A.21 Extremwertaufgaben

A.21.01 Überblick (∰)

Extremwertaufgaben tauchten bisher in fast jeder Prüfungsaufgabe auf.
Es handelt sich hierbei *nicht* um Berechnung von Hoch- und Tiefpunkten einer Funktion, sondern es geht immer um das gleiche Schema:
Irgendetwas soll maximal oder minimal werden.
Am häufigsten sieht man:

- Berechnung eines maximalen Flächeninhalts,
- Abstand zwischen zwei Funktionen maximieren,
- Abstand zwischen einem Punkt und einer Funktion,
- maximales Rotationsvolumen,
- Sonstiges

Auch wenn nicht alle Vorgehensweise gleich sind, so gibt es doch einige Strukturen, die man kennen sollte.

- Meist sollte man die Aufgabe von hinten aufrollen. *Was* muss maximal werden? [Fläche vom Dreieck, Viereck? Volumen von irgendwas? Abstände?] Die Formel dafür schlägt man in der Formelsammlung nach und schreibt sie schon mal auf.
- In der aufgeschrieben Formel darf jetzt nur noch *eine einzige* Unbekannte drin vorkommen. Was ist also in der Aufgabenstellung gegeben?
  Meist geht es um einen Punkt, der auf der Kurve liegt, und der den x-Wert x=u und den y-Wert y=f(u) hat. Die Koordinaten des Punktes sind oft in irgend einer Weise in der Rechnung beteiligt.
- Zum Schluss, wenn man nur noch eine Unbekannte in der Gleichung hat, leitet man ab und setzt die Ableitung Null [um das Extremum zu berechnen] oder falls man GTR/CAS verwenden darf, gibt man die Formel in den y-Editor des Grafik-Menüs ein und lässt den GTR das Maximum/Minimum bestimmen.

Wichtig:

(taucht in fast jeder Aufgabe auf)

senkrechte Strecken
berechnet man, indem man zwei *y-Werte* von einander abzieht (obere y-Wert minus untere y-Wert)!

waagerechte Strecken
berechnet man, indem man zwei *x-Werte* von einander abzieht (obere y-Wert minus untere y-Wert)!

A.21.02 reale Anwendungen (∰)

Es gibt ein paar Standardbeispiele von anwendungsbezogenen Aufgaben, die ich Ihnen keinesfalls vorenthalten möchte.

Bsp.1 → Ein rechteckiges Grundstück, das mit einer Seite an einer Mauer/Fluss/... liegt.

Bsp.2 → Ein Quader oder Zylinder mit maximalem Volumen oder minimaler Oberfläche.

Bsp.3 → Ein Kegel, dem ein Zylinder einbeschrieben wird [oder Pyramide mit einbeschriebenem Quader].

Bsp.4 → Mein Lieblingsbeispiel: Ein Rechteck mit aufgesetzem Halbkreis. In den zugehörigen Aufgabenstellungen handelt es sich dabei meist um einen Tunnel, einen Kanal, einen aufgeschütteten Damm, [auch als Grabstein habe ich diese Aufgabe schon gesehen] und vieles mehr.

Nun denn, beginnen wir.

Bsp.1

Herr Huber hat einen riesigen Garten, welcher ein einen Fluss grenzt. Eines Tages findet er am Dachboden einen 48 Meter langen Zaun, welchen er sofort verwenden will, um den Gänsen ein rechteckiges Flächenstück abzugrenzen. Welche Maße muss er für diese Gänsefläche wählen, damit sie den Fluss begrenzt und einen möglichst großen Flächeninhalt aufweist?

Lösung:
Wir rollen die Aufgabe von hinten auf:
In einer Extremwertaufgabe fragen wir uns immer:
„Was muss minimal oder maximal werden?"
In dieser Aufgabe ist das eine Rechtecksfläche.
Wir suchen ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt. Die freundliche Formelsammlung liefert uns für den Flächeninhalt eines Rechtecks die Formel:

$A_{Rechteck} = \mathbf{a \cdot b}$ ←

Ein wichtiges Zwischenziel für die Aufgabe ist es, die Formel für die Rechtecksfläche nur noch in Abhängigkeit von einer einzigen Variablen zu haben. Wenn das erfüllt ist, heißt die Gleichung **Zielfunktion**.

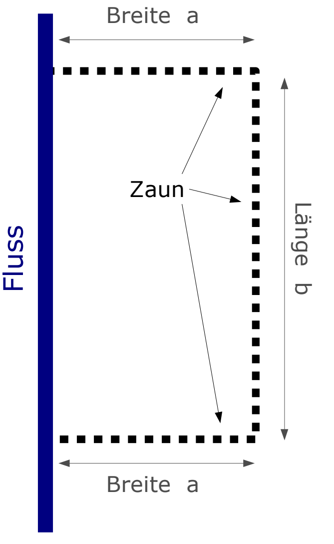
Unser Ziel ist, in dieser Formel nur noch *eine einzige* Unbekannte zu haben [statt den beiden „a" und „b"].
In einer Extremwertaufgabe gibt es immer eine Info, welche man verwenden muss. Hier wissen wir, dass drei Seiten des abgegrenzten Rechteck 48 Meter lang sein müssen [der Zaun!].
Also gilt: $2 \cdot a + 1 \cdot b = 48$
Diese Gleichung lösen wir nach b [oder a] auf und setzen es in die Flächeninhaltsformel ein.

$2a+b = 48 \quad \Rightarrow \quad b = 48-2a$

Aus $A_{Rechteck} = a \cdot b$ wird damit: $A(a) = a \cdot (48-2a)$ ← **Zielfunktion !**

Das was maximal werden sollte [die Rechtecksfläche] haben wir nun in Abhängigkeit von einer einzigen Unbekannten.

Der größte Teil der Denkleistung liegt damit hinter uns. Ab dieser Stelle berechnen wir „nur“ noch das Maximum der Flächeninhaltsfunktion A(a). Dieses tun wir, indem wir $A'(a)=0$ setzen. [1]



$A(a) = a\cdot(48-2a) =$ [umschreiben] $= 48a-2a^2$

$\Rightarrow A'(a) = 48-4a$

$\Rightarrow 48-4a=0 \quad \Rightarrow \dots \Rightarrow \quad a=12$

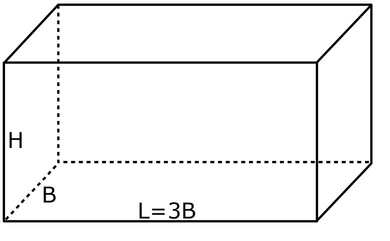
Haben wir ein Minimum oder ein Maximum?
$A''(a)=-4 < 0 \quad \Rightarrow$ Maximum!

Aus $a=12$ erhalten wir mit $b=48-2a$ auch b.
$b=48-2\cdot12=24$
Die Aufgabe ist gelöst: Die Maße, die Herr Huber für die Gänsefläche wählen muss sind: 12m x 24m.

Bsp.2

Eine Streichholzschachtel soll so gebaut werden, dass die Länge drei Mal so groß ist wie die Breite. Wie muss die Höhe gewählt werden, damit bei einer konstanten Oberfläche von 288cm² das Volumen maximal ist?

Lösung:
Eine Streichholzschachtel ist für Mathematiker ein Quader. Das Quadervolumen entnehmen wir der freundlichen Formelsammlung: $V=L\cdot B\cdot H$



Dieses Volumen müssen wir nun maximal hinkriegen. Dummerweise haben wir drei Unbekannte [„L“, „B“ und „H“] was ziemlich ungeschickt ist.
Aus der Aufgabe wissen wir, dass die Länge drei Mal so groß wie die Breite ist, es gilt also $L=3B$

$\Rightarrow V = L\cdot B\cdot H = 3B\cdot B\cdot H \quad \Rightarrow \quad V = 3B^2\cdot H$

Wir kennen noch was aus der Aufgabenstellung: Die Oberfläche beträgt 288!
Der freundlichen Formelsammlung entnehmen wir die Formel für die Oberfläche:
$O=2\cdot L\cdot B+2\cdot L\cdot H+2\cdot B\cdot H =$ [da L=2B] $= 2\cdot3B\cdot B+2\cdot3B\cdot H+2\cdot B\cdot H = 6B^2+8B\cdot H$

$\Rightarrow 6B^2+8B\cdot H = 224$ ←Nebenbedingung

Diese Formel lösen wir nach „H“ auf [nach „B“ aufzulösen wäre umständlich] und setzen das Ergebnis in die Volumenformel ein.

