qquad\quad -(-3x+3) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Weitermachen mit $x^3-5x^2+7x-3=0$, nochmal Raten und Polynomdivision, die Nullstelle ist ein weiteres Mal: $x_2=1$

$$\begin{array}{l}
(x^3-5x^2+7x-3):(x-1) = x^2-4x+3 \qquad \mathbf{x_2=1} \\
-(x^3-x^2) \\
\hline
\quad -4x^2+7x-3 \\
\quad -(-4x^2+4x\ ) \\
\hline
\qquad 3x-3 \\
\qquad -(3x-3) \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}$$

Weitermachen mit $x^2-4x+3=0$. [p-q-Formel oder a-b-c-Formel wird angewendet.]

$x^2-4x+3=0 \quad\Rightarrow\quad x_{3,4}=+2\pm\sqrt{2^2-3}=2\pm1 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x_3=1,\ \ x_4=3}$

$\Rightarrow\ x^4-6x^3+12x^2-10x+3 = (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4) = (x-1)\cdot(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$

$\Rightarrow\ f(x) = 2x^2-1+\frac{x^3-3x^2+10x-14}{x^4-6x^3+12x^2-10x+3} = 2x^2-1+\frac{x^3-3x^2+10x-14}{(x-1)^3\cdot(x-3)}$

Nun müssen wir den Bruch in Linearfaktoren zerlegen [die „$2x^2-1$" sind stressfrei, um die kömmern wir uns vorerst nicht]. Weil im Nenner $(x-1)^3$ steht, wählen wir als Ansatz für den Bruch **nicht** $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}$ **sondern:** $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x-3}$ [1]

$\Rightarrow\ \frac{x^3-3x^2+10x-14}{(x-1)^3\cdot(x-3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x-3} \qquad |\cdot(x-1)^3\cdot(x-3)$

$x^3-3x^2+10x-14 = A\cdot(x-1)^2\cdot(x-3)+B\cdot(x-1)\cdot(x-3)+C\cdot(x-3)+D\cdot(x-1)^3$

[Unser Ziel ist jetzt natürlich „A", „B", „C" und „D" zu erhalten. Dafür setzen wir die Nullstellen des Nenners x=1 und x=3 ein und sehen dann weiter.]

1 Hätte eine Funktion also die Form: $f(x)=\frac{\text{blablah}}{(x+2)\cdot(x-4)^2}$, wählt man als Ansatz: $f(x)=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{(x-4)^2}$

x=1: $1^3-3\cdot1^2+10\cdot1-14 = A\cdot(1-1)^2\cdot(1-3)+B\cdot(1-1)\cdot(1-3)+C\cdot(1-3)+D\cdot(1-1)^3$
$1-3+10-14 = A\cdot0\cdot(-2)+B\cdot0\cdot(-2)+C\cdot(-2)+D\cdot0$
$-6 = -2C \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C=3}$

x=3: $3^3-3\cdot3^2+10\cdot3-14 = A\cdot(3-1)^2\cdot(3-3)+B\cdot(3-1)\cdot(3-3)+C\cdot(3-3)+D\cdot(3-1)^3$
$27-27+30-14 = A\cdot4\cdot0+B\cdot2\cdot0+C\cdot0+D\cdot8$
$16 = 8D \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D=2}$

[Leider haben wir keine weiteren Nennernullstellen mehr, die wir einsetzen könnte, obwohl uns noch „A" und „B" fehlen. Daher setzen wir irgendwelche beliebigen Zahlen für „x" ein.]

x=0: $0^3-3\cdot0^2+10\cdot0-14 = A\cdot(0-1)^2\cdot(0-3)+B\cdot(0-1)\cdot(0-3)+C\cdot(0-3)+D\cdot(0-1)^3$
$-14 = A\cdot1\cdot(-3)+B\cdot(-1)\cdot(-3)+C\cdot(-3)+D\cdot(-1)$ C=3 und D=2 einsetzen
$-14 = -3A+3B-9-2 \quad \Rightarrow \quad -3A+3B=-2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{-A+B=-1}$

x=2: $2^3-3\cdot2^2+10\cdot2-14 = A\cdot(2-1)^2\cdot(2-3)+B\cdot(2-1)\cdot(2-3)+C\cdot(2-3)+D\cdot(2-1)^3$
$8-12+20-14 = A\cdot1\cdot(-1)+B\cdot1\cdot(-1)+C\cdot(-1)+D\cdot1$ C=3 und D=2 einsetzen
$2 = -A-B-3+2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{-A-B=3}$

