A.25 Stetigkeit und Differenzierbarkeit (∯)

Eine Funktion ist **stetig**, wenn die Kurve nicht unterbrochen wird,
also wenn man sie zeichnen kann, ohne den Stift vom Blatt abzusetzen.

Eine Funktion ist **differenzierbar**, wenn sie stetig ist *und* glatt verläuft,
also wenn es keine Ecken und Spitzen gibt.

stetig, differenzierbar | stetig, nicht differenzierbar | stetig, differenzierbar | stetig, differenzierbar | stetig, differenzierbar

nicht stetig, nicht differenzierbar | nicht stetig, nicht differenzierbar | nicht stetig, nicht differenzierbar | stetig, nicht differenzierbar

(streng genommen gelten die beiden rechten Grafiken noch nicht einmal als Funktionen ...)

Die **Stetigkeit** von einer Funktion bezieht sich immer auf die y-Werte. Die y-Werte dürfen niemals von einem Wert plötzlich zu einem anderen Wert springen. Tun sie das doch, so ist die Funktion an der Stelle nicht stetig.

Die **Differenzierbarkeit** von einer Funktion bezieht sich immer auf die Steigung (den Wert der ersten Ableitung). Die Steigungen [die Werte der ersten Ableitung] dürfen niemals von einem Wert plötzlich zu einem anderen Wert springen. Tun sie das doch, so ist die Funktion an der Stelle nicht differenzierbar.

Mehrfache Differenzierbarkeit.

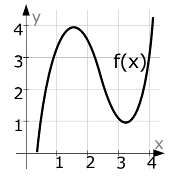
Eine Funktion ist **zweimal differenzierbar**, wenn die y-Werte keine Sprungstelle haben und die Werte der ersten Ableitung und die Werte der zweiten Ableitung auch nicht.

Eine Funktion ist z.B. fünfmal differenzierbar, wenn die y-Werte keine Sprungstelle haben, und die Werte der ersten fünf Ableitungen auch nicht.

Mehrfache Differenzierbarkeit ist nur im Studium von stark naturwissenschaftlich angehauchten Studiengängen relevant. Wir werden daher hier nicht darauf eingehen!

Eine normale Funktion ist immer stetig und immer differenzierbar!
Es ist eher die **Ausnahme**, dass sie an manchen Stellen nicht stetig oder nicht differenzierbar ist. Wir werden im nächsten Unterkapitel lernen, diese „Ausnahmestellen“ zu finden.

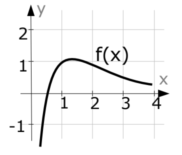
A.25.01 Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionstypen (∯)



Ganzrationale Funktionen:

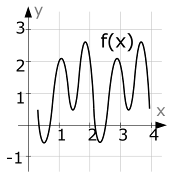
[Geraden, Parabeln, Parabeln höherer Ordnung]

Ganzrationale Funktionen sind immer stetig und immer differenzierbar!



Exponential-Funktionen: [e-Funktionen]

Exponential-Funktionen sind immer stetig und immer differenzierbar!



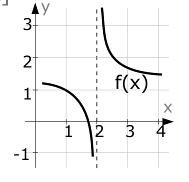
Trigonometrische Funktionen:

Sinus- und Kosinus-Funktionen sind immer stetig und immer differenzierbar!

Tangens-Funktionen haben unendlich viele senkrechte Asymptoten, sind also weder stetig noch differenzierbar. Zu Ihrem Glück interessiert man sich in der Mathematik nur sehr selten für Tangens-Funktionen.

Bruch-Funktionen:

[Gebrochen-rationale Funktionen und alle anderen, in denen ein Bruch auftaucht]

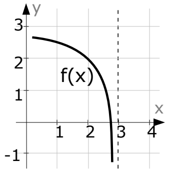


Funktionen, in denen ein Bruch auftaucht, haben normaler Weise eine senkrechte Asymptote bzw. eine Definitionslücke [in der Skizze bei x=2]. Diese Definitionslücke berechnet man, indem man den Nenner Null setzt.

