Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter **www.mathe-laden.de** bestellen (falls Sie das möchten).
Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht aus dem Internet herunter geladen werden können.
Dazu gehören:
Inhaltsverzeichnis, **Stichwortverzeichnis**, und viele **Aufgaben zum Selberrechnen**.

Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.
Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

Sie können diese Datei gerne beliebig für den eigenen Gebrauch verwenden.
Nicht gestattet sind Änderungen sowie kommerzielle Nutzung.

A.23 Verschieben, Strecken, Spiegeln

A.23.01 Verschieben (∰)

Funktionen kann man in x-Richtung und in y-Richtung verschieben.

Verschiebung in positive x-Richtung: $\mathbf{x \rightarrow (x-a)}$
Man verschiebt eine Funktion um „a" **nach rechts**,
indem man in f(x) „x" durch „x–a" ersetzt.

Verschiebung in negative x-Richtung: $\mathbf{x \rightarrow (x+a)}$
Man verschiebt eine Funktion um „a" **nach links**,
indem man in f(x) „x" durch „x+a" ersetzt.

Verschiebung in positive y-Richtung: $\mathbf{f(x) \rightarrow f(x)+b}$
Man verschiebt eine Funktion um „b" **nach oben**,
indem man zu f(x) „b" dazu addiert.

Verschiebung in negative y-Richtung: $\mathbf{f(x) \rightarrow f(x)-b}$
Man verschiebt eine Funktion um „b" **nach unten**,
indem man von f(x) „b" abzieht.

Aufg.1
$f(x) = 0{,}4x + \cos(2x)$ soll um „2" nach links verschoben werden!

Aufg.2
$f(x) = \frac{x^2-4}{x-1}$ soll um 1 nach rechts und 4 nach oben verschoben werden!

Aufg.3
$f(x) = x^3-6x^2+12x-6$ wird um 2 nach links und 1 nach unten verschoben!

Lösung von Aufg.1:
Die gesuchte Funktion ist f(x+2)!
$f(x+2) = 0{,}4\cdot(x+2) + \cos(2\cdot[x+2]) = 0{,}4x+0{,}8 + \cos(2x+4)$

Lösung von Aufg.2:
Die gesuchte Funktion ist $f(x-1)+4$!
$$f(x-1)+4 = \frac{(x-1)^2-4}{(x-1)-1}+4 = \frac{x^2-2x+1-4}{x-2}+\frac{4}{1} = [\text{Hauptnenner}] = \frac{x^2-2x-3}{x-2}+\frac{4x-8}{x-2} = \frac{x^2+2x-11}{x-2}$$

Lösung von Aufg.3:
Die gesuchte Funktion ist $f(x+2)-1$!
$$f_{neu}(x) = f(x+2)-1 = (x+2)^3-6(x+2)^2+12(x+2)-6-1 = \ldots =$$
$$= (x^3+6x^2+12x+8) - 6(x^2+4x+4) + 12(x+2) - 7 =$$
$$= x^3+6x^2+12x+8 - 6x^2-24x-24 + 12x+24 - 7 = x^3+1$$

A.23.02 Strecken (∰)

Funktionen kann man in x-Richtung und in y-Richtung strecken.
Ist der Streckfaktor zwischen 0 und 1, nennt man den Vorgang stauchen. Das Stauchen ist mathematisch gesehen, nicht sonderlich wichtig, denn der Faktor beim Stauchen ist einfach nur der Kehrwert beim Strecken. [Will man beispielsweise um den Faktor „3" stauchen, so streckt man einfach mit dem Faktor $^1/_3$].
Ist der Streckfaktor negativ, so hat man einfach den Fall, dass die Streckung noch zusätzlich mit einer Spiegelung an der Achse verbunden ist.

Strecken in y-Richtung: $\mathbf{f(x) \rightarrow k \cdot f(x)}$
Bei einer **Streckung in y-Richtung**
wird die Funktion mit dem Streckfaktor multipliziert.

Strecken in x-Richtung: $\mathbf{x \rightarrow \left(\frac{1}{k} \cdot x\right)}$
Bei einer **Streckung in x-Richtung**
wird „x" mit dem Kehrwert des Streckfaktor multipliziert.