Im Ergebnis haben wir C=3, D=2 erhalten und ein Gleichungssystem mit A und B.

$$\begin{array}{l} -A+B=-1 \\ -A-B=\ 3 \quad + \\ \hline -2A = 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A=-1} \quad \Rightarrow \text{ [in eine der Gleichungen] } \Rightarrow \quad \mathbf{B=-2}$$

Jetzt endlich, können wir die Funktion geschickt umschreiben. Hier noch einmal alle Umformungen, die wir durchgeführt haben:

$$\Rightarrow\ f(x) = \frac{2x^6-12x^5+23x^4-13x^3-9x^2-17}{x^4-6x^3+12x^2-10x+3} = 2x^2-1+\frac{x^3-3x^2+10x-14}{x^4-6x^3+12x^2-10x+3} =$$
$$= 2x^2-1+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x-3} = 2x^2-1+\frac{-1}{x-1}+\frac{-2}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{2}{x-3}$$

Mit dieser letzten Umformung kann man f(x) endlich integrieren.

$$\int f(x)dx = \int 2x^2-1+\frac{-1}{x-1}+\frac{-2}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{2}{x-3}dx = \qquad \text{[umschreiben]}$$
$$= \int 2x^2-1-\frac{1}{x-1}-2\cdot(x-1)^{-2}+3(x-1)^{-3}+\frac{2}{x-3}dx =$$
$$= \left[\frac{2}{3}x^3-x-\ln|x-1|-\frac{2}{-1}\cdot(x-1)^{-1}+\frac{3}{-2}(x-1)^{-2}+2\ln|x-3|\right] =$$
$$= \left[\frac{2}{3}x^3-x-\ln|x-1|+\frac{2}{x-1}-\frac{3}{2(x-1)^2}+2\ln|x-3|\right]$$

schwere Geburt [1]

1 Gruß an alle Hebammen !

Lösung von Aufg.31:
Die Potenz oben ist wieder größer als die unten, daher müssen wir den Bruch vor der eigentlichen Partialbruchzerlegung noch mit der Polynomdivision umformen.

$$
\begin{array}{l}
(x^4+2x^3-2x^2-5x-1) : (x^3-4x) = x+2+\frac{2x^2+3x-1}{x^3-4x} \\
\underline{-(x^4 \qquad -4x^2)} \\
\qquad +2x^3+2x^2-5x-1 \\
\quad \underline{-(+2x^3 \qquad -8x)} \\
\qquad\qquad +2x^2+3x-1
\end{array}
$$

Es gilt also: f(x) = $x+2+\frac{2x^2+3x-1}{x^3-4x}$

Der Vorteil dieser Schreibweise: Den Term „x+2" kann man leicht aufleiten, den Restbruch kann man mit Hilfe der Partialbruchzerlegung umschreiben und danach aufleiten.

Um den Restbruch umzuschreiben, brauchen wir die Nennernullstellen.

$x^3-4x=0 \Rightarrow$ [ausklammern] $\Rightarrow x\cdot(x^2-4)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \lor x^2-4=0 \Rightarrow x_{2,3}=\pm 2$

Man kann „x^3-4x" also zerlegen zu: „$x\cdot(x-2)\cdot(x+2)$"

$\Rightarrow \frac{2x^2+3x-1}{x^3-4x} = \frac{2x^2+3x-1}{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)} =$ [Theorie der Partialbruchzerlegung] $= \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$

Bestimmung der Parameter A, B und C:

$$\frac{2x^2+3x-1}{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2} \qquad |\cdot x\cdot(x-2)\cdot(x+2)$$

$2x^2+3x-1 = A\cdot(x-2)\cdot(x+2) + B\cdot x\cdot(x+2) + C\cdot x\cdot(x-2)$

x=0 einsetzen: $2\cdot 0^2+3\cdot 0-1 = A\cdot(0-2)\cdot(0+2) + B\cdot 0\cdot(0+2) + C\cdot 0\cdot(0-2)$

$-1 = A\cdot(-4) + B\cdot 0 + C\cdot 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A = \frac{1}{4}}$

x=2 einsetzen: $2\cdot 2^2+3\cdot 2-1 = A\cdot(2-2)\cdot(2+2) + B\cdot 2\cdot(2+2) + C\cdot 2\cdot(2-2)$