$6B^2+8B\cdot H = 288 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{288-6B^2}{8B}$ in $V=3B^2\cdot H$ einsetzen

$\Rightarrow V = 3B^{\cancel{2}}\cdot\frac{288-6B^2}{8\cancel{B}} = \frac{3}{8}B\cdot\left(288-6B^2\right) = 108B-2{,}25B^3$ ←Zielfunktion

Nun können wir endlich das Maximum berechnen. Falls in der Aufgabe ein GTR oder CAS erlaubt ist, macht man das damit. Anderenfalls leitet man die Volumenformal ab und setzt die Ableitung Null.

1 Falls ein GTR oder CAS erlaubt ist, kann man das Maximum natürlich auch damit bestimmen.

$V(B) = 108B - 2{,}25B^3 \quad \Rightarrow \quad V'(B) = 108 - 6{,}75B^2$

$V'(B)=0 \quad \Rightarrow \quad 108-6{,}75B^2=0 \quad \Rightarrow \quad B=\pm 4$

Die negative Breite ist uninteressant $\Rightarrow$ B=4

[streng genommen müsste man B=4 noch in die zweite Ableitung V''(B) einsetzen, aber da es nur einen einzigen Wert für „B" gibt, kommt sowieso kein anderer in Frage.]

Da die Höhe gefragt ist, setzen wir B=4 in die Formel $H = \frac{288-6B^2}{8B}$ ein

und erhalten: $H = \frac{288-6\cdot 4^2}{8\cdot 4} \approx 5{,}44$

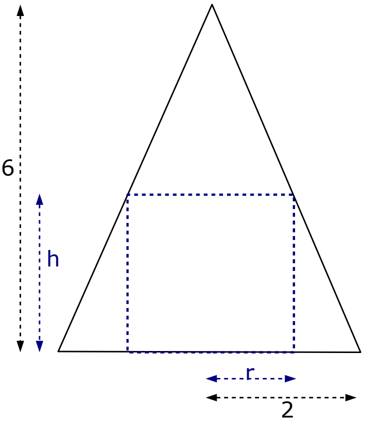
Die Höhe muss ca. 5,44 cm lang sein.

Bsp.3

In eine kegelförmige Turmspitze soll ein Zylinderförmiger Behälter eingebaut werden. Wie muss man die Maße des Zylinders wählen, wenn der Zylinder maximales Volumen haben soll und die Turmspitze 6m hoch ist und einen Grundkreisradius von 2m hat?

Lösung:

Zuerst eine schöne, bunte Skizze machen. Toll.



Rechts ist ein Querschnitt des Sachverhalts skizziert, d.h. die Turmspitze als Dreieck, der Behälter als Rechteck. Die Maße des Behälters nennen wir intelligenter Weise „r" und „h".

Jetzt muss ich leider ein schlimmes Wort verwenden: „Strahlensatz"!

Es gibt ein paar Aufgaben, da vereinfacht der Strahlensatz die Aufgaben sehr, sehr stark. Und dieses ist so ein Typ von Aufgabe.

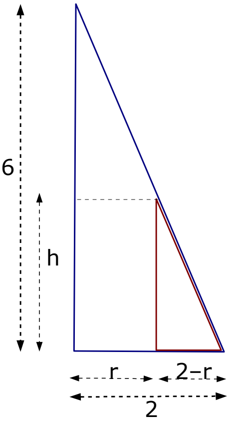
[Falls Sie mit dem Strahlensatz Probleme haben, schauen Sie nochmal in Kapitel X.01.02 nach (evtl. auf www.mathe-seite.de)]

Um den Strahlensatz anzuwenden, halbieren wir uns gedanklich die Figur und suchen zwei Dreiecke.

Den Strahlensatz könnte man nun so aufstellen:

$$\frac{\text{waagerechte Seite des kleinen Dreiecks}}{\text{waagerechte Seite des großen Dreiecks}} = \frac{\text{senkrechte Seite des kleinen Dreiecks}}{\text{senkrechte Seite des großen Dreiecks}}$$

$$\Rightarrow \frac{2-r}{2} = \frac{h}{6} \quad \Rightarrow \quad \cancel{6}\cdot\frac{2-r}{\cancel{2}} = h \quad \Rightarrow \quad h=3\cdot(2-r) \quad \Rightarrow \quad h=6-3r$$



Nun haben wir einen Zusammenhang zwischen „h" und „r", wir haben also die sogenannte Nebenbedingung gefunden.

Nun beginnen wir mit der eigentlichen Extremwertberechnung. Was sollte maximal werden?

Das Volumen des Zylinder!

Und laut der freundlichen Formelsammlung gilt für das Zylindervolumen die Formel: $V=\pi\cdot r^2\cdot h$

Das sind zwei Unbekannte, ein zu viel!

Also verwenden wir die Nebenbedingung und setzen $h=6-3r$ in die Volumenformel ein.

$\Rightarrow$ $V(r) = \pi \cdot r^2 \cdot (6-3r)$

Das ist nun die sogenannte Zielfunktion, da ja nur noch eine Unbekannte in der Endformel steckt. Nun berechnen wir das Maximum.

[Auch hier gilt wieder: Falls Sie einen GTR oder einen CAS verwenden dürfen, tun Sie das bitte an dieser Stelle. Ansonsten folgt die Berechnung „von Hand".]

$V(r) = \pi \cdot r^2 \cdot (6-3r) = 6\pi \cdot r^2 - 3\pi \cdot r^3 \quad \Rightarrow \quad V'(r) = 12\pi r - 9\pi \cdot r^2$

$V'(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12\pi r - 9\pi \cdot r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi r \cdot (12-9r) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 0, \quad r_2 = {}^{12}/_{9} \approx 1{,}33$

[$r_1=0$ kommt nicht in Frage, das wäre ja ein komischer Zylinder.] $\Rightarrow$ **$r=1{,}33$**

Wegen $h=6-3r$ folgt $h = 6-3\cdot 1{,}33 \approx 4$ $\Rightarrow$ **$h=4$**

Bsp.4

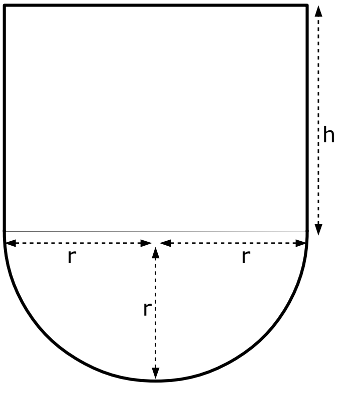
Ein Designer entwirft einen neuen Toilettendeckel, welcher die Form eines Rechtecks hat, an welches ein Halbkreis angefügt ist. [Siehe nebenstehende Skizze]. Wie breit muss der Toilettendeckel sein, wenn er eine gesamte Fläche von 1234cm² einnehmen soll, und der Umfang minimal sein soll?

Lösung:

Der Umfang soll minimal werden. Also stellen wir eine Formel für den Umfang auf, formen so lang um, bis nur noch eine einzige Unbekannte drin steckt und dann leiten wir ab und setzen die Ableitung Null.

Der Umfang des Toilettendeckels setzt sich aus drei Rechteckseiten zusammen und einem Halbkreis.

Die Höhe des Rechtecks nennen wir „h", die Breite des Rechtecks ist der doppelte Radius, den Umfang des Halbkreises berechnet man mit $U=\pi \cdot r$



$\Rightarrow$ $U_{Deckel} = 2\cdot h + 2\cdot r + \pi \cdot r$

Bekannt ist die Fläche des Deckels. Sie beträgt 95cm². Die Fläche setzt sich aus der Rechteckfläche und einem Halbkreis zusammen.