Aufg.4
Strecken Sie $f(x) = 2(x+3)^5-4x$ um den Faktor 2 in y-Richtung.

Aufg.5
$f(x) = 0{,}4x+\cos(2x)$ soll um den Faktor 5 in y-Richtung gestaucht werden.

Aufg.6
$f(x) = x^3+2x^2-e^{3x}$ soll um den Faktor 3 in x-Richtung gestreckt werden.

Aufg.7
$f(x) = x^3-6x^2+12x-6$ soll um den Faktor 2 in x-Richtung gestaucht werden.

Lösung von Aufg.4:
Bei einer Streckung in y-Richtung wird f(x) mit dem Streckfaktor multipliziert.
$\Rightarrow f_{neu}(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot [\ 2(x+3)^5-4x\ ] = 4 \cdot (x+3)^5-8x$

Lösung von Aufg.5:
Eine Stauchung um den Faktor 5 entspricht einer Streckung um den Faktor $\frac{1}{5}=0{,}2$.
Wir strecken also unsere Funktion um den Faktor 0,2 in y-Richtung.
$f_{neu}(x) = 0{,}2 \cdot f(x) = 0{,}2 \cdot [0{,}4x+\cos(2x)] = 0{,}08x+0{,}2 \cdot \cos(2x)$

Lösung von Aufg.6:
Bei einer Streckung in x-Richtung wird „x“ mit dem Kehrwert des Streckfaktor multipliziert. Wir ersetzen also jedes „x“ durch „$\frac{1}{3}x$“.
$f_{neu}(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right) = \left(\frac{1}{3}x\right)^3 + 2\cdot\left(\frac{1}{3}x\right)^2 - e^{3\cdot\left(\frac{1}{3}x\right)} = \frac{1}{27}x^3 + \frac{2}{9}x^2 - e^x$

Lösung von Aufg.7:
Eine Stauchung um den Faktor 2 entspricht einer Streckung um den Faktor ½.
Bei einer Streckung in x-Richtung wird „x“ immer mit dem Kehrwert des Streckfaktor multipliziert. Der Kehrwert von ½ ist 2, daher ersetzen wir also jedes „x“ durch „2x“.
$f_{neu}(x) = f(2x) = (2x)^3-6(2x)^2+12(2x)-6 = 8x^3-24x^2+24x-6$

A.23.03 Spiegeln an Koordinatenachsen (∰)

Eine Funktion f(x) wird **an der x-Achse gespiegelt**,
indem vor die Funktion ein „-“ gesetzt wird. Also: $f(x) \rightarrow -f(x)$

Eine Funktion f(x) wird **an der y-Achse gespiegelt**,
indem jedes „x“ durch „-x“ ersetzt wird. Also: $f(x) \rightarrow f(-x)$

Eine Funktion f(x) wird **am Ursprung gespiegelt**,
indem man f(x) an der x-Achse und an der y-Achse spiegelt. Also: $f(x) \rightarrow -f(-x)$

Aufg.8
$f(x) = 2x^2-6$
a) Spiegeln Sie f(x) an der x-Achse!
b) Spiegeln Sie f(x) an der y-Achse!
c) Spiegeln Sie f(x) am Ursprung!

Aufg.9
$f(x) = x^3+2x^2-e^{2x}$
a) Spiegeln Sie f(x) an der x-Achse!
b) Spiegeln Sie f(x) an der y-Achse!
c) Spiegeln Sie f(x) am Ursprung!

Lösung von Aufg.8:

a) $f(x)$ wird zu $-f(x)$.
Die gespiegelte Funktion wird also zu $f_{neu}(x) = -(2x^2-6) = -2x^2+6$

b) $f(x)$ wird zu $f(-x)$. Die gespiegelte Funktion wird also zu
$f_{neu}(x) = 2(-x)^2-6 = 2x^2-6$
[Man erhält wieder $f(x)$. Das ist nicht überraschend, da $f(x)$ ja symmetrisch zur y-Achse ist.]