Und an genau dieser Definitionslücke ist die Funktion normalerweise nicht stetig und nicht differenzierbar.

[→Bsp.01]

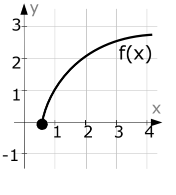
Logarithmus-Funktionen: [ln-Funktionen]



ln-Funktionen, haben normaler Weise eine senkrechte Asymptote bzw. eine Definitionslücke [in der Skizze bei x=3]. Diese Definitionslücke berechnet man, indem man das Argument des Logarithmus [das Teil in der Klammer] Null setzt.

Und an genau dieser Definitionslücke ist die Funktion normalerweise nicht stetig und nicht differenzierbar. [→Bsp.02]

Wurzel-Funktionen:

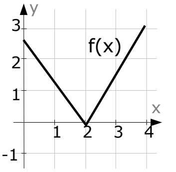


Wurzel-Funktionen beginnen meist in einem bestimmten Punkt [in der Skizze bei (0,5|0)]. Diese Punkt berechnet man, indem man den Term unter der Wurzel Null setzt.

Und an genau diesem Punkt ist die Funktion normalerweise nicht stetig und nicht differenzierbar. [→Bsp.03]

Betrag-Funktionen:

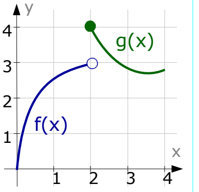
Betrag-Funktionen erzeugen meist einen Knick im Schaubild der Funktion. Diese Stelle an der sich dieser Knick befindet berechnet man, indem man das Argument des Betrags [den Term im Inneren des Betrages] Null setzt.
An dieser Knickstelle ist die Funktion normalerweise zwar stetig, aber nicht differenzierbar. [→Bsp.04]



Kreis- und Ellipsen-Funktionen fallen unter →Wurzelfunktionen.

Zusammengesetzte Funktionen:

Zusammengesetzte Funktionen [sie heißen auch „abschnittsweise definierte Funktionen] bestehen aus zwei oder mehreren Funktionen, die „künstlich" zu einer einzigen zusammengewurstet werden. Der Übergang erfolgt an einem bestimmten vorgegebenen x-Wert [in der Skizze bei x=2]. Bis zu diesem x-Wert gilt eine Funktion, ab dem x-Wert gilt eine andere Funktion.
An genau diesem Übergang ist die Problematik, hier kann die Funktion unstetig oder nicht differenzierbar oder sonst was sein.
[Weil man als Aufgabensteller hier alle möglichen Fälle reinbringen kann, sind zusammengesetzte Funktion in Aufgaben besonders beliebt.]
[→komplettes Kapitel A.25.02]



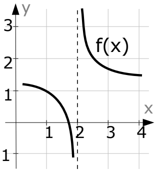
Bsp.1

Es sei $f(x)=\frac{3x-5}{2x-4}$

Überprüfen Sie f(x) auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Lösung:
Wir haben es hier mit einer gebrochen-rationalen Funktion zu tun, sprich die Funktion hat einen Nenner. Da wo der Nenner Null ist, ist die Kacke am Dampfen [wir Mathematiker sagen: „es gibt eine Definitionslücke" oder wenn man angeben will: „die Funktion weist bei x=2 eine Singularität auf"]. Wir berechnen zuerst diese Nennernullstelle.

$2x-4=0 \;\Rightarrow\; 2x=4 \;\Rightarrow\; x=2$

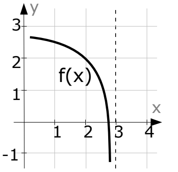


Selbst ohne die Skizze wissen wir nun, dass bei x=2 eine Problemstelle ist:
Bei knapp links und rechts von x=2 läuft f(x) hoch und runter nach +∞ bzw. -∞.
Bei genau x=2 existiert die Funktion gar nicht.
Die Funktion kann also gar **nicht stetig** sein [man kann sie nicht zeichnen, ohne den Stift abzusetzen] und ist damit automatisch auch **nicht differenzierbar**.
[Um es genau zu sagen, ist die Funktion nur bei x=2 unstetig und nicht differenzierbar.
Bei allen anderen x-Werten ist sie natürlich sowohl stetig als auch differenzierbar.]

