W.16 Binomialverteilung

Es gibt zwei ganz wichtige Verteilungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung:
- die Binomialverteilung und
- die Normalverteilung

Für Schule/Studium ist die Binomialverteilung vermutlich die einfachere aber wichtigere von allen. Die Normalverteilung betrachten wir im übernächsten Kapitel [W.18]. Auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen beiden Verteilungen gehen wir im Kapitel W.18.03 ein [„Laplace-Bedingung"].

Die Binomialverteilung **wendet man an** im Fall von:
-es gibt **nur zwei Ausgangsmöglichkeiten** beim Experiment [Kopf oder Zahl, rote Kugel oder nichtrote Kugel, …]
-bei jedem Wurf / bei jedem Zug bleibt die **Wahrscheinlichkeit immer gleich** [es muss sich also um „Ziehen mit Zurücklegen" handeln].

W.16.01 Berechnung über Formel (∰)

Die Formel für die Binomialverteilung setzt sich aus drei Teilen zusammen:
[behalten Sie im Hintergrund, dass es bei der Binomialverteilung immer zwei Möglichkeiten gibt]
-die W.S. für die erste Möglichkeit, [in der Formel: p^k]
-die W.S. für die zweite Möglichkeit [in der Formel: $(1-p)^{n-k}$]
-die Vertauschungsmöglichkeiten [in der Formel: der Binomialkoeffizient]

Nehmen wir an, es geht um ein bestimmtes Ereignis [z.B. eine „6" zu würfeln, z.B. Regen an einem Tag, z.B. aus einer Kiste mit vielen Bauteilen ein defektes zu entnehmen,...]
Die Gesamtanzahl aller Züge/Würfe/Entnahmen/... wird mit **n** bezeichnet, wovon das besagte Ereignis **k** mal auftauchen soll.
Die W.S. von diesem Ereignis wird mit **p** bezeichnet,
die W.S. vom Gegenereignis ist damit automatisch **1–p**.
Die Formel für die Binomialverteilung berechnet die W.S., dass dieses Ereignis genau „k" mal auftritt.

$$P(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

←

P(k) ist die W.S. dass das gewünschte Ereignis genau „k" man auftritt.

p ist die W.S. des Ereignisses

n ist die Gesamtanzahl aller Würfe / Ziehungen / Versuche

Bsp.1 [siehe →Bsp.10]
Wie hoch ist die WS., dass von 30 Leuten in diesem Jahr genau 9 am Wochenende [Samstag oder Sonntag] Geburtstag haben ?

Lösungsmöglichkeit 1:
Zuerst teilen wir unsere 30 Leute in zwei Gruppen ein:
-Die Gruppe jener, die am WE Geburtstag haben [diese Gruppe besteht aus 9 Pers.] und
-die Gruppe jener, die nicht am WE Geburtstag haben [das ist dann der Rest, also 21 Leute].
Die W.S., dass *eine* Person am WE Geburtstag hat, liegt bei $^2/_7$,
die W.S., dass *eine* Person nicht am WE Geburtstag hat, liegt bei $^5/_7$.
Die W.S., dass 9 Personen am WE Geburtstag haben und 21 nicht am WE Geburtstag haben, liegt bei $\left(\frac{2}{7}\right)^9 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{21}$.
Nun ist ja aber nicht gesagt, dass die *ersten* neun Personen alle am WE Geburtstag haben und die anderen Personen alle die letzten 21.
Wir müssen wissen, wieviel Möglichkeiten es gibt, diese beiden Personengruppen unter einander zu vertauschen, denn all diese Vertauschungsmöglichkeiten wären ja zulässig. Es gibt $\binom{30}{9}$ Möglichkeiten zwei Gruppen von je 9 und 21 Personen miteinander zu kombinieren.
Die Lösung für unsere Aufgabe lautet also:

$$P(\text{ 9Pers. am WE Geburtstag }) = \binom{30}{9} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^9 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{21} \approx 0{,}155 \triangleq 15{,}5\%$$