$A_{Rechteck} = h\cdot 2r, \qquad A_{Halbkreis} = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2$

$$\Rightarrow \quad A_{gesamt} = h\cdot 2r + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2 = 1234 \qquad |\cdot 2$$

$$4\cdot h\cdot r + \pi\cdot r^2 = 2468 \qquad |-\pi\cdot r^2$$

$$4\cdot h\cdot r = 2468 - \pi\cdot r^2 \qquad |:4r$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{2468-\pi\cdot r^2}{4r}$$

Wir haben nach „h" aufgelöst und setzen das Ergebnis in die Umfang-Formel ein.

$$\Rightarrow \quad U_{Deckel} = \cancel{2}\cdot\frac{2468-\pi\cdot r^2}{\cancel{4}r} + 2\cdot r + \pi\cdot r = \frac{\cancel{2468}}{\cancel{2}r} - \frac{\pi\cdot r^{\cancel{2}}}{2\cancel{r}} + 2\cdot r + \pi\cdot r = \frac{1234}{r} - \frac{1}{2}\pi\cdot r + 2\cdot r + \pi\cdot r$$

$$\Rightarrow \quad U(r) = \frac{1234}{r} + 2\cdot r + \frac{1}{2}\pi\cdot r = 1234\cdot r^{-1} + 2\cdot r + \frac{1}{2}\pi\cdot r$$

[ab hier könnte man das Minimum mit dem GTR oder CAS berechnen]

$\Rightarrow\ U'(r) = -1234\cdot r^{-2}+2+\frac{1}{2}\pi$

Für das Minimum setzen wir die Ableitung Null.

$U'(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad -1234\cdot r^{-2}+2+\frac{1}{2}\pi = 0$ umschreiben

$-\frac{1234}{r^2}+2+\frac{1}{2}\pi = 0$ $|\cdot r^2$

$-1234+\left(2+\frac{1}{2}\pi\right)\cdot r^2 = 0$ $|+1234$

$\left(2+\frac{1}{2}\pi\right)\cdot r^2 = 1234$ $|\ 2+\frac{1}{2}\pi \approx 3{,}57$

$3{,}57\cdot r^2 = 1234$ $|:3{,}57$

$r^2 \approx 345{,}66 \quad \Rightarrow \quad r \approx 18{,}59$

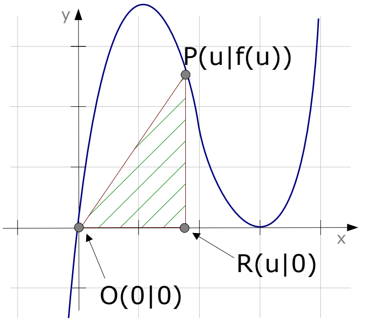
Die Breite des Toilettendeckels beträgt b = 2·18,59 = 37,18 cm!

A.21.03 Maximale Dreiecks- und Rechtecksfläche (∰)

Bsp.5

Der Punkt P(u|v) mit 0<u<3 liegt auf der Funktion $f(x) = x^3-6x^2+9x$
Wie muss u gewählt werden, damit die Fläche des Dreiecks OPR mit R(u|0) maximal wird ?

Lösung:
Erstens: Der Punkt P(u|v) soll auf der Funktion liegen.
Damit muss v=f(u) sein. [Ist ja beides der y-Wert beim x-Wert u]
Ab jetzt brauchen wir nie wieder die Variable „v".
Unser Punkt P lautet ab jetzt P(u|f(u)).
Zweitens: Den Punkt P zeichnen wir irgendwo ein.
Einzige Bedingung ist, dass der x-Wert zwischen 0 und 3 liegt [und P muss natürlich auf f(x) liegen].
Drittens: Der Punkt R hat den gleichen x-Wert wie P. Also liegt R genau oberhalb oder unterhalb von P. Da er den y-Wert 0 hat, liegt er in unserer Zeichnung auf der y-Achse, genau unterhalb von P.
[O ist immer der Koordinatenursprung]



Nun entnehmen wir der freundlichen Formelsammlung die Formel für die Dreiecksfläche:

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\text{Grundlinie}\cdot\text{Höhe} = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h$$

Die Grundlinie g ist die Strecke $\overline{OR}$, sie verläuft waagerecht und ist somit die Differenz der x-Werte der beiden Punkte.

$\Rightarrow\ g = x_R-x_O = u-0 = u$

Die Höhe h ist die Strecke $\overline{PR}$, sie verläuft senkrecht und ist somit die Differenz der y-Werte der beiden Punkte. $\Rightarrow\ h = y_P-y_R = f(u)-0 = f(u)$

Nun haben wir die Dreiecksfläche in Abhängigkeit von nur u und haben das Schlimmste hinter uns.

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u) = \frac{1}{2} u \cdot (u^3 - 6u^2 + 9u) \Rightarrow A_\Delta = \frac{1}{2}u^4 - 3u^3 + \frac{9}{2}u^2$ ← Zielfunktion

Wir wollen A_Δ maximal werden lassen [Maxima = Hochpunkte rechnet man aus, indem man die erste Ableitung Null setzt]. Also leiten wir A_Δ ab und setzen dann die Ableitung = Null.

$A'_\Delta = 2u^3 - 9u^2 + 9u$

$A'_\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad 2u^3 - 9u^2 + 9u = 0$

$2u \cdot (u^2 - 4{,}5u + 4{,}5) = 0$ [1]

$u_1 = 0 \qquad u_{2,3} = 2{,}25 \pm \sqrt{2{,}25^2 - 4{,}5} = 2{,}25 \pm 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 0, \; u_2 = 1{,}5 \quad u_3 = 3$

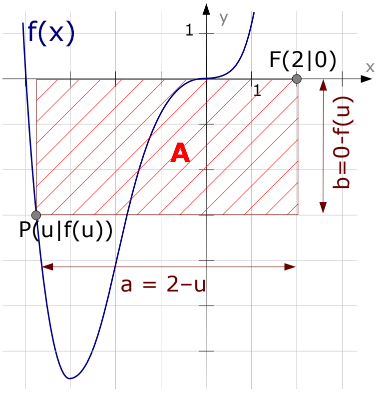
Wegen der Anfangsbedingung „0<u<3" fallen u_1 und u_3 weg, die einzige Lösung ist **u=1,5**.

Ist zwar nicht gefragt, aber:
der Punkt P hat somit die Koordinaten P(1,5|f(1,5))=P(1,5|3,375)
die Fläche des Dreiecks beträgt: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5^4 - 3 \cdot 1{,}5^3 + \frac{9}{2} \cdot 1{,}5^2 = 2{,}53..$

Bsp.6

Es sei $f(x) = 0{,}25x^4 + x^3$
Der Punkt P(u|v), welcher auf f(x) liegt, bildet zusammen mit dem Punkt F(2|0) ein Rechteck, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind.
Wie muss u<0 gewählt werden, damit der Flächeninhalt des Rechtecks ein Extremum annimmt? Um was für eine Art Extremum handelt es sich ?

Lösung:
Nachdem wir uns alle erfolgreich klar gemacht haben, wie das Rechteck im Koordinatensystem liegen muss, entnehmen wir der freundlichen Formelsammlung die Flächenformel für's Rechteck: $A_{Rechteck} = a \cdot b$



Was sind Länge und Breite des Rechtecks ?
Das rechte Ende des Rechtecks liegt beim x-Wert $x_F=2$, das linke Ende des Rechtecks liegt bei $x_P=u$
⇒ Rechtecklänge = a = 2−u
Das obere Ende des Rechtecks liegt beim y-Wert $y_F=0$, das untere Ende liegt bei $y_P=f(u)$
⇒ Reckecksbreite = b = 0 − f(u) = -f(u)

Die Fläche des Rechtecks berechnet sich also über:
$A_{Rechteck} = A(u) = a \cdot b = (2-u) \cdot (\, -f(u)\,) =$

1 Im Folgenden verwende ich nur die p-q-Formel. Man könnte auch die a-b-c-Formel verwenden.

$= (2-u)\cdot(-0{,}25u^4-u^3) =$
$= -0{,}5u^4-2u^3+0{,}25u^5+u^4 =$
$= 0{,}25u^5+0{,}5u^4-2u^3$ ←

Normalerweise gibt man ab jetzt $A(u)=(2-u)\cdot(-0{,}25u^4-u^3)$ in den y-Editor des GTR ein und lässt sich im Grafikmenü das Maximum ausgeben.

