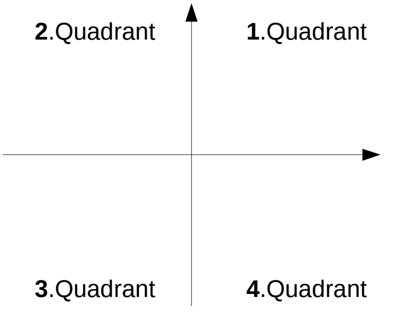
A.27 Schaubilder von Funktionen

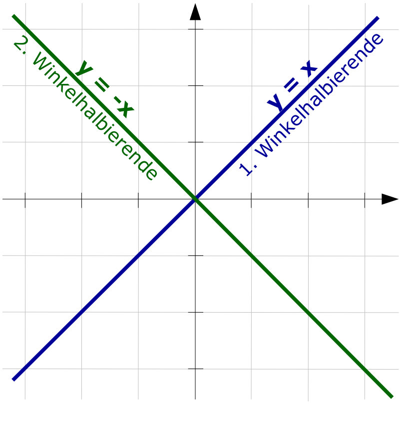
A.27.01 Standard-Funktionen (∰)

Es gibt sechs Typen von Funktionen, von denen Ihr wissen solltet, wie sie in etwa aussehen. Die letzten zwei Funktionstypen sind nicht unendlich wichtig.

→ **ganzrationale Funktionen** (Parabeln 2ten, 3ten, .. Grades)
→ **e-Funktionen**
→ **trigonometrische Funktionen**
→ **Hyperbeln** (einfache gebrochen-rationale Funktionen)
→ **Wurzel-Funktionen**
→ **Logarithus-Funktionen**
→ Kreis- und Ellipsenfunktionen
→ Glockenkurven

Die Quadranten:
[sind zwar keine Funktionen, sind aber trotzdem wichtig]
Die Koordinatenebene wird von der x- und y-Achse in vier Felder eingeteilt. Diese Felder heißen „Quadranten". Der erste Quadrant befindet sich rechts oben, dann wird im mathematischen Richtungssinn [also gegen den Uhrzeigersinn] bis zum vierten Quadranten weiter durchnummeriert.



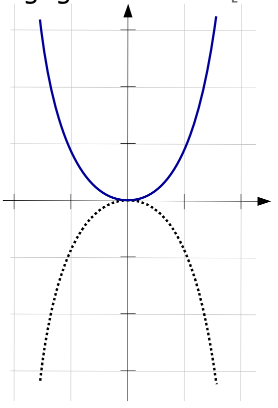


Die erste und zweite Winkelhalbierende:
Die erste Winkelhalbierende hat die Gleichung:
$y = x$
Die zweite Winkelhalbierende hat die Gleichung:
$y = -x$

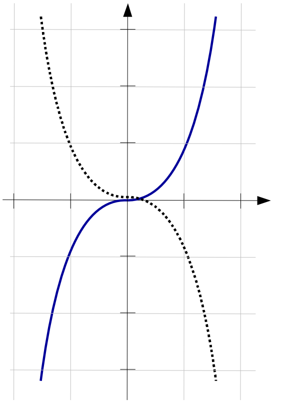
Ganzrationale Funktionen bzw. Parabeln (nicht nur 2. Ordnung)

→ ganzrationale Funktionen haben *keine* Asymptoten. [weder senkrechte, noch waagerechte, noch sonstwelche, sie nähern sich also keiner Gerade an.]

→ für $x \to \pm\infty$ [also weit links und weit rechts im Schaubild] gehen die Funktionswerte immer gegen $\pm\infty$. [Also ganz runter oder ganz hoch]



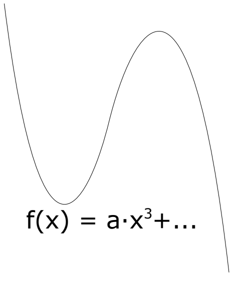
durchgezogene Linie:
x^2 oder x^4 oder x^6 ...
gepunktete Linie:
$-x^2$ oder $-x^4$ oder $-x^6$ ...

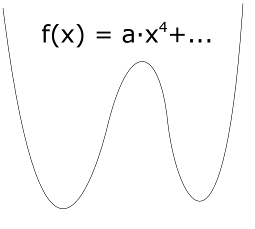


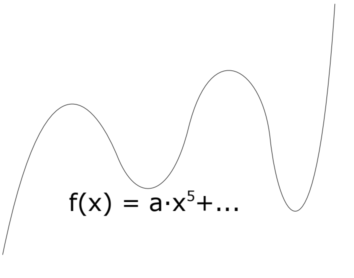
durchgezogene Linie:
x^3 oder x^5 oder x^7 ...
gepunktete Linie:
$-x^3$ oder $-x^5$ oder $-x^7$ ...

Üblicherweise haben ganzrationale Funktionen mehrere Extrempunkte.
„Normalerweise" gibts einen Extrempunkt weniger als die höchste Potenz.
[Es können jedoch auch noch weniger sein].

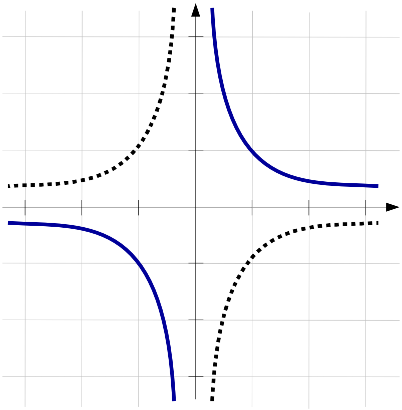
Eine Funktion 3. Grades kann also bis zu 2 Extrempunkten haben,
eine Funktion 4. Grades kann also bis zu 3 Extrempunkten haben,
eine Funktion 5. Grades kann also bis zu 4 Extrempunkten haben, etc...



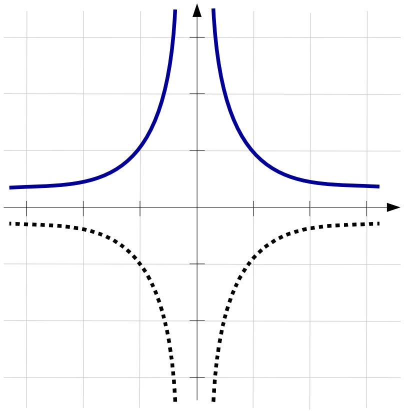




Hyperbel-Funktionen [einfache gebrochen-rationale Funktionen]
Hyperbeln sind die Vorstufe von gebrochen-rationalen Funktionen.
Man erkennt Hyperbeln natürlich am Vorhandensein von senkrechten Asymptoten.



durchgezogene Linie:
$\frac{1}{x}$ oder $\frac{1}{x^3}$ oder $\frac{1}{x^5}$ ...
gestrichelte Linie:
$-\frac{1}{x}$ oder $-\frac{1}{x^3}$ oder $-\frac{1}{x^5}$ ...



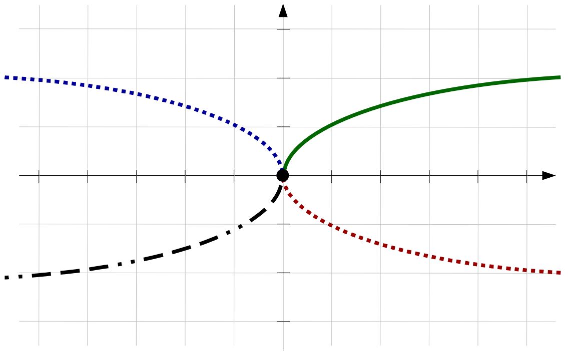
durchgezogene Linie:
$\frac{1}{x^2}$ oder $\frac{1}{x^4}$ oder $\frac{1}{x^6}$ ...
gestrichelte Linie:
$-\frac{1}{x^2}$ oder $-\frac{1}{x^4}$ oder $-\frac{1}{x^6}$ ...

Wurzel-Funktionen

Wurzelfunktionen haben die Form von halben quadratischen Parabeln, die auf der Seite liegen.
Hauptmerkmal ist jedoch, dass Wurzeln in einem ganz bestimmten Punkt beginnen [hier in der Zeichnung beginnen alle im Ursprung] und es gibt sie nur auf der einen Seite [also nur links oder rechts von diesem Punkt]. Auf der anderen Seite gibt es keine Funktion [liegt an der Definitionsmenge].