Lösungsmöglichkeit 2:
Wir schalten das Hirn aus und gehen stupide nach der Formel für die Binomialverteilung vor: $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
n ist in diesem Fall 30, denn das ist die Gesamtanzahl aller „Züge".
k ist 9, denn k ist die Anzahl der gewünschten „Züge", also die Anzahl der Personen, die am WE Geburtstag haben.
p ist $^2/_9$, nämlich die W.S., dass eine Person am WE Geburtstag hat.
Nun setzen wir alles in die Formel ein und berechnen die W.S., dass 9 Leute am WE Geburtstag haben.

$$P(X=9) = \binom{30}{9} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^9 \cdot \left(1-\frac{5}{7}\right)^{30-9} = \binom{30}{9} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^9 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{21} \approx 0{,}155 \triangleq 15{,}5\%$$

Bsp.2 [siehe →Bsp.11]
In einer Urne befinden sich 5 blaue, 8 rote und 7 grüne Kugeln. Je eine Kugel wird hervorgeholt, ihre Farbe notiert wieder hineingelegt, dann wird die nächste hervorgeholt. Wie hoch ist die WS., dass von 9 gezogenen Kugeln genau 4 grün sind?

Lösung:
Es handelt sich natürlich um WS. mit Zurücklegen und obwohl wir *drei* Farben in Aufgabe haben, interessieren uns nur die beiden Möglicheitkeiten „grün" oder „nicht grün". Wir können also die Binomialverteilung anwenden.

Es gibt 20 Kugeln. Kommen Sie aber bitte nicht auf die falsche Idee, n=20 anzunehmen, n ist nämlich die Anzahl der Züge $\Rightarrow$ n=9.
Die Zahl „20" fließt nämlich nur in die W.S. für die grüne Kugel ein:
Die WS. für eine grüne Kugel liegt bei $^7/_{20}$ = 0,35. Die W.S. für eine nicht-grüne Kugel liegt damit bei 1–0,35 = 0,65. Nun setzen wir alles in die Formel ein und berechnen die W.S., dass 4 von 9 Kugeln grün sind.

$$P(X=4) = \binom{9}{4} \cdot 0{,}35^4 \cdot 0{,}65^5 \approx 0{,}219 \mathrel{\widehat{=}} 21{,}9\%$$

Bsp.3
In einem Ufo befinden sich 12 blaue, 13 rote und 15 grüne Männchen. Eine Delegation von 3 Männchen besucht die Erde. Wie hoch ist die WS., dass es sich um drei *grüne* Männchen handelt?

Lösung:
Natürlich ist Ihnen sofort aufgefallen, dass dies ein mieser, fieser Trick ist, denn es handelt sich um WS. *ohne* Zurücklegen. Es ist also *keine* Binomialverteilung, sondern es handelt sich um die sogenannte „hypergeometrische Verteilung" aus Kapitel W.17 [der Name ist nicht wichtig, sofern Sie den Lösungsweg hinkriegen].
Der Lösungsweg lautet also:

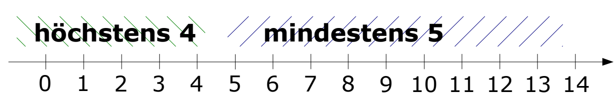
$$P(\text{3 grüne Männchen}) = \frac{\binom{12}{0} \cdot \binom{13}{0} \cdot \binom{15}{3}}{\binom{40}{3}} \approx 0{,}046 \mathrel{\widehat{=}} 4{,}6\%$$

W.16.02 Höchstens / Mindestens (∰)

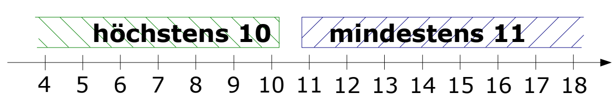
Aufgaben, die die Worte „höchstens" oder „mindestens" enthalten, gibt es natürlich nicht nur in der Binomialverteilung, es gibt sie überall in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Somit liefern die Worte „höchstens" und „mindestens" immer eine kumulierte W.S. [eine kumulierte W.S. ist immer eine Summe von mehreren W.S.]. Die Grundidee ist recht einfach, wenn man sich das Ganze am Zahlenstrahl vorstellt.