Fläche wird extremal, wenn A' = 0.
Also Ableitung der Fläche berechnen.
$A'(u) = 1{,}25u^4+2u^3-6u^2$
$A'(u)=0 \quad \Rightarrow \quad 1{,}25u^4+2u^3-6u^2 =0$
$u^2\cdot(1{,}25u^2+2u-6) = 0$

$u_{1,2}=0 \qquad 1{,}25u^2+2u-6 = 0$

p-q-Formel

$1{,}25u^2+2u-6=0 \quad |:1{,}25$

$u^2+1{,}6u-4{,}8=0$

$u_{3,4}=-0{,}8\pm\sqrt{0{,}8^2+4{,}8}$

$\Rightarrow ... \Rightarrow u_3\approx1{,}53 \quad u_4\approx-3{,}13$

a-b-c-Formel

$1{,}25u^2+2u-6=0$

$u_{3,4}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1{,}25\cdot(-6)}}{2\cdot1{,}25}$

$\Rightarrow ... \Rightarrow u_3\approx1{,}53 \quad u_4\approx-3{,}13$

Da laut Aufgabenstellung $u<0$ sein soll, fallen $u_{1,2}=0$ und $u_3=1{,}53$ weg.
Als einzige Lösung bleibt übrig: $u = -3{,}13$

Um was für eine Art von Extremum handelt es sich?
Damit ist gemeint, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt.
Um das zu herauszufinden, muss man $u=-3{,}13$ in die zweite Ableitung einsetzen und das Vorzeichen betrachten.
$A'(u) = 1{,}25u^4+2u^3-6u^2 \;\Rightarrow\; A''(u) = 5u^3+6u^2-12u$
$A''(-3{,}13) = 5\cdot(-3{,}13)^3+6\cdot(-3{,}13)^2-12\cdot(-3{,}13) \approx -57$
Da $A''(-3{,}13)$ negativ ist, muss es sich um ein Maximum [Hochpunkt] handeln.
Antwort:
Bei u=-3,13 nimmt das Rechteck einen *maximalen* Flächeninhalt an!

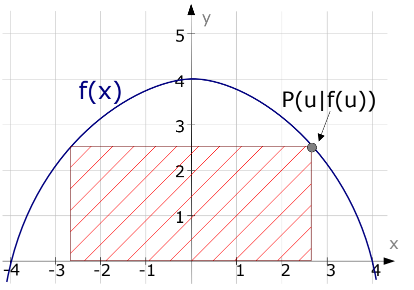
A.21.04 Umfang ($\oiiint$)

Bsp.7
$f(x)=-0{,}25x^2+4$ bildet mit der x-Achse eine Fläche, in welche ein achsenparalleles Rechteck eingeschrieben wird. Wie müssen die Koordinaten der Eckpunkte gewählt werden, damit der Umfang des Rechtecks extremal wird? Um was für eine Art von Extremum handelt es sich?

Lösung
Erst skizzieren wir natürlich die Funktion.
Wir müssen den Umfang des Rechtecks extremal wählen, also stellen wir eine Formel für den Umfang des Rechtecks auf.
Der Umfang setzt sich zusammen aus: zweimal Breite und zweimal Höhe des

Rechtecks.

Die Breite: die *halbe* Breite beginnt bei der y-Achse und geht nach rechts bis zum Punkt P. Diese Strecke ist genau der x-Wert des Punktes, also hat die halbe Breite den Wert „u“. Die gesamte Breite des Rechtecks hat den Wert b=2u.



Die Höhe: die Höhe des Rechtecks beginnt unten bei der x-Achse und endet oben beim Punkt P. Diese Strecke ist genau der y-Wert von P, also h=f(u).

Die Formel für den Umfang wäre also:

$U(u)=2\cdot b+2\cdot h=2\cdot 2u+2\cdot f(u)=4u+2\cdot(-0{,}25u^2+4) \quad\Rightarrow\quad U(u) = 4u-0{,}5u^2+8$

Nun soll der Umfang extremal sein, dazu muss man die Ableitung Null setzen.

$U(u) = 4u-0{,}5u^2+8 \quad\Rightarrow\quad U'(u)=4-u$

$U'(u)=0 \;\Rightarrow\; 4-u=0 \quad\Rightarrow\quad u=4 \;\Rightarrow\; P(4|f(4)) \quad\Rightarrow\quad P(4|0)$

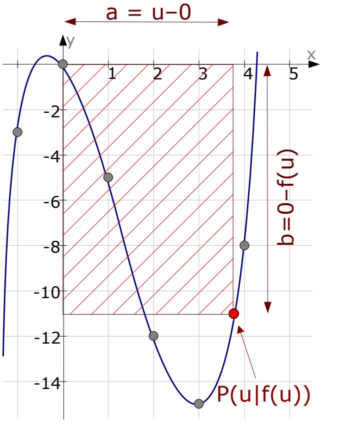
Da der Eckpunkt P den y-Wert f(4)=0 besitzt, schrumpft die Höhe des Rechtecks auf Null zusammen, das tolle Rechteck verkommt zu einemu) einzigen dünnen Strich auf der x-Achse. Na, super!

Bsp.8

Der Kurvenpunkt P(u|v) liegt im 4. Quadranten auf der Funktion $f(x)=x^3-4x^2-2x$ und ist Eckpunkt eines Rechtecks, von welchem je eine Seite auf der x-Achse und eine auf der y-Achse liegt. Bestimmen Sie die Koordinaten von P so, dass der Umfang des Rechtecks extremal wird. Um was für ein Extremum handelt es sich?

Lösung:

Bevor man überhaupt mit dem Nachdenken beginnt, zeichnet man f(x) [z.B. mit Hilfe einer Wertetabelle].



Danach zeichnet man den Punkt P irgendwo auf der Funktion ein. Wichtig ist natürlich nur, dass P im 4. Quadranten liegt [das rechte, untere Feld].

Nun kann man auch das Rechteck einzeichnen.

Den Umfang des Rechtecks [welcher ja extremal werden soll] berechnet man über die Formel U=2a+2b.

Annahme a sei die waagerechte Seite. Waagerechte Strecken sind immer die Differenz zweier x-Werte. Hier ist der rechte x-Wert derjenige von P, also $x_{rechts}=u$. Der linke x-Wert ist der von der y-Achse, also $x_{links}=0$. $\quad\Rightarrow\quad a = x_{rechts}-x_{links} = u-0 = u$

b ist nun die senkrechte Seite. Senkrechte Strecken sind immer die Differenz zweier y-Werte. Hier ist der untere y-Wert derjenige von P, also $x_{unten}=f(u)$. Der obere y-Wert ist der von der x-Achse, also $y_{oben}=0$.

$\Rightarrow\; b = y_{oben}-y_{unten} = 0-f(u) = -f(u) = -u^3+4u^2+2u$

$U(u) = 2a+2b = 2\cdot(u-0)+2\cdot(0-f(u)) = 2u-2\cdot f(u) = 2u-2\cdot(u^3-4u^2-2u) =$
$= 2u-2u^3+8u+4u=-2u^3+8u^2+6u$
$U'(u)=-6u^2+16u+6$
$U'(u)=0 \quad \Rightarrow \quad -6u^2+16u+6=0 \quad \Rightarrow$ [p-q-Formel oder a-b-c-Formel] $\Rightarrow u_1=3 \quad u_2=-{}^1/_3$

Da P im 4.Quadranten liegen soll, kann u nicht negativ werden.
$u_2=-{}^1/_3$ kommt daher nicht in Frage. Es muss gelten: **u=3**
Der y-Wert von P ist: $y_P=f(3)=3^3-4\cdot3^2-2\cdot3=-15 \quad \Rightarrow$ **P(3|-15)**

Um was für eine Art von Extremum handelt es sich?
Hierbei ist gefragt, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt.
Dafür betrachten wir die zweite Ableitung.
$U''(u)=-12u+16 \quad \Rightarrow \quad U''(3)=-12\cdot3+16=-20<0 \quad \Rightarrow$ **Maximum**

A.21.05 Maximales Kegel- und Zylindervolumen (∰)

Bsp.9

Es sei $f(x) = \frac{1}{15}x^5-\frac{2}{3}x^3$

Der Kurvenpunkt P(u|v) mit u>0 bildet mit dem Koordinatenursprung und dem Punkt R(0|v) ein Dreieck, welches um die y-Ache rotiert. Bestimmen Sie die Koordinaten von P derart, dass das Volumen des entstehenden Rotationskörpers dabei ein Extremum annimmt.
Bestimmen Sie die Art des entstandenen Extremums.