$13 = A\cdot 0 + B\cdot 8 + C\cdot 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{B = \frac{13}{8}}$

x=-2: $2\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)-1 = A\cdot(-2-2)\cdot(-2+2) + B\cdot(-2)\cdot(-2+2) + C\cdot(-2)\cdot(-2-2)$

$1 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 8 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{C = \frac{1}{8}}$

Damit lässt sich der Restbruch zerlegen in:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2} = \frac{1}{4x}+\frac{13}{8(x-2)}+\frac{1}{8(x+2)}$$

und f(x) hat die Form: $f(x) = x+2+\frac{1}{4x}+\frac{13}{8(x-2)}+\frac{1}{8(x+2)}$

Nun kann man f(x) „einfach" integrieren:

$$\int f(x)dx = \int x+2+\frac{1}{4x}+\frac{13}{8(x-2)}+\frac{1}{8(x+2)}dx = \frac{1}{2}x^2+2x+\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{13}{8}\ln|x-2|+\frac{1}{8}\ln|x+2|$$

Lösung von Aufg.32:
Erstmal handelt es sich um keine Partialbruchzerlegung, da im Bruch e-Terme auftauchen.
Substitution könnte allerdings funktionieren.

$$u=e^{0,5x}+3 \quad \Rightarrow u'=0,5e^{0,5x} \qquad dx=\frac{du}{u'}$$

$$F(x) = \int \frac{e^{0,5x}+1}{e^{0,5x}+3}dx = \int \frac{e^{0,5x}+1}{u}\,\frac{du}{u'} = \int \frac{e^{0,5x}+1}{u}\,\frac{du}{0,5e^{0,5x}} =$$

$[\ u=e^{0,5x}+3 \Rightarrow e^{0,5x}=u-3\ ]$

$$= \frac{1}{0,5}\int \frac{e^{0,5x}+1}{u}\,\frac{du}{e^{0,5x}} = 2\cdot\int \frac{u-3+1}{u}\cdot\frac{du}{(u-3)} = 2\int \frac{u-2}{u(u-3)}du =$$

$$= \text{[Partialbruchzerlegung ist am Start]} = 2\int \frac{A}{u}+\frac{B}{u-3}du$$

Bestimmung der Parameter „A" und „B". Es soll ja gelten:

$$\frac{u-2}{u(u-3)} = \frac{A}{u}+\frac{B}{u-3} \qquad |\cdot u\cdot(u-3)$$

$$u-2 = A\cdot(u-3)+B\cdot u$$

u=0 einsetzen: $0-2 = A\cdot(0-3)+B\cdot 0 \Rightarrow -2 = -3\cdot A \Rightarrow A=\frac{2}{3}$

u=3 einsetzen: $3-2 = A\cdot(3-3)+B\cdot 3 \Rightarrow 1 = 3\cdot B \Rightarrow B=\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow F(x) = 2\int \frac{A}{u}+\frac{B}{u-3}du = 2\int \frac{2}{3u}+\frac{1}{3(u-3)}du = 2\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot\ln|u|+\frac{1}{3}\cdot\ln|u-3|\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\ln|u|+\frac{2}{3}\cdot\ln|u-3| = \text{[Resubstitution } u=e^{0,5x}+3\text{]} =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\ln\left|e^{0,5x}+3\right|+\frac{2}{3}\cdot\ln\left|e^{0,5x}+3-3\right| = \frac{4}{3}\cdot\ln\left|e^{0,5x}+3\right|+\frac{2}{3}\cdot\ln\left|e^{0,5x}\right| =$$

[Da $e^{0,5x}$ und erst recht $e^{0,5x}+3$ positiv sind, kann man sich den Betrag sparen]

$$= \frac{4}{3}\cdot\ln\left(e^{0,5x}+3\right)+\frac{2}{3}\cdot\ln\left(e^{0,5x}\right) = \text{[ln und } e^{\cdots}\text{ wegkürzen]} =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\ln\left(e^{0,5x}+3\right)+\frac{2}{3}\cdot 0,5x = \frac{4}{3}\cdot\ln\left(e^{0,5x}+3\right)+\frac{1}{3}\cdot x$$

verwandte Themen:
→ Kap. A.18
→ Kap. A.41.06
→ Kap. A.42.07
→ Kap. A.43.05
→ Kap. A.44.04
→ Kap. A.45.04