$f(x)=\sqrt{-x}$
D$=\{x|x\leqslant 0\}$

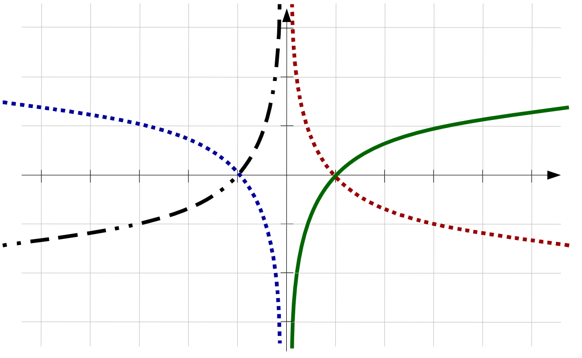
$f(x)=\sqrt{x}$
D$=\{x|x\leqslant 0\}$



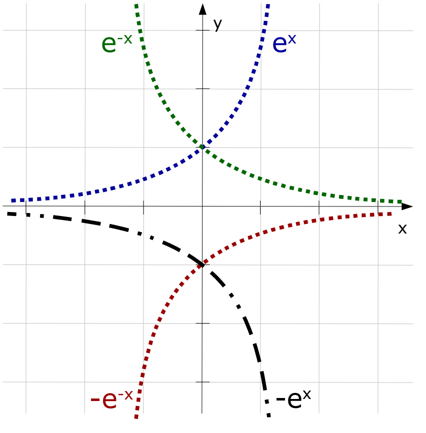
$f(x)=-\sqrt{-x}$
D$=\{x|x\leqslant 0\}$

$f(x)=-\sqrt{x}$
D$=\{x|x\leqslant 0\}$

Logarithmus-Funktionen
Logarithmus-Funktionen haben als typisches Merkmal eine senkrechte Asymptote und sind nur auf einer Seite davon definiert [also nur links davon oder nur rechts davon].



e-Funktionen
e-Funktionen nähern sich im Normalfall entweder links oder rechts einer waagerechte Asymptote [sehr oft die x-Achse], auf der anderen Seite gehen die y-Werte nach +∞ oder nach -∞.
Es gibt selbstverständlich auch alle möglichen Ausnahmen, die muss aber nicht aus dem Schaubild erkennen können.



Es gibt noch zwei Funktionen, die nicht so sehr zu den grundlegenden Funktionen gehören, auf die Sie aber trotzdem immer wieder stoßen werden, daher gebührt ihnen die Ehre, hier erscheinen zu dürfen.

Die **Kreisfunktion**

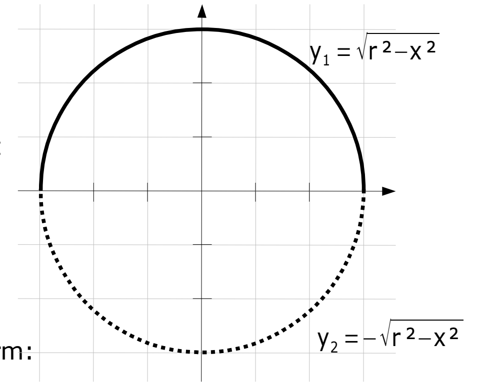
Es gibt eine Funktion, die einen Kreis beschreibt [eigentlich beschreibt sie nur den oberen Halbkreis]:

$y_1 = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Das ist ein Halbkreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt im Ursprung. Der untere Halbkreis hat dementsprechend die Form: $y_2 = -\sqrt{r^2 - x^2}$

Liegt der Mittelpunkt nicht im Ursprung, sondern z.B. in M(a|b), so lautet die Gleichung der oberen bzw. unteren Halbkreises:

$y_1 = \sqrt{r^2 - (x-a)^2} + b$ bzw. $y_2 = -\sqrt{r^2 - (x-a)^2} + b$



Eine Ellipse mit dem Mittelpunkt in O(0|0) hat die Form:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Hierbei ist „a“ die Halbachse [=halbe Durchmesser] in x-Richtung, „b“ ist die Halbachse in y-Richtung.

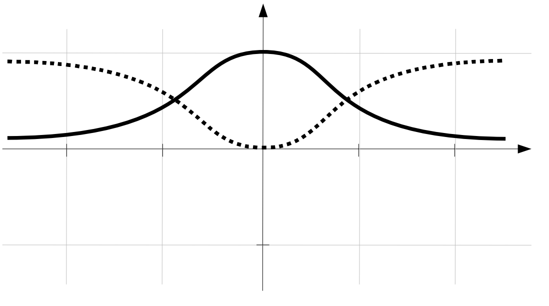
Die **Glockenkurve** (auch Gaußsche Glockenkurve) [Ist nicht sooo arg wichtig]

Es gibt nur wenige stetige Kurven, die achsensymmetrisch sind und eine waagerechte Asymptote haben.

Die eine Funktion ist: $f(x) = e^{-x^2}$

Man kann die Breite, die Höhe und die senkrechte Lage durch drei Parameter „a“, „b“ und „c“ variieren:

$f(x) = b \cdot e^{-a \cdot x^2} + c$



Die gleiche Funktion kann man auch erhalten, wenn man keine e-Funktion verwendet, sondern eine Bruchfunktion:

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Die Form kann variiert werden durch die Parameter „a“, „b“ und „c“, welche die Breite, die Höhe und die senkrechte Lage der Funktion verändern:

$f(x) = \frac{b}{x^2+a^2} + c$

So. Jetzt wissen Sie mehr, als nötig. Herzlichen Glückwunsch!

A.27.02 Zuordnung von Schaubildern (∯)

Wenn man Schaubilder gegeben hat, die man diversen Funktionsgleichungen zuordnen soll oder man hat Schaubilder gegeben von denen man die Funktionsgleichung bestimmen soll,
geht man in Gedanken alle Schaubilder der Grundfunktionen durch und überlegt ob man durch Streckungen, Verschiebungen oder Spiegelungen auf das gegebene Schaubild kommen kann. [Streckungen, Verschiebungen oder Spiegelungen: siehe →Kap.A.23]

Bsp.1

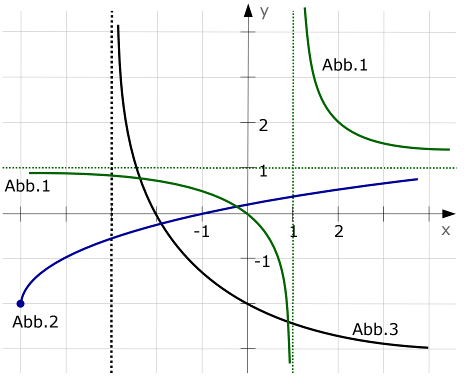
Ordnen Sie die drei Schaubilder den Funktionsgleichungen zu!

$f(x)=a\cdot\ln(x+3)$

$g(x)=\frac{2x+b}{c\cdot x-2}$

$h(x)=\sqrt{x+d}-2$

Bestimmen Sie die Parameter a,b,c und d!



Lösung:

Abb.1 ist zweigeteilt und hat offensichtlich zwei Asymptoten: eine waagerechte bei y=1 und eine senkrechte bei x=1.
Senkrechte Asymptoten und Zweiteilungen von Funktionen sind typisch für gebrochen-rationale Funktionen. Daher gehört Abb.1 zu g(x).
Um die Parameter zu bestimmen, verwendet man Informationen der Kurve.
Z.B. die senkrechte Asymptote bei x=1. Man berechnet senkrechte Asymptoten, indem man den Nenner Null setzt $\Rightarrow$ $c\cdot x-2=0$. Da x=1 gilt, erhält man: $c\cdot 1-2=0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{c=2}$. $\Rightarrow$ $g(x)=\frac{2x+b}{2x-2}$
Eine weitere Information sind Punkte, durch die das Schaubild der Kurve verläuft. Z.B. verläuft die Kurve durch den Punkt O(0|0). $\Rightarrow$ x=0 und y=0 in g(x) einsetzen $\Rightarrow$ $0=\frac{2\cdot 0+b}{2\cdot 0-2}$ $\Rightarrow$ $0=-\frac{b}{2}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{0=b}$.