Lösung:
Erst sollte man sich klar werden, dass ein Kegel entsteht. Wenn dieser um die y-Achse rotiert, beginnt der Radius beim x-Wert x=0 und endet beim x-Wert x=u
$\Rightarrow \quad r = u-0= u.$
Die Kegelhöhe beginnt unten beim y-Wert y=v=f(u) und endet oben bei der x-Achse, also bei y=0 $\quad \Rightarrow \quad h=0-f(u) = -f(u)$

Der Formelsammlung entnimmt man die Formel für das Volumen des Kegels:
$V_{kegel} = \frac{\pi}{3}\cdot r^2\cdot h$

In unserem Fall gilt ja: r=u und h=-f(u)

$\Rightarrow V_{Kegel} = \frac{\pi}{3}\cdot r^2\cdot h = \frac{\pi}{3}\cdot u^2\cdot\left(-f(u)\right)$

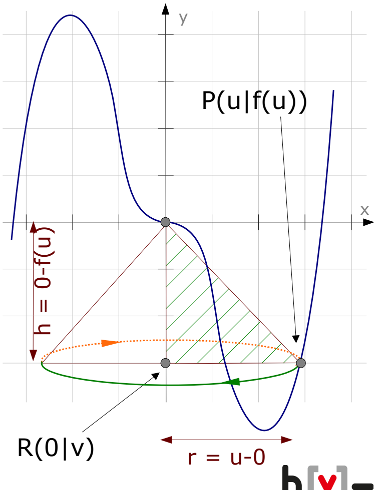
$\Rightarrow V(u) = \frac{\pi}{3}\cdot u^2\cdot\left(-\frac{1}{15}u^5+\frac{2}{3}u^3\right) = -\frac{\pi}{45}u^7+\frac{2\pi}{9}u^5$

Das Volumen wird maximal, wenn V'(u)=0 ist

$V'(u) = -\frac{7\pi}{45}u^6+\frac{10\pi}{9}u^4$ mit $V'(u) = 0$

$\Rightarrow -\frac{7\pi}{45}u^6+\frac{10\pi}{9}u^4 = 0 \quad | \cdot 45 \quad |:\pi$

$-7u^6 + 50u^4 = 0 \quad | \; u^4$ ausklammern



$u^4 \cdot (-7u^2+50) = 0$

$u_1=0 \qquad -7u^2+50 = 0 \qquad | -50 \quad |:(-7) \quad | \sqrt{\ }$

$u_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{50}{7}} \approx \pm 2{,}67$

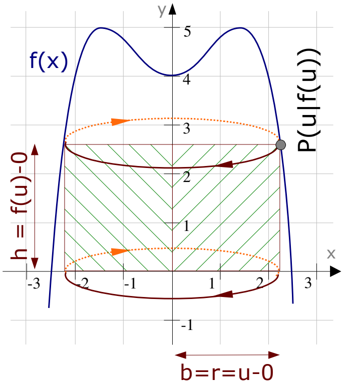
Wegen der Anfangsbedingung u>0 bleibt
nur die Lösung <u>u=+2,67</u> übrig.

[weil nur ein u-Wert übrig ist, haben wir nachgewiesen, dass es *genau ein* Maximum gibt. Nun müssen wir noch nachweisen, dass es ein *Maximum* ist.]

$V''(u) = -\frac{42\pi}{45}u^5+\frac{40\pi}{9}u^3 \qquad V''(2{,}67) = -132{,}1 \quad \Rightarrow$ **Maximum bei u = 2,67**

Bsp.10

Gegeben ist $f(x) = -0{,}25x^4+x^2+4$
Die Punkte P(u|f(u)) und R(u|0) sind Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks, das mit zwei Seiten auf den Koordinatenachsen liegt. Dieses Rechteck rotiert um die y-Achse.
Wie groß kann das Volumen des entstehenden Rotationskörper für 0<u<2,5 höchstens werden ?



Lösung:
Wenn ein Rechteck rotiert, entsteht ein Zylinder.
Zuerst brauchen wir jedoch das Rechteck. Der Punkt P wird irgendwo auf der Kurve eingezeichnet. [Das ist eigentlich in jeder Aufgabe so.] Einzige Bedingung ist, dass der x-Wert irgendwo zwischen 0 und 2,5 liegt. Da zwei Rechteckseiten auf der x-Achse bzw. der y-Achse liegen, gibt es für die Lage des Rechtecks nur eine Möglichkeit. [Siehe Skizze]
Die Breite des Rechtecks ist eine waagerechte Entfernung. Um sie zu berechnen, muss man den rechten x-Wert minus den linken x-Wert von einander abziehen. $\quad b = x_{rechts} - x_{links} = u - 0 = u$
Die Rechteckbreite ist gleichzeitig der Zylinderradius $\quad \Rightarrow \quad r_{Zyl} = u$

Die Höhe des Rechtecks ist eine senkrechte Entfernung.
Um sie zu berechnen, muss man den unteren y-Wert vom oberen y-Wert abziehen.
$h = f(u) - 0 = f(u)$
Die Rechteckhöhe ist gleichzeitig die Zylinderhöhe $\quad \Rightarrow \quad h_{Zyl} = f(u)$

Der freundlichen Formelsammlung entnehmen wir die Formel für das Volumen eines Zylinders und setzen anschließend r und h ein.

$V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot u^2 \cdot f(u) = \pi \cdot u^2 \cdot (-0{,}25u^4 + u^2 + 4)$

$\Rightarrow V_{Zylinder} = -0{,}25\pi \cdot u^6 + \pi \cdot u^4 + 4\pi \cdot u^2$.

Um zu schauen, wie groß das Volumen höchstens werden kann, brauchen wir das maximale Volumen. Dafür müssen wir, oh wie ungewöhnlich, `mal wieder $V'(u) = 0$ setzen. Zuerst rechnen wir aber $V'(u)$ aus.

$V(u) = -0{,}25\pi \cdot u^6 + \pi \cdot u^4 + 4\pi \cdot u^2$ ←

Falls ein GTR/CAS erlaubt ist, gibt man ab dieser Stelle $A(u) = -1{,}5\pi \cdot u^5 + 4\pi \cdot u^3 + 8\pi u$ in den y-Editor ein und lässt sich im Grafikmenü das Maximum ausgeben.

$V'(u) = -1{,}5\pi \cdot u^5 + 4\pi \cdot u^3 + 8\pi \cdot u$

$V'(u) = 0$

$-1{,}5\pi \cdot u^5 + 4\pi \cdot u^3 + 8\pi \cdot u = 0 \quad | :\pi$

$-1{,}5 \cdot u^5 + 4 \cdot u^3 + 8 \cdot u = 0$ u ausklammern

$u \cdot (-1{,}5u^4 + 4u^2 + 8) = 0$

$u_1 = 0 \qquad -1{,}5u^4 + 4u^2 + 8 = 0$ Substitution $u^2 = z$

$-1{,}5z^2 + 4z + 8 = 0$ p-q-Formel oder a-b-c-Formel [1]

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \quad z_1 = 4 \qquad z_2 = -1{,}33$ Resubstitution

$u^2 = 4 \qquad u^2 = -1{,}33$ Wurzel ziehen

$u_{2,3} = \pm 2 \qquad u_{4,5} = ---$

Wir erhalten also drei Werte für u: $u_1 = 0$, $u_2 = -2$, $u_3 = 2$

Da laut Aufgabenstellung u zwischen 0 und 2,5 liegen soll [0 ausschließlich!, da „$0<u$" und nicht „$0 \leqslant u$"], ist $u=2$ die einzige Lösung, die in Frage kommt. $\Rightarrow \quad u=2$

Das maximale Volumen kann man nun einfach berechnen.

$V_{max} = V(2) = -0{,}25\pi \cdot 2^6 + \pi \cdot 2^4 + 4\pi \cdot 2^2 \approx 75{,}4$

Antword:

Däm maksimale Wolumän isch funfundsipzikgommafier.

1 Um die Rechnung nicht all zu sehr in die Länge zu ziehen überspringe ich die p-q-Formel bzw. die a-b-c-Formel. Das kann „der motivierte Leser" gerne selbst rechnen.