Bsp.4

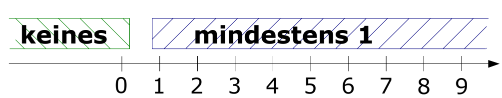
„Mindestens 5" ist das Gegenereignis von „höchstens 4"
Es gilt: $P(x \geq 5) = 1 - P(x \leq 4)$



„Höchstens 10" ist das Gegenereignis von „mindestens 11"
Es gilt: $P(x \leq 10) = 1 - P(x \geq 11)$



„Mindestens 1" ist das Gegenereignis von „keines".
Es gilt: $P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0)$



Nun ist es allerdings so, dass man z.B. „... mindestens 5 ...“ nicht mit einer einzigen Rechnung erhalten kann, sondern man braucht viele Rechnungen, denn „mindestens 5“ setzt sich zusammen aus „5“, „6“, „7“ oder so viel mehr, wie eben möglich ist.

Bsp.5 [siehe →Bsp.12]

In einer Urne befinden sich 7 grüne und 13 andersfarbige Kugeln. Je eine Kugel wird hervorgeholt, ihre Farbe notiert und wieder hineingelegt, dann wird die nächste hervorgeholt. Wie hoch ist die WS., dass von 8 gezogenen Kugeln mindestens 5 grün sind?

Lösung:
20 Kugeln, davon 7 grün ⇒ $p(g)={}^{7}/_{20}=0{,}35$ $p(\bar{g})=1-0{,}35=0{,}65$
8 Ziehungen ⇒ $n=8$
mindestens 5 grüne $k=5$, $k=6$, $k=7$ oder $k=8$ [mehr als 8 grüne geht nicht]
$P(\text{mind. 5 grüne}) = P(x\geqslant 5) = P(5)+P(6)+P(7)+P(8) =$
[über das Gegenereignis zu rechnen lohnt sich nicht, denn $P(X\geqslant 5)$ setzt sich aus 4 Fällen zusammen: P(5), P(6), P(7) und P(8). Das Gegenereignis wäre $P(X\leqslant 4)=P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)$, das sind sogar noch mehr Fälle, also noch umständlicher].

$$= \binom{8}{5}\cdot 0{,}35^5\cdot 0{,}65^3+\binom{8}{6}\cdot 0{,}35^6\cdot 0{,}65^2+\binom{8}{7}\cdot 0{,}35^7\cdot 0{,}65+\binom{8}{8}\cdot 0{,}35^8\cdot 0{,}65^0 =$$
$$\approx 0{,}0808 + 0{,}0217 + 0{,}0033 + 0{,}0002 = 0{,}106 \mathrel{\widehat{=}} 10{,}6\%$$

Bsp.6 [siehe →Bsp.13]

Kleopatra würfelt zum Zeitvertreib mit zwei Hexaedern [normale sechseitige Würfel].
Mit welcher W.S. erzielt sie bei 10 Würfen mindestens ein Pasch?

Lösung:
Zuerst berechnen wir die W.S. von einem Pasch bei *einem* Wurf.

$$P(\text{Pasch}) = P(11,22,33,44,55,66) = 6\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow P(\text{kein Pasch}) = 1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Jetzt betrachten wir die 10 Würfe. Mindestens *ein* Pasch zu erzielen, bedeutet 1, 2, 3, 4, …, 10 Päsche. Das einzige Ereignis, dass also *nicht* vorkommen darf, ist der Fall, dass Kleopatra kein Pasch erzielt [da würde sie nämlich sauer werden].
Also berechnen wir den Fall, dass Kleopatra *kein* Pasch erhält [das ist dann nämlich das Gegenereignis]. Diese W.S. ziehen wir von 100% ab und haben dann das gewünschte Ergebnis.
Die W.S. für „kein Pasch“ pro Wurf haben wir bereits errechnet, die war ${}^{5}/_{6}$.
Die W.S. für „kein Pasch“ bei 10 Würfen ist daher $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$
Die W.S. für mindestens ein Pasch [bei 10 Würfen] beträgt: $1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0{,}838 \mathrel{\widehat{=}} 83{,}8\%$

Bsp.7
Eine Firma stellt Klobürsten her und verpackt sie in Kisten zu je 25 Stück. 4% aller Klobürsten sind nicht rot, sondern nur rosa.
Nun soll ein neuer Kunde beworben werden.
Der Kunde macht folgenden Vorschlag: Er entnimmt einer Kiste 9 Klobürsten. Wenn höchstens zwei rosafarbene Klobürsten dabei sind, zahlt der Kunde 15€ pro Kiste, anderenfalls zahlt er nur 10€.
Wie groß ist die WS., dass die Firma 15€ pro Kiste erhält?