c) Erst spiegeln wir $f(x)$ an der x-Achse, dann an der y-Achse. [Umgekehrt geht auch.]
An der x-Achse spiegeln: $f_x(x) = -f(x) = -(2x^2-6) = -2x^2+6$
An der y-Achse spiegeln: $f_{xy}(x) = f_x(-x) = -2(-x)^2+6 = -2x^2+6$
$\Rightarrow$ Wird $f(x)$ am Ursprung gespiegelt, erhält man also die Funktion:
$f_{neu}(x) = -2x^2+6$

Lösung von Aufg.9:

a) $f(x)$ wird zu $-f(x)$.
Die gespiegelte Funktion wird also zu $f_{neu}(x) = -(x^3+2x^2-e^{2x}) = -x^3-2x^2+e^{2x}$

b) $f(x)$ wird zu $f(-x)$. Die gespiegelte Funktion wird also zu
$f_{neu}(x) = (-x)^3+2(-x)^2-e^{2(-x)} = -x^3+2x^2-e^{-2x}$

c) Erst spiegeln wir $f(x)$ an der x-Achse, dann an der y-Achse. [Umgekehrt geht auch.]
An der x-Achse spiegeln: $f_x(x) = -f(x) = -(x^3+2x^2-e^{2x}) = -x^3-2x^2+e^{2x}$
An der y-Achse spiegeln: $f_{xy}(x) = f_x(-x) = -(-x)^3-2(-x)^2+e^{2(-x)} = +x^3-2x^2+e^{-2x}$
$\Rightarrow$ Wird $f(x)$ am Ursprung gespiegelt, erhält man also die Funktion:
$f_{neu}(x) = x^3-2x^2+e^{-2x}$

A.23.04 Spiegeln über Formel (∮)

$f(x)$ wird an einer **senkrechten Gerade x=a gespiegelt**,
indem „x“ durch „2a–x“ ersetzt wird. Also: $f(x) \rightarrow f(2a-x)$

$f(x)$ wird an einer **waagerechten Gerade y=b gespiegelt**,
indem „f(x)“ von 2b abgezogen wird. Also: $f(x) \rightarrow 2b-f(x)$

Eine Funktion $f(x)$ wird an **einem Punkt S(a|b) gespiegelt**,
indem man $f(x)$ an der x=a und y=b spiegelt. Also: $f(x) \rightarrow 2b-f(2a-x)$

Aufg.10

$f(x) = x+2x^2-e^{2x}$

a) Spiegeln Sie $f(x)$ an der Gerade $x=1$.

b) Spiegeln Sie $f(x)$ an der Gerade $y=3$.

c) Spiegeln Sie $f(x)$ am Punkt $S(1|3)$.

Aufg.11
$f(x) = 2(x+3)^5-4x$
a) Spiegeln Sie f(x) an der Gerade x=-2.
b) Spiegeln Sie f(x) an der Gerade y=5.
c) Spiegeln Sie f(x) am Punkt S(-2|5).

Lösung von Aufg.10:
a) x wird zu 2·1–x=2–x. Die gespiegelte Funktion wird also zu
$f_{neu}(x) = f(2-x) = (2-x)+2\cdot(2-x)^2-e^{2\cdot(2-x)} = (2-x)+2\cdot(4-4x+x^2)-e^{4-2x} =$
$= 2-x + 8-8x+2x^2-e^{4-2x} = 10-9x+2x^2-e^{4-2x}$
b) f(x) wird zu 2·3–f(x) = 6–f(x). Die gespiegelte Funktion wird also zu
$f_{neu}(x) = 6-[x+2x^2-e^{2x}] = 6-x-2x^2+e^{2x}$
c) Wir spiegeln f(x) an x=1 und an y=3. Wir bestimmen also
$f_{neu}(x) = 2\cdot3-f(2\cdot1-x) = 6-f(2-x) = 6-[(2-x)+2\cdot(2-x)^2-e^{2\cdot(2-x)}] =$
$= 6-[(2-x)+2\cdot(4-4x+x^2)-e^{4-2x}] = 6 - [2-x + 8-8x+2x^2-e^{4-2x}] =$
$= 6 - 10+9x-2x^2+e^{4-2x} = -4+9x-2x^2+e^{4-2x}$