Abb.2 zeigt eine Funktion, die im Punkt P(-5|-2) beginnt. Nur Wurzelfunktionen beginnen in einem bestimmten Punkt. Abb.2 beschreiben daher das Schaubild von h(x). Um den Parameter d zu bestimmen, setzen wir einfach einen Punkt des Schaubilds ein. Es gibt mehrere Punkte von h(x), die man gut ablesen kann, z.B. P(-5|-2). x=-5 und y=-2 in $h(x)=\sqrt{x+d}-2$
$\Rightarrow$ $-2=\sqrt{-5+d}-2$ $\Rightarrow$ $0=\sqrt{-5+d}$ $\Rightarrow$ $0=-5+d$ $\Rightarrow$ $\mathbf{d=5}$

Abb.3 muss damit f(x) sein. Man kann dieses auch damit begründen, dass Abb.3 eine senkrechte Asymptote besitzt [bei x=-3] und die Funktion nur auf *einer* Seite dieser Asymptote existiert [nur rechts von x=-3]. Nur Logarithmusfunktionen tun das. Daher ist Abb.3 das Schaubild von $f(x)=a\cdot\ln(x+3)$.
Man setzt irgendeinen Punkt des Schaubilds ein, um „a" zu bestimmen. Verwendet man beispielsweise den Punkt (-2|0) ist das eine super-tolle Sache, allerdings erhält man „a" nicht, sondern nur eine wahre Aussage 0=0.
Setzt man hingegen den Punkt (0|-2) ein, erhält man was Wunderschönes:

x=0 und y=-2 in $f(x)=a\cdot\ln(x+3)$ ⇒ $-2=a\cdot\ln(0+3)$ ⇒ $\mathbf{a=\frac{-2}{\ln(3)}}$

Zusammenfassung:

Abb.1 ist g(x), Abb.2 ist h(x), Abb.3 ist f(x). $a=\frac{-2}{\ln(3)}$, b=0, c=2, d=5.

Bsp.2

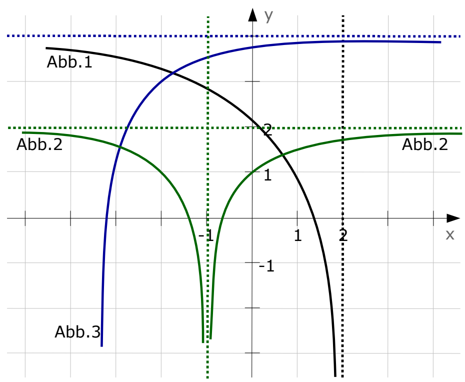
Ordnen Sie die drei Schaubilder den Funktionsgleichungen zu!

$f(x)=3\cdot\ln(a-x)$

$g(x)=b-\frac{1}{(x+c)^2}$

$h(x)=d-e^{-x-2}$

Bestimmen Sie die Parameter a,b,c und d!



Lösung:

Abb.1 muss damit f(x) sein. Man kann das damit begründen, dass Abb.1 eine senkrechte Asymptote besitzt [bei x=2] und die Funktion nur auf *einer* Seite dieser Asymptote existiert [nur links von x=2]. Nur Logarithmusfunktionen existieren auf einer einzigen Seite der Asymptote. Daher ist Abb.1 das Schaubild von $f(x)=3\cdot\ln(a-x)$.
Die beste Methode, um „a" zu bestimmen, ist die Betrachtung der senkrechten Asymptote. Diese ist immer an der Stelle, an welcher das Argument [hier: „a−x"] Null wird. ⇒ $a-x=0$. Da die Asymptote bei x=2 ist, gilt $a-2=0$ ⇒ **a=2**.

Abb.2 hat zwar ebenfalls eine senkrechte Asymptote, aber im Gegensatz zu Abb.1 existiert die Funktion auf beiden Seiten der Asymptote. Abb.2 zeigt daher eine gebrochen-rationale Funktion. ⇒ Abb.2 ist g(x).
Die senkrechte Asymptote ist bei x=-1 und ist immer die Nullstelle des Nenners.
⇒ $(x+c)^2=0$ ⇒ $x+c=0$ [mit x=-1] ⇒ $-1+c=0$ ⇒ **c=1**.
Um „b" zu bestimmen, kann man entweder die Theorie der waagerechten Asymptoten verwenden [die waagerechte Asymptote des Schaubilds liegt bei y=2. In der Funktionsgleichung ist die Zahl vor dem Bruch die waagerechte Asymptote ⇒ b=2] oder man setzt in g(x) z.B. den Punkt P(0|1) ein [und natürlich c=1].

$g(x)=b-\frac{1}{(x+1)^2}$ x=0 und y=1 einsetzen ⇒ $1=b-\frac{1}{(0+1)^2}$ ⇒ $1=b-1$ ⇒ **b=2**.

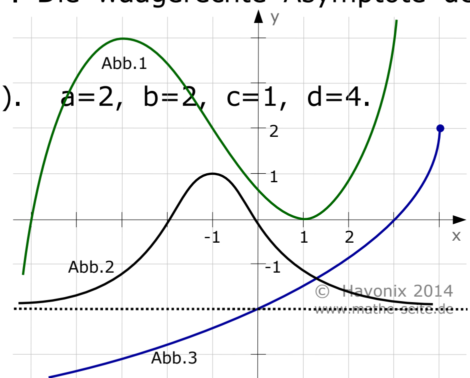
Abb.3 muss damit h(x) sein. Man kann dieses auch damit begründen, dass Abb.3 eine waagerechte Asymptote hat. Da das Schaubild sich nur an einer Seite an die Asymptote anschmiegt [sie schmiegt sich nur rechts an. Links entfernt sich das Schaubild von der Asymptote nach unten] muss es sich um eine e-Funktion handeln.
Die waagerechte Asymptote einer e-Funktion wird durch die Zahl angegeben, die vor dem e-Term steht, also durch „d". Die waagerechte Asymptote des Schaubilds ist bei y=4 ⇒ **d=4**.

Zusammenfassung:

Abb.1 ist f(x), Abb.2 ist g(x), Abb.3 ist h(x). a=2, b=2, c=1, d=4.

Bsp.3

Ordnen Sie die drei Schaubilder



den Funktionsgleichungen zu!

$f(x)=a\cdot\sqrt{b-x}+c$

$g(x)=d\cdot(x+e)\cdot(x+f)^2$

$h(x)=g\cdot e^{-(x+1)^2}+h$

Bestimmen Sie die Werte aller Parameter!

Lösung:

Abb.1 hat die Form einer Parabel dritter Ordnung. Es muss also g(x) sein.
Zur Bestimmung der Parameter sind die Nullstellen hilfreich. Das Schaubild hat bei x=1 eine doppelte Nullstelle, daher enthält die Funktionsgleichung „$(x-1)^2$“. Desweiteren hat das Schaubild eine einfache Nullstelle bei x=-5, also enthält die Funktionsgleichung „(x+5)“.
g(x) hat also die Form: $g(x)=??\cdot(x-1)^2\cdot(x+5)$. $\Rightarrow$ **f=-1**, **e=5**.
Um den Parameter „d“ zu bestimmen, setzen wir irgendeinen Punkt des Schaubilds ein. Z.B. P(-1|2). x=-1 und y=2 in g(x).

$\Rightarrow\; 2=d\cdot(-1+5)\cdot(-2-2)^2 \;\Rightarrow\; 2=d\cdot4\cdot(-4)^2 \;\Rightarrow\; 2=d\cdot64 \;\Rightarrow\; \mathbf{d=\frac{1}{32}}$

$\Rightarrow\; g(x)=\frac{1}{32}\cdot(x+5)\cdot(x-1)^2$

[Auf das Aufstellen von Funktionen gehen wir in Kap. A.46.04 noch einmal detailliert ein!]