Lösung:
Wir brauchen die WS., dass weniger als drei Rosa-Bürsten gezogen werden. Nun ist es ja so, dass es keine Formel gibt, um „weniger" oder „höchstens" mit einer einzigen Formel zu berechnen.
Wir müssen also „weniger als drei" in die drei Fälle aufteilen: „ keine, eine, zwei".
Wir brauchen also die WS., dass keine Rosa-Bürste, eine Rosa-Bürste oder zwei Rosa-Bürsten gezogen werden. Es handelt sich um „ohne Zurücklegen", da jede Klobürste eine WS. von 4% hat, egal wieviel und was gezogen wird.
Also machen wir´s auf die Binomialverteilungs-Tour.

$$\text{P(0 Rosa-Bürsten)} = \binom{9}{0}\cdot 0{,}04^0\cdot 0{,}96^9 = 0{,}6925$$

$$\text{P(1 Rosa-Bürsten)} = \binom{9}{1}\cdot 0{,}04^1\cdot 0{,}96^8 = 0{,}2597$$

$$\text{P(2 Rosa-Bürsten)} = \binom{9}{2}\cdot 0{,}04^2\cdot 0{,}96^7 = 0{,}0432$$

$\Rightarrow$ P(weniger als 3 Rosa-Bürsten) =
$= P(X<3) = P(0)+P(1)+P(2) = 0{,}6925+0{,}2597+0{,}0432 = 0{,}9954 \triangleq 99{,}54\%$

W.16.03 Erwartungswert, Varianz, Streuung (∰)

Erwartungswert und Varianz werden bei der Binomialverteilung über eine einfache Formel gerechnet. [Standardabweichung damit auch, es ist ja die Wurzel aus der Varianz].

$$E(x) = n\cdot p$$
$$Var = n\cdot p\cdot(1-p)$$
$$\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$$

E(x) ist der Erwartungswert / Durchschnitt
Var ist die Varianz
σ ist die Standardabweichung bzw. die Streuung.
n ist die Anzahl der Würfe / Ziehungen / …
p ist die W.S der Ereignisses.

Im Prinzip kann man nicht viel falsch machen. Probieren wir ein paar Rechnungen.

Bsp.8

Ein Glücksrad ist in drei gleiche Sektoren eingeteilt, welche die Felder **A**pfel, **B**irne und **C**irsche zeigen. Im Laufe seiner Existenz wird das Glücksrad voraussichtlich 600.000 mal gedreht. Bestimmen Sie den Erwartungswert des Ereignisses: „Apfel", sowie dessen Varianz und Standardabweichung.

Lösung:

Da das Glücksrad in drei gleiche Sektoren eingeteilt ist, ist die W.S. [pro Drehung!] für A, B und C jeweils $p=\frac{1}{3}$.

Der Erwartungswert für „A" ist nicht anderes als die Anzahl der Apfel-Felder, die bei 600.000 Drehungen erwartet werden. [Das ist natürlich ein Drittel von 600.000, wir rechnen das aber stupide aus]. Die Formel für den Erwartungswert lautet:

$E(x) = n \cdot p = 600000 \cdot \frac{1}{3} = 200000.$

Die Formel für die Varianz lautet:

$Var(x) = n \cdot p \cdot (1-p) = 600000 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \approx 66666{,}67$

Die Standardabweichung [=Streuung] ist die Wurzel aus der Varianz:

$\sigma = \sqrt{66666{,}67} \approx 258{,}2$

Die letzte Aufgabe war einfach [für Sie hoffentlich auch]. Kompliziertere *Rechnungen* gibt es eigentlich kaum zu diesem Thema. Damit Sie jedoch nicht alle bei den Aufgaben volle Punktzahl erhalten, werden Sie in Klausuren und Prüfungen diese Fragen in viel hässlicherer Formulierung begegnen und in andere [mehr oder weniger] komplizierte Wahrscheinlichkeitsrechnungen eingebettet.
Z.B. so wie die folgende hübsche Aufgabe:

Bsp.9

Eine unglaublich tolle und gut aussehende Person wirft 100 Mal mit zwei [sechsseitigen] idealen Würfeln.

a) Mit welcher W.S. ist das Produkt der Augenzahlen bei einem Wurf (mit zwei Würfeln) ungerade?
b) Bestimmen den Erwartungswert des Ereignisses „Augenprodukt ungerade".
c) Mit welcher W.S. weicht die Anzahl der Würfe, die ein ungerades Produkt liefern, um höchstens eine halbe Standardabweichung vom Erwartungswert ab?