Lösung von Aufg.11:
a) x wird zu 2·(-2)–x=-4–x. Die gespiegelte Funktion wird also zu
$f_{neu}(x) = f(-4-x) = 2(-4-x+3)^5-4\cdot(-4-x) = 2\cdot(-1-x)^5+16+4x$
b) f(x) wird zu 2·5–f(x) = 10–f(x). Die gespiegelte Funktion wird also zu
$f_{neu}(x) = 10-[2(x+3)^5-4x] = 10-2(x+3)^5+4x$
c) Wir spiegeln f(x) an x=-2 und an y=5. Wir bestimmen also
$f_{neu}(x) = 2\cdot5-f(2\cdot(-2)-x) = 10-f(-4-x) = 10-[2(-4-x+3)^5-4\cdot(-4-x)] =$
$= 10-[2\cdot(-1-x)^5+16+4x] = 10-2\cdot(-1-x)^5-16-4x = -2\cdot(-1-x)^5-6-4x$

A.23.05 Spiegeln über Verschieben (∯)

Eine Spiegelung von Funktionen wird auf nur zwei Grundlagen zurückgeführt: Spiegelung an der x-Achse und Spiegelung an der y-Achse.

Man spiegelt eine Funktion an einer **senkrechten Gerade x=a**, indem man f(x) um „-a" links/rechts verschiebt, dann an der y-Achse spiegelt und dann wieder um „+a" zurück verschiebt.

Man spiegelt eine Funktion an einer **waagerechten Gerade y=b**, indem man f(x) um „-b" hoch/runter verschiebt, dann an der x-Achse spiegelt und dann wieder um „+b" zurück verschiebt.

Eine Funktion f(x) wird **an einem Punkt S(a|b) gespiegelt**, indem man f(x) an der senkrechten Gerade x=a spiegelt und anschließend an der waagerechten Gerade y=b.

Aufg.12

$f(x) = x+2x^2-e^{2x}$

a) Spiegeln Sie f(x) an der Gerade x=1.
b) Spiegeln Sie f(x) an der Gerade y=3.
c) Spiegeln Sie f(x) am Punkt S(1|3).

Lösung von Aufg.12:

a) Um an x=1 zu spiegeln, verschieben wir f(x) zuerst um 1 nach links, dann spiegeln wir f(x) an der y-Achse und zum Schluss verschieben wir f(x) wieder um 1 nach rechts.

f(x) um eins nach links verschieben: $x \to x+1$

$f_1(x) = f(x+1) = (x+1)+2\cdot(x+1)^2-e^{2\cdot(x+1)}$

$f_1(x)$ an der y-Achse spiegeln: $x \to -x$

$f_2(x) = f_1(-x) = (-x+1)+2\cdot(-x+1)^2-e^{2\cdot(-x+1)}$

$f_2(x)$ um eins nach rechts zurück verschieben: $x \to x-1$

$f_3(x) = f_2(x-1) = (-(x-1)+1)+2\cdot(-(x-1)+1)^2-e^{2\cdot(-(x-1)+1)}$
$= (-x+1+1)+2\cdot(-x+1+1)^2-e^{2\cdot(-x+1+1)} = (-x+2)+2\cdot(-x+2)^2-e^{2\cdot(-x+2)}$

b) Um an y=3 zu spiegeln, verschieben wir f(x) zuerst um 3 nach unten, dann spiegeln wir f(x) an der x-Achse und zum Schluss verschieben wir f(x) wieder um 3 nach oben.

f(x) um 3 nach unten verschieben: $f(x) \to f(x)-3$

$f_4(x) = f(x)-3 = x+2x^2-e^{2x}-3$

$f_4(x)$ an der x-Achse spiegeln: $f_4(x) \to -f_4(x)$

$f_5(x) = -f_4(x) = -\,[x+2x^2-e^{2x}-3] = -x-2x^2+e^{2x}+3$

$f_5(x)$ wieder um drei nach oben zurück verschieben: $f_5(x) \to f_5(x)+3$

$f_6(x) = f_5(x)+3 = -x-2x^2+e^{2x}+3 + 3 = -x-2x^2+e^{2x}+6$

c) Um f(x) am Punkt S(1|3) zu spiegeln, spiegeln wir zuerst an der Gerade x=1 [also um 1 nach links verschieben, dann an der y-Achse spiegeln und dann wieder um 1 nach rechts verschieben], danach an der Gerade y=3 [also um 3 nach unten verschieben, dann an der x-Achse spiegeln und dann wieder um 3 nach oben verschieben].