Abb.2 hat die Form der Gaußschen Glockenkurve. Sie muss durch h(x) beschrieben werden. Da die waagerechte Asymptote des Schaubilds bei y=-2 liegt, muss „h“ den Wert **h=-2** haben.
Um „g“ zu bestimmen, setzen wir den einzigen Punkt ein, den man gut ablesen kann: P(-1|1). x=-1 und y=1 in h(x): $1=g\cdot e^{-(-1+1)^2}-2 \;\Rightarrow\; 1=g\cdot e^0-2 \;\Rightarrow\; \mathbf{3=g}$

Abb.3 muss natürlich f(x) sein. Das erkennt man schon allein deswegen, weil das Schaubild in einem bestimmten Punkt, nämlich in (4|2) beginnt. Das Schaubild beschreibt somit eine Wurzelfunktion. Die Funktion beginnt bei x=4, der Term unter Wurzel muss also für x=4 Null ergeben. $\Rightarrow$ $b-x=0$ $\Rightarrow$ $b-4=0$ $\Rightarrow$ **b=4**
Setzen wir den Punkt (4|2) in die Funktion ein und schauen, was passiert.
x=4 und y=2 in f(x) [und natürlich b=4] $\Rightarrow$ $2=a\cdot\sqrt{4-4}+c$ $\Rightarrow$ $2=a\cdot0+c$ $\Rightarrow$ **2=c**

$\Rightarrow\; f(x)=a\cdot\sqrt{4-x}+2$

Nun setzen wir noch irgendeinen Punkt in f(x) ein. Z.B. (3|0)
x=3 und y=0 in f(x) $\Rightarrow$ $0=a\cdot\sqrt{4-3}+2$ $\Rightarrow$ $0=a\cdot1+2$ $\Rightarrow$ **-2=a**

$\Rightarrow\; f(x)=-2\cdot\sqrt{4-x}+2$

Zusammenfassung:

Abb.1 ist g(x), Abb.2 ist h(x), Abb.3 ist f(x).

a=-2, b=4, c=2, $d=\frac{1}{32}$, e=5, f=-1, g=3, h=-2.

A.27.03 Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung (∰)

Die zentrale Idee bei Schaubildern von einer Funktion und deren Ableitung ist, dass die Steigung der Funktion der y-Wert der Ableitung ist.
Mit dieser Idee könnte man zwar *jede* Aufgabe lösen, allerdings wird das meistens recht umständlich.
[siehe →Bsp.4, →Bsp.5 und →Bsp.6]

Die Steigung von f(x) ist der y-Wert von f'(x). Kurz:

$$m_f = y_{f'}$$

Es gibt ein paar nette Abkürzungen:

z.B. die „N-E-W-Tabelle"
„N" sind die Nullstellen, „E" sind die Extrempunkte, „W" sind die Wendepunkte.
Die Nullstellen von f(x) haben keine Bedeutung für die Ableitungsfunktion. Die Extrempunkte von f(x) sind die Nullstellen von f'(x) und die Wendepunkte von f(x) sind die Extrempunkte von f'(x).

f(x)	f'(x)
N	
E	N
W	E
	W

Man kann die Tabelle auch viel ausführlicher gestalten. Damit kann man eigentlich jede Aufgabe recht einfach lösen. Der einzige Nachteil ist, dass man sie auswendig lernen muss.
„N" sind die Nullstellen, „$N_{+\to-}$" ist eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus, „$N_{-\to+}$" ist eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von Minus nach Plus. „$N_{+\to+}$" und „$N_{-\to-}$" sind Nullstellen ohne Vorzeichenwechsel [also Extrempunkte, die auf der x-Achse liegen] und „W" sind die Wendepunkte.
[siehe →Bsp.7 und →Bsp.8]

f(x)	f'(x)
N	
H	$N_{+\to-}$
T	$N_{-\to+}$
SP	$N_{+\to+}$, $N_{-\to-}$
W	H oder T
	W
steigend	oberhalb der x-Achse
fallend	unterhalb der x-Achse

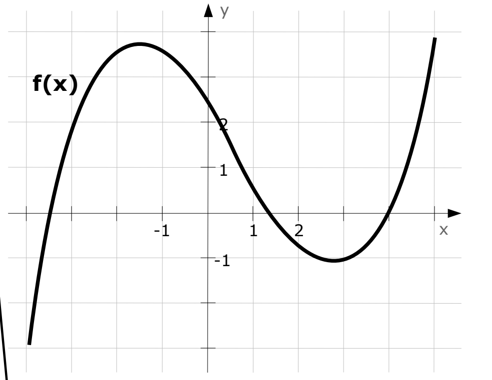
Es gibt auch eine Möglichkeit, die Stammfunktion *genau* zu zeichnen. Leider ist diese Methode recht zeitaufwändig und wird daher recht selten praktiziert.
[siehe →Bsp.9 und →Bsp.10]

Meist ist eine Kombination aus allen Möglichkeiten sinnvoll:
Aus den Extrempunkten von f(x) macht man Nullstellen von f'(x).
Aus den Wendepunkten von f(x) macht man Extrema von f'(x).
Dann misst man noch ein paar Steigungen von f(x) und erhält damit y-Werte [und damit Punkte] von f'(x).

Das Schaubild der Ableitung f'(x) zeichnen wir in Bsp.4, Bsp.5 und Bsp.6,
Das Schaubild der Stammfunktion F(x) zeichnen wir in Bsp.7 bis Bsp.10.

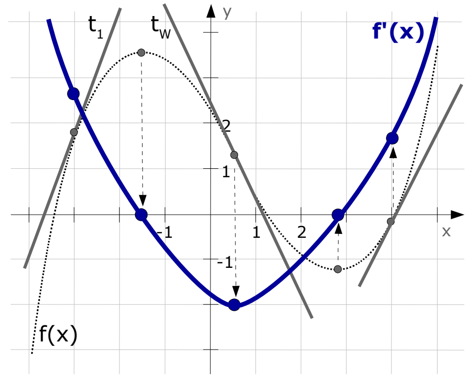
Bsp.4

Gegeben sei das Schaubild der Funktion f(x).
Skizzieren Sie hiermit ein Schaubild von f'(x)!



Lösung:
Wir lesen die Steigung der Funktion f(x) ab. Der Wert dieser Steigung ist der y-Wert der Ableitungsfunktion.

→ Am einfachsten beginnt man mit Hoch- und Tiefpunkten von f(x), denn da ist die Steigung Null! Also hat die Ableitungsfunktion f'(x) da Nullstellen [bei den gleichen x-Werten wie H und T].



→ Weiterhin geschickt sind Wendepunkte, sofern man diese aus f(x) ablesen kann. Ein Wendepunkt von f(x) wird in der Ableitung immer zu einem Hoch- oder Tiefpunkt In unserer Skizze ist bei x≈0,5 ein Wendepunkt von f(x). Die Steigung in diesem Punkt lesen wir über ein Steigungsdreieck ab. Das geht so: Man legt im gewünschten Punkt eine Tangente an [mit dem Lineal] und zeichnet sie ein [in der Skizze „t_w"]. Nun bewegt man sich von irgendeinem Punkt der Tangente „1" nach rechts und schaut wieviel man hoch oder runter gehen muss, um wieder auf die Tangente zu treffen. Bei unserer Tangente t_W wäre es so, dass man „1" nach rechts geht und dann ca. „2" nach unten gehen müsste, um wieder auf die Tangente zu treffen. Daher ist die Steigung im Wendepunkt „m≈-2". Nun kann man einen Punkt von f'(x) konstruieren: der x-Wert ist der gleiche wie der vom Wendepunkt [x=0,5], der y-Wert ist der Wert der Steigung: y=-2.

→ Nun hat man drei Punkte von f'(x): die beiden Nullstellen und den eben erhaltenen Tiefpunkt bei T(0,5|-2). Theoretisch könnte man damit f'(x) bereits skizzieren. Wir bestimmen jedoch noch ein paar Punkte von f'(x).

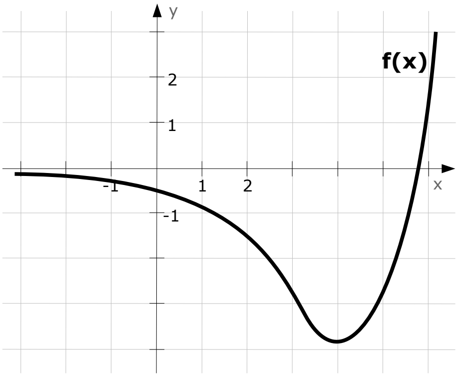
→ Völlig willkürlich suche ich mir z.B. den Punkt P_1(-2|1,9) von f(x) aus. In diesem Punkt zeichne ich wieder eine Tangente ein [in der Skizze: t_1], die eine Steigung von ca. m≈2,5 hat [beachten Sie, dass die Ungenauigkeit beim Einzeichnen der Tangente normalerweise sehr hoch ist. Es könnte auch sein, dass Sie m≈2 oder m≈3 erhalten].
f'(x) hat also einen Punkt bei Q_1(-2|2,5).

→ Völlig willkürlich suche ich mir noch einen weiteren Punkt aus, den am rechten Rand P_2(4|-0,2) von f(x) aus. In diesem Punkt zeichnet man abermals eine Tangente ein [in der Skizze: t_2]. Sie hat eine Steigung von ca. m≈1,75.
f'(x) hat also einen Punkt bei Q_1(4|1,75).