Bsp.2

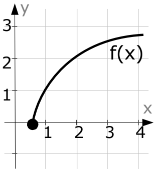
Es sei $f(x)=2\cdot\ln(3-x)$

Überprüfen Sie f(x) auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.



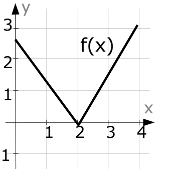
Lösung:
Ebenso wie beim letzten Beispiel kennen wir auch hier sofort die Stelle, an welcher die Probleme entstehen. Bei einer Logarithmusfunktion ist das immer die Nullstelle des Arguments.
$\Rightarrow\ 3-x=0\ \Rightarrow\ x=3$
Bei x=3 ist f(x) unstetig und damit auch nicht definierbar!
[Man könnte nun darüber philosphieren, ob f(x) unstetig ist, da sie ja bei x=3 nicht unterbrochen wird, sondern aufhört... Sparen Sie sich das Philosphieren, denn spätestens wenn man die Definition der Stetigkeit anwendet (→Kap.A.25.03) sieht man, dass da tatsächlich nichts stetig ist.]

Bsp.3
Es sei $f(x)=1{,}2\cdot\sqrt{2x-1}$
Überprüfen Sie f(x) auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.



Lösung:
Ebenso wie bei den letzten Beispiel kennen wir auch hier sofort die Stelle, an welcher die Probleme entstehen. Bei einer Wurzelfunktion ist das immer die Nullstelle des Arguments.
$\Rightarrow\ 2x-1=0\ \Rightarrow\ x=0{,}5$
Bei x=0,5 ist f(x) unstetig und damit auch nicht definierbar!
[Zum *Beweis*, dass f(x) bei x=0,5 tatsächlich unstetig ist: siehe →Bsp.10]

Bsp.4
Es sei $f(x)=\frac{2}{5}\cdot|3x-6|$
Überprüfen Sie f(x) auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.



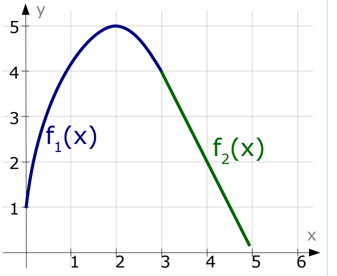
Lösung:
Betragsfunktionen sind eigentlich immer stetig aber nicht differenzierbar. Die Problemstelle ist natürlich ebenfalls wieder da, wo das Argument Null wird. $3x-6=0\ \Rightarrow\ 3x=6\ \Rightarrow\ x=2$.
Bei x=2 ist ist f(x) stetig, aber nicht differenzierbar.
[Bewiesen haben wir hier noch nichts. Siehe →Bsp.11]

A.25.02 abschnittsweise definierte Funktionen) (∯)

Bsp.5 [Siehe →Bsp.12]

Es sei $f(x)=\begin{cases} -x^2+4x+1 & \text{für } x<3 \\ -2x+10 & \text{für } x\geqslant 3 \end{cases}$

Untersuchen Sie f(x) auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.



Lösung:
Falls Sie f(x) zeichnen wollen, ist das keine schlechte Idee. Die eine Funktion $f_1(x)=-x^2+4x+1$ wird links von x=3 gezeichnet. Die zweite Funktion $f_2(x)=-2x+10$ wird rechts von x=3 gezeichnet.

Auf jeden Fall müssen sowohl Stetigkeit als auch Differenzierbarkeit nur bei x=3 [der Übergangsstelle] untersucht werden.