Lösung:

Eine Vorüberlegung: Die W.S. bei einem Wurf mit *einem* Würfel eine ungerade Zahl zu werfen, beträgt 0,5 [drei der sechs Würfelflächen tragen eine ungerade Zahl].

a) Das Produkt von zwei Zahlen ist genau dann ungerade, wenn beide Zahlen ungerade sind. Daher müssen beide Würfel eine ungerade Zahl zeigen.
Die W.S. mit beiden Würfen eine ungerade Zahl zu werfen, beträgt:
$P(uu) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25 \triangleq 25\%$
b) Was kann mit dem Erwartungswert überhaupt gefragt werden? Da ein Erwar-

tungswert ein Durchschnitt ist, kann es natürlich um einen einzigen Wurf gehen. Es geht also um alle 100 Würfe ⇒ n=100. Die W.S. für ein ungerades Augenprodukt liegt bei p=0,25 [laut letzter Teilaufgabe].
Der Erwartungswert liegt also bei: $\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}25 = 25$

c) Den Erwartungswert kennen wir, der beträgt E(x)=25.
Wir berechnen die Standardabweichung, dann sehen wir weiter.
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0{,}25 \cdot (1-0{,}25)} \approx 4{,}33$
Wenn eine Anzahl nun um maximal die Hälfte 4,33 von 25 abweichen soll, bedeutet das, dass die Anzahl zwischen 25−½·4,33=22,84 und 25+½·4,33=27,17 liegen muss. Die Anzahl der Würfe mit ungeraden Augenzahlen muss demnach 23, 24, 25, 26 oder 27 betragen.
$\Rightarrow P(\mu-0{,}5\cdot\sigma<x<\mu-0{,}5\cdot\sigma) = P(23 \leqslant x \leqslant 27) = P(23)+P(24)+P(25)+P(26)+P(27)$
Nebenrechnung:

$$P(23) = \binom{100}{23} \cdot 0{,}25^{23} \cdot 0{,}75^{77} = 0{,}085$$
$$P(24) = \binom{100}{24} \cdot 0{,}25^{24} \cdot 0{,}75^{76} = 0{,}091$$
$$P(25) = \binom{100}{25} \cdot 0{,}25^{25} \cdot 0{,}75^{75} = 0{,}092$$
$$P(26) = \binom{100}{26} \cdot 0{,}25^{26} \cdot 0{,}75^{74} = 0{,}088$$
$$P(27) = \binom{100}{27} \cdot 0{,}25^{27} \cdot 0{,}75^{73} = 0{,}081$$

$P(23 \leqslant x \leqslant 27) = 0{,}085+0{,}091+0{,}092+0{,}088+0{,}081=0{,}437$

W.16.04 Binomialverteilung mit GTR/CAS (∰)

Normalerweise werden Sie für die meisten Berechnungen zur Binomialverteilung einen GTR oder CAS oder ein Computerprogramm verwenden dürfen.
Das vereinfacht die Rechnung erheblich, denn jetzt müssen Sie nur noch erkennen können, *dass* es sich um eine Binomialverteilung handelt und Sie sollten Ihr tolles elektronisches Gerät auch bedienen können.
Sie müssen sich vor Augen halten, dass es im GTR/CAS zwei Sorten von Berechnungen zur Binomialverteilung gibt.

a) Die normale Binomialverteilung. Hier wird die W.S. berechnet, dass genau *eine* Zahl, also *ein* Wert eintrifft.
Dieser Befehl heißt je nach GTR/CAS „binompdf( )“ oder „bpd( )“.

b) Die kumulierte Binomialverteilung. Hier werden alle W.S. von Null bis zu einem gesuchten Wert berechnet und zusammengezählt. [Geht´s also um den Wert „4“, berechnet der GTR/CAS alle W.S. von 0 bis 4 und zählt sie zusammen, er berechnet also p(0)+p(1)+p(2)+p(3)+p(4)]. Die kumulierte Bin.vert. verwendet man daher sehr häufig in Verbindung mit den Worten „mindestens“ oder „höchstens“.
Dieser Befehl heißt je nach GTR/CAS „binomcdf( )“ oder „bcd( )“.