A.21.06 Maximaler Abstand zweier Funktionen (∰)

Bsp.11

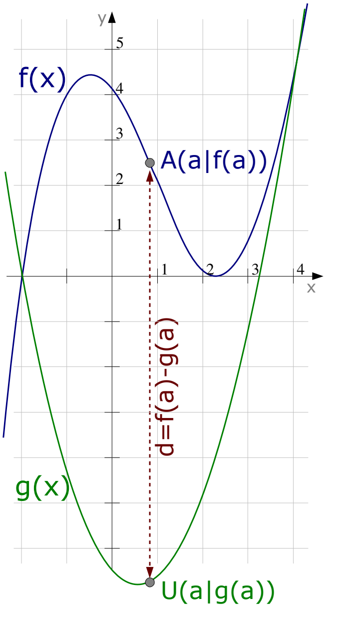
Die Gerade x=a mit -2<a<4 schneidet die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{25}{6}$ (1)

im Punkt A und die Funktion $g(x) = x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{13}{2}$ im Punkt U.

Bestimmen Sie a so, dass die Länge der Strecke $\overline{AU}$ maximal wird!

Lösung:

Die Gerade x=a ist eine senkrechte Gerade. Es wurde also nur gesagt, dass es zwei Punkte A und U gibt, die den gleichen x-Wert haben (nämlich „a"), also genau übereinander liegen. Der Punkt A liegt auf f(x) und der Punkt U auf g(x). Wenn die Strecke $\overline{AU}$ maximal werden soll, soll wohl der Abstand zwischen den beiden Punkten maximal werden. Man zeichnet die beiden Punkte irgendwo ein und legt los.



[Zur Bedingung -2<a<4 : Bei x=-2 und x=4 sind die Schnittpunkte der Funktionen. Das ist aber nicht wichtig.]

Abstand zwischen A und U:

Es handelt sich um eine senkrechte Strecke. Daher werden die y-Werte von einander abgezogen.

$d(a) = f(a) - g(a)$

$d(a) = \left(\frac{1}{3}a^3 - a^2 - \frac{5}{4}a + \frac{25}{6}\right) - \left(a^2 - \frac{5}{4}a - \frac{13}{2}\right) = \frac{1}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{32}{3}$

Der Abstand ist maximal, wenn d'(a)=0

$d(a) = \frac{1}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{32}{3} \quad \Rightarrow \quad d'(a) = a^2 - 4a$

$d'(a) = 0$

$a^2 - 4a = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot (a-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_2 = 4$

Nur a=0 erfüllt die Bedingung -2<a<4 ⇒ **a = 0**

[In der Zeichnung sind die Punkte A und U also etwas zu weit rechts eingezeichnet.]

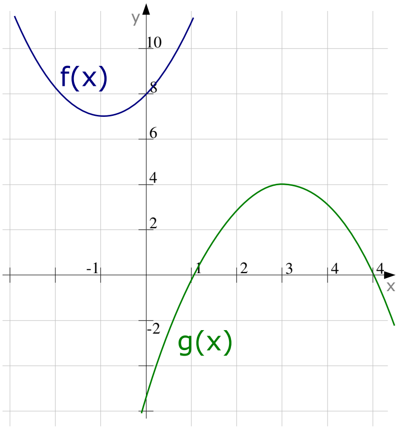
Bsp.12

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2 + 2x + 8$ und $g(x) = -x^2 + 6x - 1$.

Bestimmen Sie das Minimum des senkrecht gemessenen Abstandes zwischen den beiden Funktionen.

1 vergleiche mit Funktion aus Kap A.19.02

Lösung:
Einen senkrecht gemessenen Abstand bestimmt man, in dem man die Funktionen von einander abzieht. Wir müssen aber die kleinere Funktion von der größeren Funktion abziehen. Welche Funktion liegt oben, welche liegt unten? Um das zu erfahren, skizziert man die Funktionen kurz.



Offensichtlich liegt f(x) oben, g(x) unten.

$\Rightarrow\ d(x) = f(x)-g(x) =$

$= (x^2+2x+8) - (-x^2+6x-1) =$

$= x^2+2x+8 + x^2-6x+1 = 2x^2-4x+9$

$d'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad 4x-4=0 \quad\Rightarrow\quad x=1$

x=1 in die Abstandformel einsetzen liefert den minimalen Abstand: $d(1)=2\cdot 1^2-4\cdot 1+9=7$

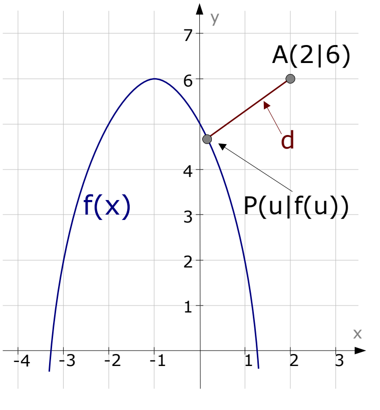
Der minimale Abstand zwischen f(x) und g(x) beträgt 7 LE.

A.21.07 Abstand Punkt-Funktion (∰)

Bsp.13

Welcher Punkt der Funktion $f(x) = -x^2-2x+5$ hat von A(2|6) den kleinsten Abstand?
Wie groß ist dieser Abstand ?

Lösung:
Man führt die Aufgabe auf: Abstand Punkt-Punkt zurück
Laut Formelsammlung [oder über Pythagoras] berechnet man den Abstand zwischen zwei Punkten $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ mit der Formel: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$



Welches sind hier unsere beiden Punkte?
Der eine Punkt ist ganz klar A(2|6),
den anderen Punkt erhalten wir über den unendlich trickreichen Trick: $P(u|f(u))$ bzw. $P(u|-u^2-2u+5)$
Hierbei ist P der gesuchte, unbekannte Kurvenpunkt.
Nun ist der Abstand von A zu der Funktion:

$$d=\sqrt{(x_P-x_A)^2+(y_P-y_A)^2} = \sqrt{(u-2)^2+(-u^2-2u+5-6)^2}$$

$$d(u) = \sqrt{(u-2)^2+(-u^2-2u-1)^2} = \text{[Klammern auflösen]} =$$

$$=\ldots= \sqrt{u^4+4u^3+7u^2+5}$$

Nun möchten wir das Minimum von d(u) berechnen, also bestimmen wir die Ableitung von d(u) und setzen die Null.

$$d(u) = \sqrt{u^4+4u^3+7u^2+5} = (u^4+4u^3+7u^2+5)^{0,5}$$

$d'(u) = 0{,}5\cdot(u^4+4u^3+7u^2+5)^{-0{,}5}\cdot(4u^3+12u^2+14u) = \ldots = \frac{4u^3+12u^2+14u}{2\sqrt{u^4+4u^3+7u^2+5}}$

$d'(u)=0 \Rightarrow \frac{4u^3+12u^2+14u}{2\sqrt{u^4+4u^3+7u^2+5}}=0 \qquad | \cdot 2\sqrt{u^4+4u^3+7u^2+5}$

$4u^3+12u^2+14u = 0 \qquad$ u ausklammern

$u\cdot(4u^2+12u+14) = 0$

$u_1=0 \quad \vee \quad 4u^2+12u+14=0 \qquad$ p-q-Formel oder a-b-c-Formel

keine Lösung

Einzige Lösung ist u=0. $\Rightarrow$ P(0|f(0)) $\Rightarrow$ **P(0|5)**.

Der Abstand ist zwar nicht gefragt, aber man könnte ihn einfach berechnen, wenn man u=0 in die Abstandformel einsetzt. $\Rightarrow$ $d=\sqrt{0^4+4\cdot0^3+7\cdot0^2+5}=\sqrt{5}$.

Bsp.14

Wie groß ist der Abstand von g(x)=2x–1 zum Punkt P(5|4) mindestens ?