Stetigkeit:

f(x) ist stetig , wenn bei x=3 beide Funktionen den gleichen y-Wert liefern:

$f_1(3)=-3^2+4\cdot3+1=-9+12+1=4 \qquad f_2(3)=-2\cdot3+10=4$

Beide y-Wert sind gleich. f(x) ist bei x=3 **stetig** [bei allen anderen x-Werten sowieso].

Differenzierbarkeit:

f(x) ist differenzierbar , wenn bei x=3 beide Funktionsteile die gleichen Steigungen liefern. Für die Steigungen braucht man natürlich erst die Ableitung.

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+4x+1 & \text{für } x<3 \\ -2x+10 & \text{für } x\geqslant 3 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\begin{cases} -2x+4 & \text{für } x<3 \\ -2 & \text{für } x\geqslant 3 \end{cases}$$

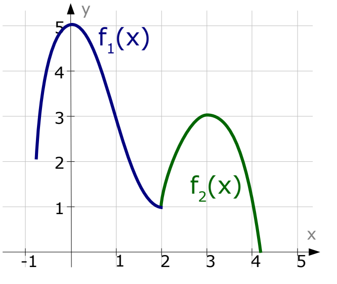
$m_1=f_1'(3)=-2\cdot3+4=-6+4=-2 \qquad m_2=f_2'(x)=-2$

Beide Steigungen sind gleich. f(x) ist bei x=3 **differenzierbar**.

Bsp.6 [Siehe →Bsp.13]

Es sei $f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2+5 & \text{für } x\leqslant 2 \\ -2x^2+12x-15 & \text{für } x>2 \end{cases}$

Untersuchen Sie f(x) auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.



Lösung:
Streng genommen müssen Sie f(x) nicht zeichnen.
Hier ist zwar eine Skizze, allerdings ist die notwendig.
Wir werden auf jeden Fall die Ableitung brauchen.

$f_1(x)= x^3-3x^2+5 \quad\Rightarrow\quad f_1'(x)=3x^2-6x$

$f_2(x)=-2x^2+12x-15 \quad\Rightarrow\quad f_2'(x)=-4x+12$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\begin{cases} 3x^2-6x & \text{für } x\leqslant 2 \\ -4x+12 & \text{für } x>2 \end{cases}$$

Stetigkeit:

f(x) ist stetig , wenn bei x=2 beide Funktionsteile den gleichen y-Wert liefern

$f_1(2)=2^3-3\cdot2^2+5=8-12+5=1 \qquad f_2(2)=-2\cdot2^2+12\cdot2-15=-8+24-15=1$

Beide y-Wert sind gleich. f(x) ist bei x=2 **stetig**.

Differenzierbarkeit:

f(x) ist differenzierbar , wenn bei x=3 beide Funktionsteile die gleichen Steigungen liefern.

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-6x & \text{für } x\leqslant 2 \\ -4x+12 & \text{für } x>2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad f'(2)=\begin{cases} 3\cdot2^2-6\cdot2=12-12=0 & \text{für } x\leqslant 2 \\ -4\cdot2+12=-8+12=4 & \text{für } x>2 \end{cases}$$

Die Steigungen sind *nicht* gleich. f(x) ist **nicht differenzierbar**.

Ein Aufgabentyp, den man wirklich oft sieht, ist der mit Parametern drin:

Bsp.7

Es sei $g(x)=\begin{cases} x^3+a\cdot x+6 & \text{für } x>0 \\ 0{,}2x^5-b+1 & \text{für } x\leqslant 0 \end{cases}$

Bestimmen Sie die Parameter „a" und „b" so, dass g(x) differenzierbar ist.

Lösung:

Bitte denken Sie daran, dass eine Funktion automatisch auch stetig sein muss, wenn sie differenzierbar sein soll.

Stetigkeit:

Die y-Werte beider Funktionen müssen bei x=0 gleich sein.