Nun hat man mehrere Punkte von f'(x) und kann daher die Ableitung skizzieren. In der Theorie hat man nun eine schöne Kurve. In der Praxis sieht das Ergebnis meist recht eckig aus. Man kann probieren, die Kurve ein bisschen zu glätten.

Bsp.5

Gegeben sei das Schaubild einer Funktion f(x). Skizzieren Sie hiermit ein Schaubild von f'(x)!



Lösung

Wir probieren diesmal f'(x) mit Hilfe der ausführlichen Tabelle zu zeichnen.

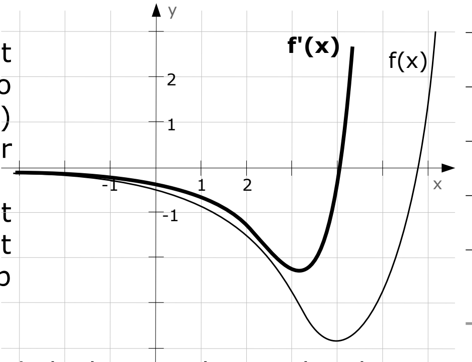
→ f(x) hat eine Nullstelle bei x≈4,8. Das bringt uns aber rein gar nicht.

→ f(x) hat einen Tiefpunkt bei x=4. Deswegen hat f'(x) bei x=4 eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von Minus nach Plus.

→ f(x) hat eine Wendestelle bei ungefähr x=3. f'(x) hat daher einen Extrempunkt bei x=3. Die Steigung bei x=3 ist ungefähr m≈-2 [Tangente bei x=3 an f(x) legen und Steigungsdreieck zeichnen]. Daher hat f'(x) bei x=3 einen Tiefpunkt mit y-Wert von y=-2.

f(x)	f'(x)
N	/
H	$N_{+\to-}$
T	$N_{-\to+}$
SP	$N_{+\to+}$, $N_{-\to-}$
W	H oder T
/	W
steigend	oberhalb der x-Achse
fallend	unterhalb der x-Achse

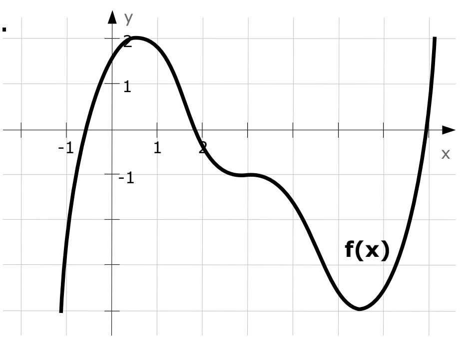
→ Rechts von x=4 ist f(x) steigend, also befindet sich f'(x) immer oberhalb der x-Achse. Links von x=4 ist f(x) fallend, also ist f'(x) hier unterhalb der x-Achse.



Man könnte noch anmerken, dass f(x) nach links hin, an die x-Achse hin, immer flacher wird, f'(x) also gegen Null geht, also gegen die x-Achse.

Bsp.6

Gegeben sei das Schaubild einer Funktion f(x). Skizzieren Sie hiermit ein Schaubild von f'(x)!



Lösung

Wir zeichnen f'(x) mit Hilfe der ausführlichen Tabelle.

→ f(x) hat einen Hochpunkt bei x≈0,5. Deswegen hat f'(x) bei x≈0,5 eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel [=VZW] von Plus nach Minus.

→ f(x) hat einen Sattelpunkt bei x=3.
f'(x) hat daher bei x=3 eine Nullstelle ohne VZW [$N_{+\to+}$ oder $N_{-\to-}$].

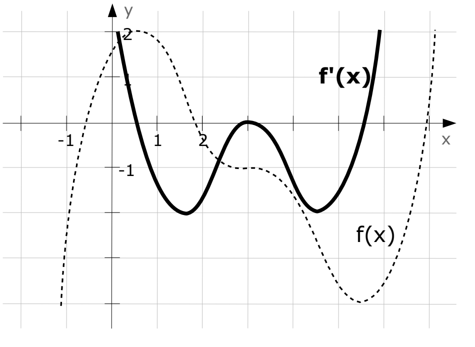
→ f(x) hat einen Tiefpunkt bei x≈5,5. Deswegen hat f'(x) bei x≈5,5 eine Nullstelle mit VZW von Minus nach Plus.

→ Bei x≈1,5 und x≈4,5 hat f(x) jeweils einen Wendepunkt. In beiden Wendepunkten ist die Steigung ungefähr m≈-2 [die Steigung der Tangente beträgt in etwa m≈-2]. Daher hat f'(x) bei ≈1,5 und x≈4,5 jeweils einen Extrempunkt mit den y-Werten von y=-2. Anhand vom Rest der Skizze kann man sehen, dass es *Tief*punkte sind.

→ Am rechten und am linken Rand der Skizze [also für x→±∞] ist f(x) stark steigend, d.h. m→+∞. Die y-Werte von f'(x) gehen also gegen +∞, anders formuliert:
Am rechten und linken Rand der Skizze läuft das Schaubild der Ableitung f'(x) nach oben.

Nun kann man f'(x) skizzieren.

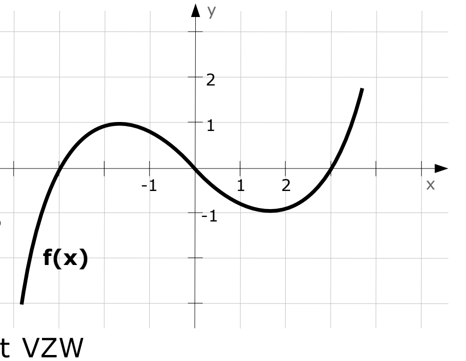
f(x)	**f'(x)**
N	—
H	**$N_{+\to-}$**
T	**$N_{-\to+}$**
SP	**$N_{+\to+}$,$N_{-\to-}$**
W	**H** oder **T**
—	**W**
steigend	**oberhalb der x-Achse**
fallend	**unterhalb der x-Achse**



Wenn man das Schaubild einer Funktion f(x) gegeben hat und das Schaubild der Stammfunktion skizzieren will, denkt man rückwärts. Am einfachsten betrachten man wieder die Tabelle, nur bedeuten die Spalten nicht „f(x)" und „f'(x)", sondern F(x) und f(x). [f(x) ist ja die Ableitung von F(x)]

Bsp.7

Gegeben sei das Schaubild einer Funktion f(x). Skizzieren Sie hiermit ein Schaubild von F(x)!

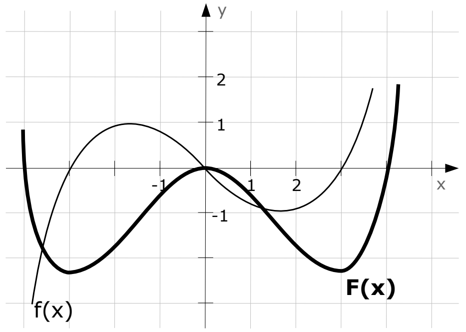


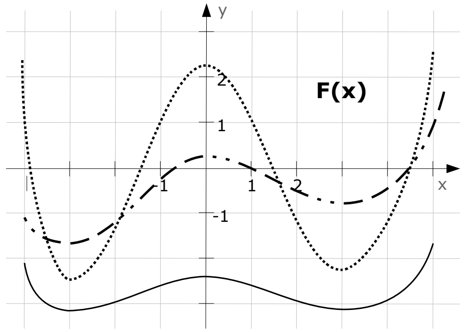
Lösung:
f(x) ist die Ableitung von F(x).
Wir bemühen also wieder unsere Tabelle, bloß dass wir die Spalten nicht f(x) und f'(x), sondern F(x) und f(x) nennen.
Damit ergibt sich folgende Situation:
Bei x=-3 und x=3 hat f(x) je eine Nullstelle mit VZW [Vorzeichenwechsel] von Minus nach Plus. F(x) hat bei x=-3 und bei x=3 also jeweils einen Tiefpunkt.
Bei x=0 haben wir eine Nullstelle mit VZW von Plus nach Minus, F(x) hat bei x=0 also einen Hochpunkt.