Lösung

Natürlich erfolgt die Berechnung genau gleich, wie in der letzten Aufgabe.
Wir führen das Ganze auf die Abstandsberechnung von zwei Punkten zurück.
Der eine Punkt hat die Koordinaten P(7|3), der zweite Punkt liegt auf der Funktion, hat also die Koordinaten G(u|g(u)), also G(u|2u–1).
Nun berechnen wir den Abstand mit der Formel: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

P und G einsetzen

$d(P,G)=\sqrt{(u-7)^2+(2u-1-3)^2} = \sqrt{(u-7)^2+(2u-4)^2} =$

$= \sqrt{u^2-14u+49+4u^2-16u+16} = \sqrt{5u^2-30u+65}$

Den kleinsten Abstand erhält man, in dem man die Ableitung von d(P,G) Null setzt.

$d(P,G) = d(u) = \sqrt{5u^2-30u+65} = (5u^2-30u+65)^{0{,}5}$

$d'(u) = 0{,}5\cdot(5u^2-30u+65)^{-0{,}5}\cdot(10u-30) = \frac{10u-30}{2\sqrt{5u^2-30u+65}}$

$d'(u)=0 \Rightarrow \frac{10u-30}{2\sqrt{5u^2-30u+65}}=0 \qquad | \cdot 2\sqrt{5u^2-30u+65}$

$10u-30 = 0 \qquad |+30 \quad |:10$

$u = 3$

Wenn man erst „u“ berechnet hat, ist alles Andere einfach.
Den y-Wert des Punktes G bestimmt man, in dem man u=3 in die Funktion einsetzt. $y_G=f(3)=2\cdot3-1=5$ $\Rightarrow$ G(3|5).
Den Abstand bestimmt man, in dem man u=3 in die Abstandsformel einsetzt.

$d_{min} = d(3) = \sqrt{5\cdot3^2-30\cdot3+65} = \sqrt{20}$

A.21.08 Abstand Punkt-Funktion mit GTR/CAS (∰)

Dieses Kapitel ist nur für **GTR**-Anwendung gedacht.

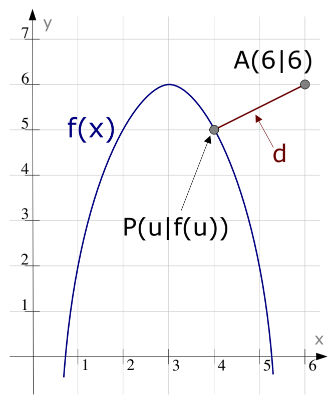
Abstand Punkt-Funktion ist eigentlich immer nur gefragt, wenn man den grafischen Taschenrechner verwenden darf. Deswegen und weil die Rechnung von Hand so unglaublich hässlich wird, verwenden wir in diesem Kapitel ausnahmsweise den Taschenrechner.

Bsp.15

Welcher Punkt der Funktion $f(x) = -x^2+6x-3$
hat von A(6|6) den kleinsten Abstand?
Wie groß ist dieser Abstand ?

Lösung:
Man führt die Aufgabe auf: Abstand Punkt-Punkt zurück
Laut Formelsammlung [oder über Pythagoras] berechnet man den Abstand zwischen zwei Punkten $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ mit der Formel: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Welches sind hier unsere beiden Punkte?
Der eine Punkt ist ganz klar A(6|6),
den anderen Punkt erhalten wir über den unendlich trickreichen Trick: $P(u|f(u))$ bzw. $P(u|-u^2+6u-3)$
Hierbei ist P der gesuchte, unbekannte Kurvenpunkt.
Nun ist der Abstand von A zu der Funktion:
$d=\sqrt{(x_P-x_A)^2+(y_P-y_A)^2} = \sqrt{(u-6)^2+(-u^2+6u-3-6)^2}$
$\Rightarrow \ d(u) = \sqrt{(u-6)^2+(-u^2+6u-9)^2}$
Diesen Abstand geben wir als Funktion in den y-Editor des Taschenrechners ein und lassen uns im Grafikmenü das Minimum anzeigen.
Man erhält das Minimum: Min(4 | 2,23..)
Der erhaltene x-Wert ist „u", der y-Wert ist unser „d".
$\Rightarrow$ x=u=4 $\Rightarrow$ P(4 | f(4)) $\Rightarrow$ y=d=2,23
Antwort:
Der Kurvenpunkt mit dem kleinsten Abstand zum Punkt A(6|6) ist P(4|5).
Der gesuchte, kleinste Abstand ist d=2,23.



Bsp.16

Welcher Punkt der Funktion $f(x) = 0{,}25x\cdot(x-4)^2$
hat von P(13|5) den kleinsten Abstand?
Wie groß ist dieser Abstand ?

Lösung:
Wir gehen wie in Bsp.6 vor. Wir betrachten die Punkte P(13|5) und B(u|f(u)).
Der Abstand von P zu B ist $d = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(u-13)^2+(0{,}25u\cdot(u-4)^2-5)^2}$
Die wunderschöne Wurzel geben wir als Funktion ins Grafikmenü ein und lassen uns das Minimum berechnen. Man erhält: Min(6 | 7,07).
Das bedeutet: u=6 $\Rightarrow$ B(6 | f(6)) $\Rightarrow$ der gesuchte Punkt ist B(6 | 6)
d = 7,07 $\Rightarrow$ der gesuchte Abstand ist d=7,07.

A.21.09 Hässliches (∮)

Wenn ein Punkt möglichst weit links liegen soll, muss sein x-Wert möglichst weit in negativer Richtung liegen. Der x-Wert muss also möglichst klein sein.
Wenn der Punkt möglichst weit rechts liegen soll, muss sein x-Wert dementsprechend möglichst groß werden.
Soll ein Punkt möglichst weit oben liegen, muss der y-Wert so weit wie möglich in positiver y-Richtung liegen, der y-Wert muss also möglichst groß werden.
Analog muss ein y-Wert möglichst klein sein, wenn der Punkt möglichst weit unten liegen muss.

Bsp.17
$f_t(x) = x^2-6tx+8t$
Für welchen Wert von t liegt der Tiefpunkt der Funktion $f_t(x)$ am weitesten oben ?

Lösung:
Da es um den Tiefpunkt der Funktion geht, wäre es unter Umständen nicht doof, erst `mal den Tiefpunkt zu errechnen. Dafür setzen wir die Ableitung Null.

$f'(x) = 0$

$2x-6t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3t$

Berechnung des y-Wert

$y = f_f(3t) = (3t)^2-6t\cdot(3t)+8t =$

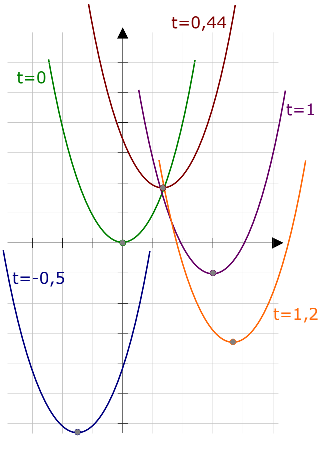
$= 9t^2-18t^2+8t = -9t^2+8t \quad \Rightarrow \quad T(\ 3t\ |\ -9t^2+8t\ )$

Wenn der Tiefpunkt jetzt am weitesten oben sein soll, muss der y-Wert möglichst groß werden, muss also ein Maximum annehmen. Und ein Maximum rechnen wir natürlich wie immer aus, in dem wir die erste Ableitung = Null setzen, also $y'_T = 0$.

$y_T = -9t^2+8t$

$y'_T = -18t+8$

$y'_T=0 \quad \Rightarrow \quad -18t+8=0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{8}{18} \approx 0,44$

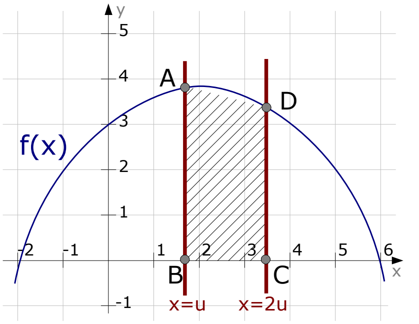


Hier fünf Kurven $f_t(x)$ für jeweils andere Werte von t. Für den Wert t=0,44 liegt der Tiefpunkt am weitesten oben.

Bsp.18
Die Gerade x=u bildet schneidet die Funktion $f(x)=-0,25x^2+x+3$ im Punkt A und die x-Achse in B. Die Gerade x=2u schneidet die x-Achse in C und f(x) in D. Bestimmen Sie u mit 0<u<3 derart, dass die Fläche von ABCD maximal wird.