f(x) um eins nach links verschieben: $x \to x+1$

$f_1(x) = f(x+1) = (x+1)+2\cdot(x+1)^2-e^{2\cdot(x+1)}$

$f_1(x)$ an der y-Achse spiegeln: $x \to -x$

$f_2(x) = f_1(-x) = (-x+1)+2\cdot(-x+1)^2-e^{2\cdot(-x+1)}$

$f_2(x)$ um eins nach rechts zurück verschieben: $x \to x-1$

$f_3(x) = f_2(x-1) = (-(x-1)+1)+2\cdot(-(x-1)+1)^2-e^{2\cdot(-(x-1)+1)}$
$= (-x+1+1)+2\cdot(-x+1+1)^2-e^{2\cdot(-x+1+1)} = -x+2+2\cdot(-x+2)^2-e^{2\cdot(-x+2)}$

$f_3(x)$ um 3 nach unten verschieben: $f_3(x) \to f_3(x)-3$

$f_4(x) = f_3(x)-3 = -x+2+2\cdot(-x+2)^2-e^{2\cdot(-x+2)} - 3 = -x-1+2\cdot(-x+2)^2-e^{2\cdot(-x+2)}$

$f_4(x)$ an der x-Achse spiegeln: $f_4(x) \to -f_4(x)$

$f_5(x) = -f_4(x) = -[-x-1+2\cdot(-x+2)^2-e^{2\cdot(-x+2)}] = x+1-2(-x+2)^2+e^{2x}$

$f_5(x)$ wieder um drei nach oben zurück verschieben: $f_5(x) \to f_5(x)+3$

$f_6(x) = f_5(x)+3 = x+1-2(-x+2)^2+e^{2x} + 3 = x+4-2(-x+2)^2+e^{2x}$

Wenn man Lust hat, kann man die Klammer noch auflösen zu:
$x+4-2(-x+2)^2+e^{2x} = x+4-2(x^2-4x+4)+e^{2x} = x+4-2x^2+8x-8+e^{2x} = -2x^2+9x-4+e^{2x}$

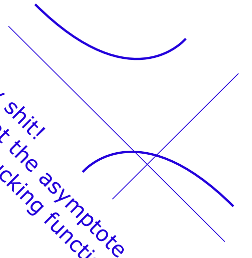
Blöde Sprüche

Niemand hat die Absicht eine Mauer zu errichten!
(Bob der Baumeister)

How does NASA organize a party ?
– They planet

Ich habe meinem Kumpel einen Limonadenwitz erzählt.
– Fanta lustig.

Mathe war für mich immer so:
Zwei Goldfische wandern durch die
Wüste. Einer war rot, der andere dünn.
Wieviel wiegt die Palme, wenn es regnet?



Holy shit!
Look at the asymptote on that
motherfucking function!

Montagmorgen unter der Dusche:
– Fast ertrunken –
! Leben am Limit !

Do you speak english ?
See I so out?

Wer sitzt im Dschungel und schummelt ?
Mogli.

Hausaufgabe im Fach Deutsch:
Verfasse eine Kurzgeschichte (max. 1 Seite) die die folgenden
Themen beinhaltet:
- Religion
- Sexualität
- Geheimnis.

„Oh Gott, ich bin schwanger! Wenn ich nur wüsste von wem?"

Schule ist kostenlos.
Und in manchen Fällen auch umsonst.

Wieviel wiegt ein Hipster ?
Ein Instagramm!

Bei manchen Leuten denk ich mir:
„Der dreht sicherlich auch das Quadrat beim Tetris!"

Im Supermarkt:
Kondome: 5 Euro, Gleitgel: 5 Euro.
Das Gesicht der Verkäuferin, wenn
man noch eine Salatgurke dazu kauft:
unbezahlbar.

Eine Studie hat herausgefunden, dass Frauen,
die etwas übergewichtig sind, länger leben als
Männer, die das erwähnen.

L&K