Die y-Werte dieser Extrempunkte kennen wir nicht, auf welcher Höhe man die Extrempunkte wählt, kann man sich also aussuchen.
Die Extrempunkte von f(x) ergeben bei F(x) Wendepunkte. Die ignorieren wir alle, die sind in der Zeichnung ein bisschen ungeschickt anzuwenden.
Eigentlich können wir nun eine Skizze von F(x) anfertigen. [Halten Sie sich nur bitte vor Augen, dass Ihre Skizzen sehr weit von der Musterlösung abweichen können, da man die y-Werte der Extrempunkte gar nicht angeben kann. In der rechten Skizze finden Sie verschiedene Möglichkeiten, wie Ihre Skizze von F(x) aussehen könnte. Zwar mathematisch nicht ganz korrekt, aber es geht ohne großen Aufwand nicht viel besser.]

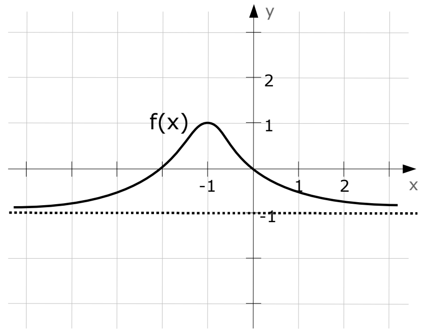
F(x)	**f(x)**
N	–
H	$\mathbf{N}_{+\to-}$
T	$\mathbf{N}_{-\to+}$
SP	$\mathbf{N}_{+\to+}$, $\mathbf{N}_{-\to-}$
W	**H** oder **T**
–	**W**
steigend	**oberhalb der x-Achse**
fallend	**unterhalb der x-Achse**

Musterlösung für F(x) viele Möglichkeiten für F(x)



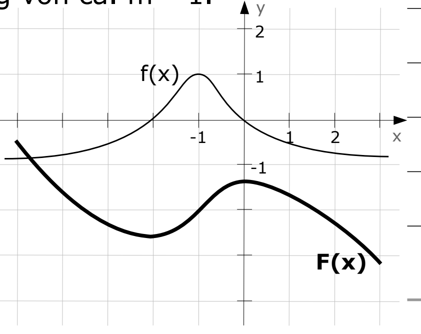


Bsp.8
Gegeben sei das Schaubild einer Funktion f(x). Skizzieren Sie hiermit ein Schaubild von F(x)!



Lösung:
f(x) ist die Ableitung von F(x).
Wir bemühen also wieder unsere Tabelle.
Bei x=-2 hat f(x) eine Nullstelle mit VZW [Vor-

zeichenwechsel] von Minus nach Plus. F(x) hat bei x=-2 also einen Tiefpunkt.
Bei x=0 haben wir eine Nullstelle mit VZW von Plus nach Minus, F(x) hat bei x=0 also einen Hochpunkt.
Bei x=-1 hat f(x) einen Extrempunkt, F(x) hat da also einen Wendepunkt. Allerdings ignorieren wir diesen überaus interessanten Wissenspunkt.
Wenn wir f(x) am linken und rechten Rand betrachten, stellen wir fest, dass f(x) sich dem Wert y=-1 annähert. Da f(x) die Steigung von F(x) ist, bedeutet es, dass F(x) am linken und rechten Rand des Schaubilds eine Steigung von m=-1 hat.
Wir zeichnen also eine Funktion, die bei x=-2 einen Tiefpunkt hat, bei x=0 einen Hochpunkt und links und rechts jeweils eine Steigung von ca. m=-1.
Wie weit F(x) in y-Richtung hoch- oder runter verschoben wird, ist natürlich wieder beliebig. Ebenso wird Ihre Skizze vermutlich stark von der gezeichneten Musterlösung abweichen.



F(x)	**f(x)**
N	
H	**$N_{+\to-}$**
T	**$N_{-\to+}$**
SP	**$N_{+\to+}$,$N_{-\to-}$**
W	**H** oder **T**
	W
steigend	**oberhalb der x-Achse**
fallend	**unterhalb der x-Achse**

F(x) exakt zeichnen !!

Wie bereits am Kapitelanfang erwähnt, gibt es eine Methode, mit deren Hilfe Stammfunktionen sehr genau zeichnen kann. Leider ist das keine Methode, mit der man ruck-zuck ist. Daher verwendet man diese Methode eher selten, nur wenn man eine recht genaue Skizze braucht.
Die Idee ist die:
F(x) ist ja die Funktion, die den Flächeninhalt zwischen f(x) und der x-Achse angibt [normalerweise im Zusammenhang mit dem Integral]. Wir machen das nun anders `rum. Wir schätzen den Flächeninhalt zwischen f(x) und der x-Achse ab [indem wir Kästchen zählen], und skizzieren damit die Stammfunktion F(x).

Vorgehensweise zum Zeichnen von Stammfunktionen:
Für die Abschätzung der Flächeninhalte betrachtet man am besten immer senkrechte Flächenstreifen der Breite 1cm, zwischen f(x) und der x-Achse.
Flächen im 1. und 3. Quadranten [rechts oben und links unten] **zählen positiv.**
Flächen im 2. und 4. Quadranten [rechts unten und links oben] **zählen negativ.**
Die Fläche zwischen f(x) und der x-Achse in einem Streifen der Breite 1 ist der y-Wert der Stammfunktion.

Der erste Punkt der Stammfunktion ist der Ursprung.

Das erste Flächenstück liegt zwischen f(x), der x-Achse , x=0 und x=1.

Der Wert dieser Fläche ist der y-Wert der Stammfunktion bei x=1.

Das zweite Flächenstück liegt zwischen f(x), der x-Achse , x=1 und x=2.

Der Wert dieser Fläche wird zu der vorhergehenden Fläche dazugezählt, das ergibt den y-Wert der Stammfunktion bei x=2

Das dritte Flächenstück liegt zwischen f(x), der x-Achse , x=2 und x=3.

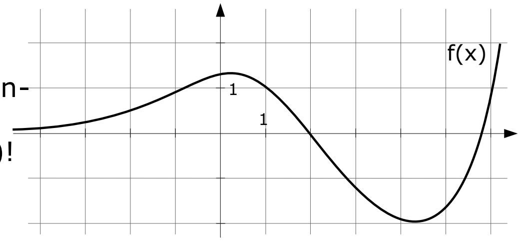
Der Wert dieser Fläche wird zu den vorhergehenden Flächen addiert, das ergibt den y-Wert der Stammfunktion bei x=3

...

Um die Stammfunktion links von der y-Achse zu malen, fängt man wieder von vorne (beim Ursprung) an.

Bsp.9

Gegeben sei das Schaubild der nebenstehenden Funktion f(x).
Skizzieren Sie hiermit ein Schaubild von F(x)!



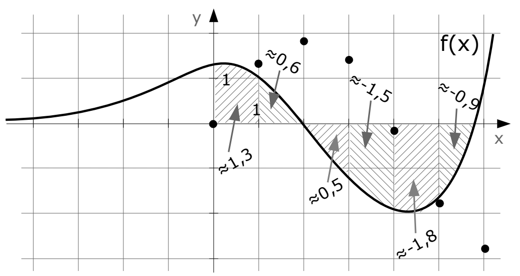
Lösung: F(0) = 0

Die Fläche zwischen x=0 und x=1 beträgt ca. 1,3cm² [grobe Schätzung].

⇒ F(1) = 1,3

Die Fläche zwischen x=1 und x=2 beträgt ca. 0,6cm².