Lösung:
Zuerst skizzieren wir die Funktion f(x). Danach zeichnen wir die Gerade x=u ein. Eine Gerade der Form x=u ist eine *senkrechte* Gerade. Wir zeichnen also eine senkrechte Gerade irgendwo zwischen x=0 und x=3 ein.
Die Gerade x=2u ist von der y-Achse natürlich doppelt so weit entfernt, wie x=u.

Nachdem die Geraden x=u und x=2u eingezeichnet sind, hat man auch die Punkte A, B, C und D.
Die x-Werte von A und B sind natürlich x=u, die x-Werte von C und D sind x=2u. Die y-Werte von B und C sind y=0 [B und C liegen auf der x-Achse]. A und D liegen auf der Funktion, haben also die y-Werte y_A=f(u) bzw. y_D=f(2u). Also lauten die Koordinaten der Punkte: A(u|f(u), B(u|0), C(2u|0) und D(2u|0).
Das Viereck ABCD ist ein Trapez, da die Seiten AB und CD parallel sind.



Die Flächenformel für ein Trapez lautet: $A = \frac{g+G}{2} \cdot h$,
wobei g und G die beiden parallelen Seiten AB und CD sind.
Die Höhe h ist der Abstand von AB zu CD, könnte also die Strecke BC sein.
G: Die Grundlinie G ist eine senkrechte Strecke. Man berechnet ihre Länge über die Differenz der y-Werte $\Rightarrow$ $G = y_A - y_B = f(u) - 0 = f(u)$
g: Die Grundlinie g ist ebenfalls eine senkrechte Strecke. Man berechnet ihre Länge ebenfalls über die Differenz der y-Werte $\Rightarrow$ $g = y_D - y_C = f(2u) - 0 = f(2u)$
h: Die Trapezhöhe h ist eine senkrechte Strecke. Man berechnet ihre Länge über die Differenz der x-Werte $\Rightarrow$ $h = 2u - u = u$

$\Rightarrow$ Die Trapezfläche berechnet man über: $A = \frac{g+G}{2} \cdot h = \frac{f(2u)+f(u)}{2} \cdot u$

[Falls man einen GTR oder CAS verwenden darf, könnte man ab dieser Stelle die Flächenformel in den GTR oder CAS eingeben und einfach das Maximum davon berechnen lassen.]

$f(u) = -0{,}25 \cdot u^2 + u + 3$
$f(2u) = -0{,}25 \cdot (2u)^2 + (2u) + 3 = -0{,}25 \cdot 4u^2 + 2u + 3 = -u^2 + 2u + 3$
$\Rightarrow A(u) = \frac{(-u^2+2u+3)+(-0{,}25u^2+u+3)}{2} \cdot u = \frac{-1{,}25u^2+3u+6}{2} \cdot u = -0{,}625u^3 + 1{,}5u^2 + 3u$

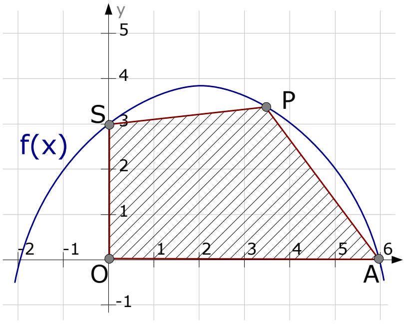
Nun können wir das Maximum der Fläche berechnen, indem wir A'(u)=0 setzen.
$A'(u) = -1{,}875u^2 + 3u + 3$
$A'(u) = 0 \Rightarrow -1{,}875u^2 + 3u + 3 = 0 \Rightarrow$ [p-q-Formel / a-b-c-Formel] $\Rightarrow u_1 \approx -0{,}70 \quad u_2 \approx 2{,}30$
Da laut Aufgabenstellung gelten soll: 0<u<3 ist die gesuchte Lösung: **u=2,3**.

Bsp.19

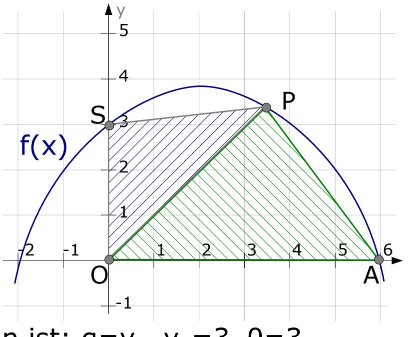
Der Kurvenpunkt P(u|v) liegt im ersten Quadranten auf der Funktion $f(x) = -0{,}25x^2 + x + 3$ und bildet zusammen mit A(6|0), dem Ursprung und dem Schnittpunkt von f(x) mit der y-Achse ein Viereck. Bestimmen Sie u so, dass die Fläche des Vierecks maximal ist.

Lösung:
Zuerst skizzieren wir die Funktion und machen uns danach Gedanken über die beteiligten Eckpunkte. Der Punkt A(6|0) und der Ursprung mit O(0|0) sind klar. Der Schnittpunkt von f(x) mit der y-Achse hat natürlich den x-Wert x=0 und den y-Wert y=3 [einfach x=0 in f(x) einsetzen]. Der Schnittpunkt mit der y-Achse [welchen wir „S" nennen möchten] hat daher die Koordinaten S(0|3). Der letzte beteiligte Punkt ist der Kurvenpunkt P(u|v). Den y-Wert des Punktes „v" erhält man natürlich, indem

man den x-Wert „u" in f(x) einsetzt [man erhält y-Werte immer, indem man den x-Wert in die Funktion einsetzt]. Es gilt also $v=f(u)=-0{,}25u^2+u+3$. P hat also die Koordinaten $P(u|-0{,}25u^2+u+3)$ und liegt irgendwo im ersten Quadranten auf f(x).



Wenn man nun die vier Punkte einzeichnet [P zeichnet man beliebig ein], merkt man, dass das gar kein besonderes Viereck ist [also kein Trapez, Parallelogramm, Rechteck,...], was für die Berechnung der Fläche außerordentlich doof ist.
Also zerlegt man diese Vierecksfläche irgendwie.
Es gibt nun recht viele Möglichkeiten, die Fläche von SOAP zu zerlegen. Manche Möglichkeiten sind geschickt, andere sind recht dumm.
Eine der guten Möglichkeiten ist, SOAP in die beiden Dreiecke SOP und AOP zu zerlegen, denn beide Dreiecke haben eine Seite, welche auf einer Koordinatenachse liegen.



ΔAOP: Als Grundlinie wählen wir OA, die Länge davon ist: $g=x_A-x_O=6-0=6$.
Die Höhe ist der Abstand von der Grundlinie OA zum Punkt P und das ist genau der y-Wert von P. Es gilt also $h=y_P=-0{,}25u^2+u+3$
Die Fläche von ΔAOP berechnet man also über:
$A_{AOP}=½\cdot g\cdot h=½\cdot 6\cdot(-0{,}25u^2+u+3)=-0{,}75u^2+3u+9$

ΔSOP: Als Grundlinie wählen wir OS, die Länge davon ist: $g=y_S-y_O=3-0=3$.
Die Höhe ist der Abstand von der Grundlinie OS zum Punkt P und das ist genau der x-Wert von P. Es gilt also $h=x_P=u$.
Die Fläche von ΔSOP berechnet man also über: $A_{SOP}=½\cdot g\cdot h=½\cdot 3\cdot u=1{,}5u$

SAOP: Die Fläche des Vierecks ist natürlich die Summe beider Dreiecksflächen.
$\Rightarrow A_{SOAP} = A_{AOP}+A_{SOP} = -0{,}75u^2+3u+9 + 1{,}5u = -0{,}75u^2+4{,}5u+9$.

Nun kann man das Maximum der Vierecksfläche einfach berechnen. Man leitet die Formel für die Vierecksfläche ab und setzt die Ableitung Null.
[Falls man einen GTR oder CAS verwenden darf, kann man den ab jetzt einsetzen].

$A(u)=A_{SOAP}=-0{,}75u^2+4{,}5u+9 \;\Rightarrow\; A'(u)=-1{,}5u+4{,}5$
$A'(u)=0 \;\Rightarrow\; -1{,}5u+4{,}5=0 \;\Rightarrow ...\Rightarrow u=3.$

Für **u=3** ist die Fläche des Vierecks SOAP maximal.