$g_1(0)=g_2(0) \Rightarrow 0^3+a\cdot 0+6=0{,}2\cdot 0^5-b+1 \Rightarrow 6=-b+1 \Rightarrow b=-5$

Differenzierbarkeit:

Die Steigungen beider Funktionen müssen bei x=0 gleich sein.

$g'(x)=\begin{cases} 3x^2+a & \text{für } x>0 \\ 1\cdot x^4 & \text{für } x\leqslant 0 \end{cases} \qquad g_1'(0)=g_2'(0) \Rightarrow 3\cdot 0^2+a=1\cdot 0^4 \Rightarrow a=0$

Die Parameter müssen die Werte **a=0** und **b=-5** annehmen!

Und damit Sie nicht denken, alles wäre super-einfach, hier noch ein hässliches Beispiel.

Bsp.8

Es sei $h(x)=\begin{cases} a\cdot\sqrt{2x+b} & \text{für } x\geqslant -1 \\ (x+2)^5-0{,}8 & \text{für } x<-1 \end{cases}$

Bestimmen Sie die Parameter „a" und „b" so, dass h(x) differenzierbar ist.

Lösung:

Stetigkeit:

Die y-Werte beider Funktionen müssen bei x=-1 gleich sein.

$h_1(-1)=h_2(-1) \Rightarrow a\cdot\sqrt{2(-1)+b}=(-1+2)^5-0{,}8 \Rightarrow a\cdot\sqrt{-2+b}=0{,}2$

Leider ist das eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Kann man nicht direkt lösen. Wir lassen´s erst mal stehen und schauen, was wir mit der zweiten Gleichung für ein Ergebnis erhalten.

Differenzierbarkeit:

Die Steigungen beider Funktionen müssen bei x=0 gleich sein.

Zuerst bestimmen wir die Ableitungen:

$h_1(x)=a\cdot\sqrt{2x+b}$ = [umschreiben] = $a\cdot(2x+b)^{0,5}$

$\Rightarrow h_1'(x) = 0{,}5\cdot a\cdot(2x+b)^{-0,5}\cdot 2$ [1] $= a\cdot(2x+b)^{-0,5}$ = [umschreiben] = $\frac{a}{\sqrt{2x+b}}$

$h_2(x)=(x+2)^5+1 \Rightarrow h_2'(x)=5\cdot(x+2)^4$

$h_1'(-1)=h_2'(-1) \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2\cdot(-1)+b}}=5\cdot(-1+2)^4 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{-2+b}}=5\cdot 1^4 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{-2+b}}=5$

Gleichungen lösen:

Leider haben wir weder „a" noch „b" direkt erhalten, sondern nur zwei Gleichung mit zwei Unbekannten: I) $a\cdot\sqrt{-2+b}=0{,}2$ II) $\frac{a}{\sqrt{-2+b}}=5$

---

1 Die „2" kommt von der inneren Ableitung [Kettenregel]

Allein schon wegen der Wurzel würde ich beide Gleichungen quadrieren.
Danach könnte man z.B. Gleichung II) nach a² auflösen und in I) einsetzen.

I) $a\cdot\sqrt{-2+b}=0{,}2 \quad\Rightarrow\quad$ I') $a^2\cdot(-2+b)=0{,}04$

II) $\frac{a}{\sqrt{-2+b}}=5 \quad\Rightarrow\quad$ II') $\frac{a^2}{-2+b}=25 \quad\Rightarrow\quad$ II'') $a^2=25\cdot(-2+b)$

II'') in I'): $(25\cdot(-2+b))\cdot(-2+b)=0{,}04 \;\Rightarrow\; 25\cdot(-2+b)^2=0{,}04 \;\Rightarrow\; (-2+b)^2=\frac{0{,}04}{25}$

$\Rightarrow\quad (-2+b)^2=0{,}0016 \;\Rightarrow\; -2+b=0{,}04 \;\Rightarrow\; b=2{,}04$

$b=2{,}04$ in II'') [oder irgendwo anders]: $a^2=25\cdot(-2+2{,}04) \;\Rightarrow\; a^2=1 \;\Rightarrow\; a=\pm1$

Die Parameter müssen die Werte **a=±1** und **b=2,04** annehmen!