⇒ F(2) = 1,3+0,6 = 1,9

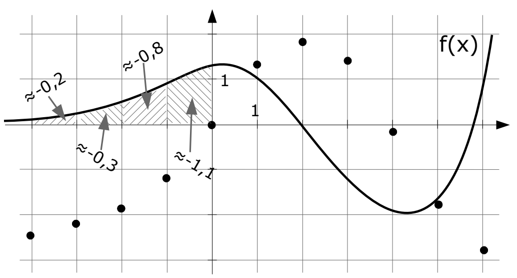


Die Fläche zwischen x=2 und x=3 beträgt ca. -0,5cm². ⇒ F(3)=1,9+(-0,5)=1,4

Die Fläche zwischen x=3 und x=4 beträgt ca. -1,5cm². ⇒ F(4)=1,4+(-1,5)=-0,1

Die Fläche zwischen x=4 und x=5 beträgt ca. -1,8cm². ⇒ F(4)=-0,1+(-1,8)=-1,9

Die Fläche zwischen x=5 und x=6 beträgt ca. -0,9cm². ⇒ F(5)=-1,9+(-0,9)=-2,8



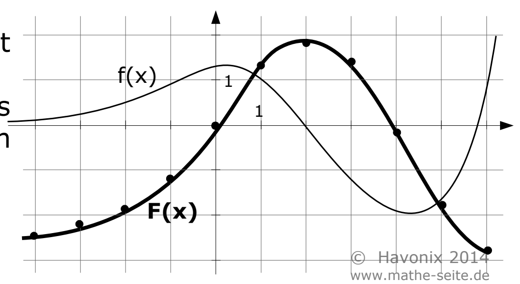
Die Fläche zwischen x=0 und x=-1 beträgt ca. -1,1cm². ⇒ F(-1) = -1,1

Die Fläche zwischen x=-1 und x=-2 beträgt ca. -0,8cm². ⇒ F(-2)=-1,1+(-0,8)=-1,9

Die Fläche zwischen x=-2 und x=-3 beträgt ca. -0,3cm². ⇒ F(-3)=-1,9+(-0,3)=-2,2

Die Fläche zwischen x=-3 und x=-4 beträgt ca. -0,2cm². ⇒ F(-2)=-2,2+(-0,2)=-2,4

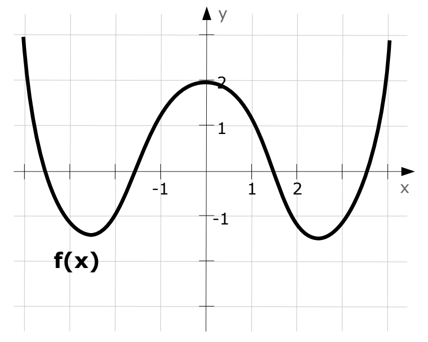
Wenn man die Punkte nun verbindet, erhält man die Stammfunktion F(x).
Vielleicht erinnern Sie sich noch daran, dass eine Stammfunktion im Koordinatensystem



beliebig hoch- oder runter verschoben werden kann. So könnte man auch hier F(x) also noch beliebig hoch oder runter verschieben.

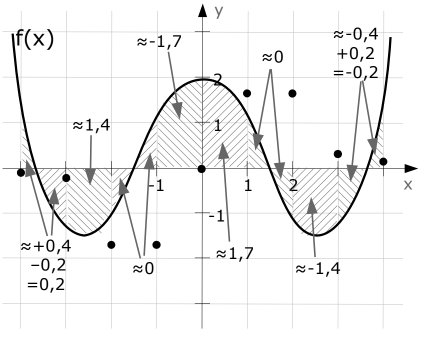
Bsp.10

Gegeben sei das Schaubild der nebenstehenden Funktion f(x).
Skizzieren Sie hiermit ein Schaubild der Integralfunktion $I_1(x)$!



Lösung:
Der Unterschied zwischen einer Integralfunktion [hier $I_1(x)$] und einer Stammfunktion [F(x)] ist der, dass die Lage von F(x) nicht vorgeschrieben ist. Man kann F(x) im Koordinatensystem beliebig hoch oder runter verschieben. Bei einer Integralfunktion geht das nicht. $I_1(x)$ hat beispielsweise eine Nullstelle bei x=1.
[Erkennt man an der kleinen „1“ unten im Index. →siehe „Kap.A.18.10 Integralfunktionen“].
Wir kümmern uns erst einmal nicht um „$I_1(x)$“, sondern skizzieren F(x) wie im letzten Beispiel und verschieben erst zum Schluss das Schaubild von F(x) so, dass es bei x=1 eine Nullstelle hat. Wir beginnen wie immer mit einem Punkt im Ursprung und schätzen Flächeninhalte ab.
[Denken Sie bitte dran, dass Flächeninhalte im ersten und dritten Quadranten positiv gezählt werden, im zweiten und vierten Quadranten jedoch negativ.]

Die Fläche zwischen x=0 und x=1 beträgt ca. 1,7cm² [grobe Schätzung] ⇒ F(1) = 1,7



Die Fläche zwischen x=1 und x=2 besteht aus zwei Teilstücken, deren Inhalt sich in etwa aufhebt [beide ca. gleich groß, eine jedoch oberhalb, die andere unterhalb der x-Achse]. ⇒ der Inhalt ist ungefähr 0 ⇒ F(2)=1,7+0= 1,7

Die Fläche zwischen x=2 und x=3 beträgt ca. -1,4cm² ⇒ F(3) = 1,7+(-1,4) = 0,3

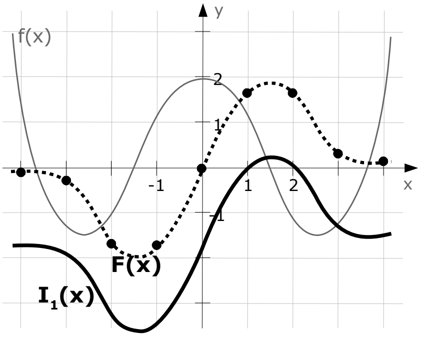
Die Fläche zwischen x=3 und x=4 ist wieder zweiteilig und beträgt ca. -0,4+0,2=-0,2 cm². ⇒ F(4) = 0,3+(-0,2) = 0,1

Links von der y-Achse sind die Flächeninhalte genau gleich, nur die Vorzeichen sind geändert.

⇒ F(-1)=-1,7 F(-2)=-1,7 F(-3)=-0,3

Nun verbinden wir alle Punkte und erhalten das Schaubild von F(x) [in der Skizze gestrichelt].

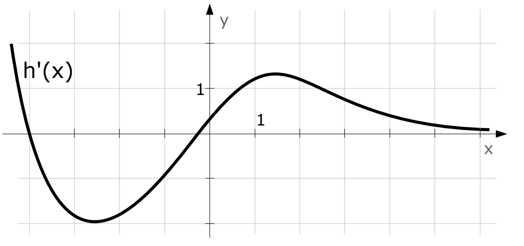
Dieses Schaubild verschieben wir nun so weit nach unten, dass es bei x=1 die x-Achse schneidet. Das ist dann das Schaubild der Integralfunktion $I_1(x)$.



A.27.04 Aussagen über f(x) anhand des Schaubilds von f'(x) (∯)

[Dieses Kapitel ist eine Art „Anwendung" des letzten Unterkapitels A.27.03]
In den letzten Jahren sieht man öfter Aufgaben, in welchen das Schaubild einer Funktion angegeben ist und man Aussagen über das Schaubild der Stammfunktion [manchmal auch Ableitung] treffen muss.
Eine Möglichkeit ist, das Schaubild der Stammfunktion oder Ableitung zu skizzieren und hieraus Eigenschaften abzulesen. Wir werden die Fragen jedoch beantworten, ohne die kompletten Schaubilder zu skizzieren, weil das schneller geht.

Bsp.11
Gegeben ist das Schaubild der Ableitungsfunktion h'(x).
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr, falsch oder unentscheidbar sind !



1. Das Schaubild von h(x) ist im Bereich $x \in \mathbb{R}^+$ monoton.
2. h(x) hat für negative x-Werte mindestens eine Nullstelle.
3. Das Schaubild von h(x) hat im Intervall [-1;0] einen Tiefpunkt.
4. Das Schaubild von h(x) hat eine waagerechte Asymptote.
5. Das Schaubild von h(x) hat die x-Achse als Asymptote.
6. Die Tangente an h(x) in A(-1| h(-1)) ist parallel zu y=-x+3.
7. $h''(-4) \geqslant h'(-4)$
8. h(x) weist Symmetrieeigenschaften auf.