Falls Sie den genauen Eingabebefehl nicht kennen, schauen Sie unter „www.havonix.de > Downloads > Bedienungsanleitung für den GTR“ nach. An dieser Stelle wird das sonst zu umfangreich.

Bsp.10 [siehe →Bsp.1]

Wie hoch ist die WS., dass von 30 Leuten in diesem Jahr genau 9 am Wochenende [Samstag oder Sonntag] Geburtstag haben ?

Lösung:

Zuerst fällt Ihnen auf, dass es sich um einen Binomialverteilung handelt. Das ist Ihnen deswegen eingefallen, weil es *nur zwei Ausgangsmöglichkeiten* gibt [entweder am WE Geburtstag oder nicht] und *die W.S. ändert sich nicht*, sie bleibt bei jeder Person gleich. Es handelt sich auch um die „normale" Bin.vert. und nicht um die kumulierte, da wir *genau* 9 Personen brauchen und nicht *mindestens* oder *höchstens* 9.

Danach überlegen Sie sich, dass die Gesamtanzahl 30 beträgt $\Rightarrow$ n=30, die W.S. am WE Geburtstag zu haben liegt bei $^2/_7 \Rightarrow p={}^2/_7$ und wir suchen die W.S., dass dieses Ereignis bei 9 Leuten eintrifft $\Rightarrow$ k=9.

Nun geben Sie den „binompdf()"- oder „bpd()"-Befehl mit den entsprechenden Werten für n, p und k in Ihren GTR/CAS ein und sollten erhalten:

$P(X=9) \approx 0{,}155 \triangleq 15{,}5\%$

Taschenrechnereingabe:

Falls Sie einen **TI** verwenden, brauchen Sie vermutlich den Befehl binompdf(30,2/7,9).

Falls Sie einen **Casio** verwenden, wechseln Sie (vermutlich) ins Statitikmenü, markieren „List 1", erzeugen sich mit „seq(x,x,0,9,1)" eine Liste mit allen Zahlen von 0 bis 9 und erhalten dann mit „DIST>BINM>Bpd" unter Eingabe der Werte Numtrial=30, p=2/7 alle zugehörigen Ergebnisse.

Details für die Taschenrechnereingabe finden Sie unter: „www.havonix.de > Downloads > Bedienungsanleitung für den GTR".

Bsp.11 [siehe →Bsp.2]

In einer Urne befinden sich 5 blaue, 8 rote und 7 grüne Kugeln. Je eine Kugel wird hervorgeholt, ihre Farbe notiert und wieder hineingelegt, dann wird die nächste hervorgeholt. Wie hoch ist die WS., dass von 9 gezogenen Kugeln genau 4 grün sind?

Lösung:

Zuerst fällt auf, dass uns nur interessiert, ob die Kugeln grün oder nichtgrün sind. Statt der *drei* Farben, unterteilen wie die Kugeln gedanklich in 7 grüne und 13 nichtgrüne Kugeln und haben somit nur noch *zwei* Möglichkeiten. Da es sich zusätzlich auch noch um Ziehen *mit* Zurücklegen handelt, sind alle Voraussetzungen für die Binomialverteilung erfüllt.

Da wir *genau* 4 grüne Kugeln brauchen [und nix mit mindestens/höstens], brauchen wir auch die normale Bin.vert. und *nicht* die kumulierte Bin.vert.

[Sie brauchen also den Befehl „binompdf()" bzw. „Bpd()"]

Die entscheidenden Werte für die Bin.Vert. sind: n=20, $p={}^7/_{20}=0.35$, k=4

Sie hacken die tollen Befehle in Ihren Taschenrechner und erhalten:

$P(X=4) \approx 0{,}219 \triangleq 21{,}9\%$

Taschenrechnereingabe:

Falls Sie einen **TI** verwenden, brauchen Sie vermutlich den Befehl binompdf(20,0.35,4).