A.25.03 Definition von stetig und differenzierbar (∮)

**→ Eine Funktion f(x) nennt man stetig,
wenn sie an *jeder* Stelle [überall, bei *jedem* x-Wert] stetig ist.**

→ Eine Funktion f(x) ist an einer Stelle x=a stetig, wenn gilt:
1. f(a) existiert
2. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a)$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a)$

**→ Eine Funktion f(x) nennt man differenzierbar,
wenn sie an *jeder* Stelle [überall, bei *jedem* x-Wert] differenzierbar ist.**

→ Eine Funktion f(x) ist an einer Stelle x=a differenzierbar, wenn gilt:
1. f(x) ist bei x=a stetig.
2. f'(a) existiert
3. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f'(x) = f'(a)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f'(x) = f'(a)$

Bemerkung:
Die *Nummerierung* der Bedingungen ist in der Mathematik nicht allgemeingültig.
Die Bedingungen an sich natürlich schon!

Bsp.9

Ein Beispiel, das so einfach ist, dass es schon fast wieder doof ist.
Bemerkung: Verwechseln Sie „einfach" nicht mit „kurz".

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x)=x^2-4x+3$ an der Stelle $x=2$ stetig ist.

Lösung:
Es gibt drei Bedingungen, damit f(x) stetig ist.
1. f(2) muss existieren, 2. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = f(2)$ 3. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = f(2)$

Zu Bedingung 1.
f(2) existiert natürlich, denn man kann x=2 in f(x) einsetzen.
$f(2)=2^2-4\cdot2+3=-1$. Alles wunderbar, Bedingung ist erfüllt.

Zu Bedingung 2.
$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x^2-4x+3 = -1$. Passt. Super!

Wenn $x\to2$ und $x>2$ (also z.B. $x\approx2{,}00\ldots001$), kommt natürlich wieder „-1" raus].
Und wenn $x\to2$ und $x<2$ (also z.B. $\approx1{,}999999$), kommt natürlich wieder „-1" raus].

Zu Bedingung 3.
$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} x^2-4x+3 = -1$. Perfekt.

Alle drei Bedingungen sind erfüllt. **f(x) ist bei x=2 stetig**.

Bsp.10

[siehe auch →Bsp.3]

Es sei $f(x)=1{,}2\cdot\sqrt{2x-1}$.
Untersuchen Sie f(x) auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Stelle x=0,5.

Lösung:
Beginnen wir mit der Stetigkeit: f(x) muss natürlich die drei Bedingungen erfüllen.
Es gibt drei Bedingungen, damit f(x) stetig ist.
1. f(0,5) muss existieren, 2. $\lim\limits_{\substack{x\to0{,}5\\x>0{,}5}} f(x) = f(0{,}5)$ 3. $\lim\limits_{\substack{x\to0{,}5\\x<0{,}5}} f(x) = f(0{,}5)$

Zu Bedingung 1.
f(0,5) existiert natürlich, denn man kann x=0,5 in f(x) einsetzen.
$f(0{,}5)=1{,}2\cdot\sqrt{2\cdot0{,}5-1}=1{,}2\cdot0=0$. Alles wunderbar, Bedingung ist erfüllt.

Zu Bedingung 2.
$\lim\limits_{\substack{x\to0{,}5\\x>0{,}5}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0{,}5\\x>0{,}5}} 1{,}2\cdot\sqrt{2x-1} = 1{,}2\cdot\sqrt{0{,}000\ldots0001} \approx 0 = f(0{,}5)$. Erfüllt.