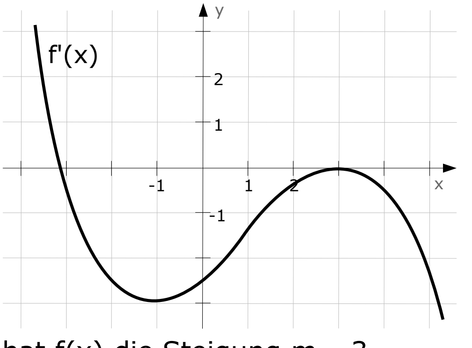
Lösung:
1. Die Funktion, deren Schaubild wir sehen, ist nicht monoton, aber das ist ja auch h'(x) und nicht h(x). h(x) ist monoton steigend, wenn h'(x) immer positiv ist und h(x) ist monoton fallend, wenn h'(x) immer negativ ist.
   In dieser Aufgabe [uns interessieren nur positive x-Werte] ist h'(x) immer positiv, da sich h'(x) immer oberhalb der x-Achse befindet. Die Aussage ist damit wahr.
2. Über Nullstellen kann man von h(x) nichts aussagen, da h(x) die Stammfunktion von h'(x) ist und damit beliebig hoch oder runter geschoben werden kann.
   h(x) könnte Nullstellen haben oder auch nicht. Die Aussage ist also unentscheidbar. [Es gibt auch Fälle, in denen man doch Aussagen über die Nullstellen treffen kann. Das ist jedoch etwas schwerer und ich möchte das hier nicht behandeln. Bei Interesse: siehe auf www.mathe-seite.de Bsp.A.27.04.03.e)]
3. Im genannten Intervall [-1|0] hat h'(x) eine Nullstelle.
   Wenn man die Tabelle bemüht, die wir in den letzten Seiten immer verwendet haben, erkennt man, dass es sich um eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von Minus nach Plus handelt und somit bei h(x) ein Tiefpunkt liegen muss.
   Die Aussage ist also wahr.
4. Wenn man sich das Schaubild von h'(x) auf der rechten Seite, also für $x \to +\infty$

anschaut, stellt man fest, dass h'(x)→0 geht. Anderes formuliert: Rechts geht die Steigung von h(x) gegen Null. Wenn aber die Steigung einer Funktion gegen Null geht, muss die Funktion annähernd waagerecht verlaufen. [Das ist nichts anderes als eine waagerechte Asymptote]. Die Aussage ist also wahr.

5. Wir haben eben nachgewiesen, dass h(x) eine waagerechte Asymptote haben muss. Es ist aber keinesfalls klar, dass die x-Achse diese Asymptote sein *muss*. [Da h(x) beliebig hoch oder runter verschoben werden kann, kann die waagerechte Asymptote auch beliebig weit oben oder unten liegen].
   Die Aussage ist also unentscheidbar.
6. Das entscheidende Wort ist „parallel". Parallel bedeutet, dass zwei Sachen die gleiche Steigung haben müssen. Um welche beiden Sachen geht es?
   Zum einen geht es um die Tangente an h(x) in A(-1|..).
   Diese hat die Steigung: m_{Tan}=h'(-1) = (laut Zeichnung) ≈ -1.
   Zum anderen geht es um die Gerade y=-x+1, welche die Steigung m_g=-1 hat.
   Beide Steigungen sind gleich, damit sind h(x) und die Gerade (bei x=-1) parallel, die Aussage stimmt.
7. h''(x) ist die Ableitung [damit die Steigung] von h'(x). h''(-4) ist also die Steigung von h'(x) an der Stelle x=-4. Diese Steigung kann man aus der Zeichnung ablesen, sie beträgt ganz grob geschätzt -3, es gilt also h''(-4)≈-3.
   h'(-4) ist der y-Wert der h'(x)-Funktion, er beträgt 0. h''(-4)⩾h'(-4) ist also gleichbedeutend mit -3 ⩾ 0. Die Aussage ist also falsch.
8. Wenn h(x) in irgend einer Weise symmetrisch wäre, müsste auch die Steigung davon [also h'(x)] irgendwie symmetrisch sein. Das ist jedoch nicht der Fall.
   Die Aussage ist also falsch.

Bsp.12

Gegeben ist das Schaubild der Ableitungsfunktion f'(x). Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr, falsch oder unentscheidbar sind. Begründen Sie Ihre Antwort!



1. Das Schaubild von f(x) besitzt zwei Wendepunkte.
2. Das Schaubild von f(x) besitzt einen Wendepunkt bei W(-1|-3).
3. In einem Wendepunkt links von der y-Achse hat f(x) die Steigung m=-3.
4. Bei x=3 besitzt f(x) einen Extrempunkt.
5. f(x) besitzt drei Stellen, in denen die Tangente parallel zur Geraden g : 2x+y−3=0 ist.
6. Im Bereich [-4;-3] besitzt f(x) einen Extrempunkt.
7. f(x) besitzt mindestens eine waagerechte Asymptote.
8. f(0) ⩾ f''(0)

Lösung:

1. Spätestens aus der Tabelle, die ein paar Seiten weiter vorne stand, wissen wir, dass eine Funktion f(x) Wendepunkte hat, wenn die Ableitung Extrema hat. Das ist hier gegeben.
   f'(x) hat bei x=-1 und bei x=3 je einen Extrempunkt, also hat f(x) bei diesen x-Werten je einen Wendepunkt. Die Aussage ist wahr.
2. Das interessiert doch eh´ keinen.
3. Links von der y-Achse befindet sich nur bei x=-1 ein Wendepunkt. f(x) soll hier die Steigung m=-3 haben. Die Steigung von f(x) ist f'(x), daher müsste f'(x) bei x=-1 den Wert -3 haben. Das ist laut Skizze der Fall.
   Die Aussage ist also total wahr.
4. Bei x=3 hat f'(x) eine Nullstelle [was für einen Extrempunkt von f(x) spräche] und gleichzeitig einen Hochpunkt [was für einen Wendepunkt von f(x) spräche]. Das ist ein bisschen widersprüchlich. Wenn Sie nicht nachdenken wollen, betrachten Sie wieder die Tabelle: Eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel [was hier der Fall ist] wird bei f(x) zu einem Sattelpunkt [oder Terassenpunkt]. Die Aussage ist also falsch. Blöde Aussage. Jawohl!
5. Sofort fällt uns wieder das Wort „parallel“ auf. Es bedeutet, dass f(x) und diese Gerade an drei Stellen die gleiche Steigung haben müssen. Die Gerade g ist in einer seltsamen Form angegeben, wir formen sie erst um.
   $g: 2x+y-3=0 \;\Leftrightarrow\; g: y=-2x+3$ Jetzt kann man die Geradensteigung ablesen. Es gilt: $m_g=-2$. Damit g und die Tangente parallel sind, müsste die Tangente also ebenfalls die Steigung $m_{Tan}=-2$ haben. Die Tangentensteigung ist aber nichts anderes als f'(x), was heißt, dass f´(x) den Wert -2 haben muss. Dieses ist laut Skizze an drei Stellen der Fall (bei $x\approx-2{,}4$, bei $x\approx0{,}5$ und bei $x\approx5{,}3$).
   Es gibt damit tatsächlich drei Stellen, an denen die Tangente parallel zu der Geraden g ist. Die Aussage ist schon wieder wahr. Toll!
6. Zwischen x=-4 und x=-3 gibt es eine Nullstelle von f'(x) mit Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus, es gibt also einen Hochpunkt.
   Die Aussage ist wahr. Des isch ja... ssuuper!
7. Hätte f(x) irgendwo eine waagerechte Asymptote, müsste f(x) annähernd waagerecht verlaufen [und zwar nicht nur an einem einzigen Punkt, sondern ein „längeres“ Stück] und müsste eine Steigung von annähernd Null haben. Das bedeutet, dass f'(x) ein „längeres“ Stück annähernd Null sein müsste, also an der x-Achse entlang laufen müsste.
   Das ischt niergentz der Pfahl. Also is dem Aussagä faltsch.
8. Da man über f(0) keine Aussage treffen kann [y-Wert der Stammfunktion von f'(x)] braucht man gar nicht weiter überlegen. Die Aussage ist unentscheidbar.

Nochmal zu Frage 2. Also gut. Zwar wissen wir jetzt, dass f(x) bei x=-1 einen Wendepunkt hat, das Problem ist jedoch der y-Wert. f(x) ist die Stammfunktion von f'(x), von f(x) werden nie y-Werte bekannt sein, da das Schaubild von f(x) beliebig im Koordinatensystem hoch- oder runter verschoben werden kann. Also: f(x) hat zwar ganz sicher bei W(-1|?) einen Wendepunkt, der y-Wert von -3 ist jedoch unentscheidbar. Die Aussage ist unentscheidbar.

A.27.05 Verwandte Themen (∲)

Sie finden diverse verwandte Themen an anderen Stellen:

Grafiken von ganzrationalen Funktionen: A.46.06 und A.46.07
Grafiken von Exponentialfunktionen: A.41.09 und A.41.10
Grafiken von Sinus- und Kosinusfunktionen: A.42.09 und A.42.10
Grafiken von gebrochen-rationalen Funktionen: A.43.08 und A.43.09
Grafiken von Logarithmus-Funktionen: A.44.07 und A.44.08
Grafiken von Wurzel-Funktionen: A.45.07 und A.45.08