Falls Sie einen **Casio** verwenden, wechseln Sie (vermutlich) ins Statitikmenü, markieren „List 1", erzeugen sich mit „seq(x,x,0,20,1)" eine Liste mit allen Zahlen von 0 bis 20 und erhalten dann mit „DIST>BINM>Bpd" unter Eingabe der Werte Numtrial=20, p=0.35 alle zugehörigen Ergebnisse.

Details für die Taschenrechnereingabe finden Sie unter: „www.havonix.de > Downloads > Bedienungsanleitung für den GTR".

Bsp.12 [siehe →Bsp.5]

In einer Urne befinden sich 7 grüne und 13 lilablassblaue Kugeln. Je eine Kugel wird hervorgeholt, ihre Farbe notiert und wieder hineingelegt, dann wird die nächste hervorgeholt. Wie hoch ist die WS., dass von 8 gezogenen Kugeln mindestens 5 grün sind?

Lösung:

Eigentlich genau gleich wie Bsp.11, bloß, dass wir dort *genau* 4 grüne Kugeln haben wollten und hier brauchen wir *mindestens* 5.

Der Begriff „mindestens 5" sagt uns, dass wir 5 oder 6 oder 7 oder 8 brauchen.

Da die meisten GTR/CAS aber nur von 0 aufwärts addieren können [und nicht von 5 aufwärts] trixen wir. Wir überlegen uns nämlich, welche W.S. *nicht* auftauchen dürfen [Stichwort: Gegenereignis]: das sind nämlich die Zahlen von 0 bis 4.

Also berechnen wir über den Befehl „binomcdf()" oder „bcd()" die kumulierte W.S. der Zahlen 0 bis 4, erhalten hierfür den Wert 0,894 und wissen daher:

DAS BÖSE beträgt 0,894. Also beträgt die W.S. für das gesuchte:

$P(x \geqslant 5) = 1-0,894 = 0,106 \mathrel{\widehat{=}} 10,6\%$

Taschenrechnereingabe:

Falls Sie einen **TI** verwenden, brauchen Sie vermutlich den Befehl binomcdf(20,0.35,5).

Falls Sie einen **Casio** verwenden, wechseln Sie (vermutlich) ins Statitikmenü, markieren „List 1", erzeugen sich mit „seq(x,x,0,20,1)" eine Liste mit allen Zahlen von 0 bis 20 und erhalten dann mit „DIST>BINM>Bcd" unter Eingabe der Werte Numtrial=20, p=0.35 alle zugehörigen Ergebnisse.

Details für die Taschenrechnereingabe finden Sie unter: „www.havonix.de > Downloads > Bedienungsanleitung für den GTR".

Bsp.13 [siehe →Bsp.6]

Kleopatra würfelt zum Zeitvertreib mit zwei Hexaedern [normale sechseitige Würfel].

Mit welcher W.S. erzielt sie bei 10 Würfen mindestens ein Pasch?

Lösung:

Es gibt nur zwei Ausgangsmöglichkeiten [Pasch oder Nichtpasch] und die W.S. bleibt bei Wurf immer gleiche, also handelt es sich um eine Binomialverteilung.

Die W.S. für ein Pasch [pro Wurf] beträgt:

$$P(\text{Pasch}) = P(11,22,33,44,55,66) = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Da unsere hübsche Pharaonin mindestens ein Pasch erzielen möchte, heißt das, dass wir alle W.S. von 1Pasch bis 10Päsche errechnen und zusammenzählen müssen. Das ist aber mühselig und der GTR kann nicht von 1 aufwärts addieren.

Also trixen wir wieder. Was wäre BÖSE? Wenn Kleopatra kein Pasch hätte, wäre sie stinksauer.

Wir berechnen also die W.S. für kein Pasch: $P(x=0) \approx 0,162$

und ziehen dieses Ergebnis von 1 ab.

[Da wir nur die W.S. von einer Zahl brauchen, ist der Befehl „binompdf()" oder „Bpd()" am Start]

$\Rightarrow$ $P(\text{mind. ein Pasch}) = P(x \geqslant 5) = 1-0,162 = 0,838 \mathrel{\widehat{=}} 83,8\%$