Zu Bedingung 3.
$\lim\limits_{\substack{x\to0{,}5\\x<0{,}5}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0{,}5\\x<0{,}5}} 1{,}2\cdot\sqrt{2x-1} = 1{,}2\cdot\sqrt{-0{,}000\ldots0001}$

[Da x<0,5 steht unter Wurzel etwas leicht Negatives. Das ist natürlich unmöglich. Das bedeutet aber natürlich, dass nicht f(0,5) rauskommt, womit die Bedingung nicht erfüllt ist.]

f(x) ist **nicht stetig** und damit natürlich auch **nicht differenzierbar**.

Bsp.11 [siehe auch →Bsp.4]

Es sei $f(x)=\frac{2}{5}\cdot|3x-6|$

Überprüfen Sie f(x) auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Lösung:

Die einzige Problemstelle ist bei x=2, denn da wird das Innere des Betrages Null. Bei allen anderen x-Werten, bei $x\neq 2$, ist f(x) selbstverständlich sowohl stetig als auch differenzierbar.

Für die Differenzierbarkeit brauchen wir auf jeden Fall die Ableitung von f(x). Die Ableitung einer Betragfunktion berechnet man leider etwas umständlich, man braucht eine Fallunterscheidung.

Fall 1: $3x-6>0 \;\Rightarrow\; 3x>6 \;\Rightarrow\; x>2$ [der Betrag wird zur einfachen Klammer]

$$f(x)=\frac{2}{5}\cdot(3x-6) \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{2}{5}\cdot(3)=\frac{6}{5}$$

Fall 2: $3x-6<0 \;\Rightarrow\; 3x<6 \;\Rightarrow\; x<2$ [der Betrag wird zur negativen Klammer]

$$f(x)=\frac{2}{5}\cdot(-(3x-6))=\frac{2}{5}\cdot(-3x+6) \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{2}{5}\cdot(-3)=-\frac{6}{5}$$

Stetigkeit:

Zu Bedingung 1.

f(2) existiert natürlich, denn man kann x=2 in f(x) einsetzen.

$f(2)=\frac{2}{5}\cdot|3\cdot 2-6| = \frac{2}{5}\cdot|0| = 0$. Bedingung ist erfüllt.

Zu Bedingung 2.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{2}{5}\cdot|3x-6| = \frac{2}{5}\cdot|3\cdot 2{,}000\ldots0001-6| = \frac{2}{5}\cdot|0| \approx 0 = f(2).\text{ Erfüllt.}$$

Zu Bedingung 3.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{2}{5}\cdot|3x-6| = \frac{2}{5}\cdot|3\cdot 1{,}99999\ldots-6| = \frac{2}{5}\cdot|0| \approx 0 = f(2).$$

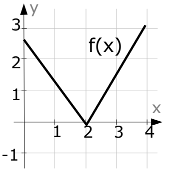
Alle drei Bedingungen sind erfüllt. **f(x) ist stetig**.

Differenzierbarkeit:

Bedingung 1 der Differenzierbarkeit ist die Stetigkeit. Wurde eben gezeigt.

Bedingung 2:

f'(2) kann man eigentlich nicht angeben, denn f'(2) ist ja die Steigung von f(x) an der Stelle x=2. Da f(x) bei x=2 jedoch eine Spitze der Funktion ist, kann man gar nicht sagen, was für eine Steigung da ist. Eigentlich wäre man jetzt schon fertig und könnte sagen: „nicht differenzierbar“.



Spätestens aber, wenn man die Steigung links und rechts von x=2 anschaut, wird klar, dass f(x) nicht differenzierbar ist, da die Steigungen auf beiden Seiten unterschiedlich ist:

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f'(x) = -\frac{6}{5} \qquad \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f'(x) = \frac{6}{5}$$

⇒ Unterschiedliche Steigungen.
f(x) ist nicht differenzierbar.

Bsp.12 [siehe auch →Bsp.5]

Es sei $f(x)=\begin{cases} -x^2+4x+1 & \text{für } x<3 \\ -2x+10 & \text{für } x\geqslant 3 \end{cases}$

Überprüfen Sie f(x) auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Lösung:

f(x) geht bei x=3 von der einen zur anderen Funktion über. Die einzige Stelle, an der f(x) also nicht stetig oder nicht diff.bar sein könnte ist x=3!

Vorab noch schnell die Ableitung von f(x): $f'(x)=\begin{cases} -2x+4 & \text{für } x<3 \\ -2 & \text{für } x\geqslant 3 \end{cases}$

Stetigkeit:

Zu Bedingung 1.

f(3) existiert natürlich, denn man kann x=3 in f(x) einsetzen.

Um genau zu sein, muss man x=3 in „-2x+10" einsetzen, denn hier ist das „Gleichzeichen" mit dabei. „$-x^2+4x+1$" gilt nur wenn x *kleiner* als 2 ist.

f(3)=-2·3+10=4. Bedingung ist erfüllt.

Zu Bedingung 2.

$\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x>3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x>3}} -2x+10 \approx -2\cdot 3+10 = 4 = f(3)$. Erfüllt.

Zu Bedingung 3.

$\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} -x^2+4x+1 \approx -3^2+4\cdot 3+1 = 4 = f(3)$. Ebenfalls erfüllt.

Alle drei Bedingungen sind erfüllt. **f(x) ist stetig**.

Differenzierbarkeit:

Bedingung 1 der Differenzierbarkeit ist die Stetigkeit. Wurde eben gezeigt.

Bedingung 2:

f'(3)=-2. Einsetzen ist offensichtlich möglich. Bedingung ist erfüllt.

Zu Bedingung 3:

$\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x>3}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x>3}} -2 = -2 = f(2)$. Bedingung ist erfüllt.

Zu Bedingung 4:

$\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} -2x+4 \approx -2\cdot 3+4 = -2 = f(2)$. Bedingung ist erfüllt.

f(x) ist differenzierbar.

Bsp.13 [siehe auch →Bsp.6]

Es sei $f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2+5 & \text{für } x\leqslant 2 \\ -2x^2+12x-15 & \text{für } x>2 \end{cases}$

Überprüfen Sie f(x) auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Lösung:

f(x) geht bei x=2 von der einen zur anderen Funktion über. Die einzige Stelle, an der f(x) also nicht stetig oder nicht diff.bar sein könnte ist x=2!

Vorab noch schnell die Ableitung von f(x): $f'(x)=\begin{cases} 3x^2-6x & \text{für } x\leqslant 2 \\ -4x^2+12 & \text{für } x>2 \end{cases}$

Stetigkeit:

Zu Bedingung 1.

f(2) existiert natürlich, denn man kann x=2 in f(x) einsetzen.

Um genau zu sein, muss man x=2 in „x^3-3x^2+5" einsetzen, denn hier ist das „Gleichzeichen" mit dabei. „$-2x^2+12x-15$" gilt nur wenn x *größer* als 2 ist.

$f(2)=2^3-3\cdot 2^2+5=1$. Bedingung ist erfüllt.

Zu Bedingung 2.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} -2\cdot x^2+12\cdot x-15 \approx -2\cdot 2^2+12\cdot 2-15 = 1 = f(2)$. Erfüllt.

Zu Bedingung 3.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} x^3-3x^2+5 \approx 2^3-3\cdot 2^2+5 = 1 = f(2)$. Ebenfalls erfüllt.

Alle drei Bedingungen sind erfüllt. **f(x) ist stetig**.

Differenzierbarkeit:

Bedingung 1 der Differenzierbarkeit ist die Stetigkeit. Wurde eben gezeigt.

Bedingung 2:

$f'(2)=3\cdot 2^2-6\cdot 2=0$. Einsetzen ist möglich. Bedingung ist erfüllt.

Zu Bedingung 3:

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} -4x+12 \approx -4\cdot 2+12 = 8 \neq f(2)$. Bedingung ist nicht erfüllt.

f(x) ist nicht differenzierbar. [Bedingung 4 ist nicht mehr wichtig]