Das Buch:

Dieses Kapitel ist Teil eines Buches.
Das vollständige Buch können Sie unter **www.mathe-laden.de** bestellen (falls Sie das möchten).
Sie werden in diesem Buch ein paar Sachen finden, die nicht aus dem Internet herunter geladen werden können.
Dazu gehören:
Inhaltsverzeichnis, **Stichwortverzeichnis**, und viele **Aufgaben zum Selberrechnen**.

Die Strukturierung:

Die Struktur und die Nummerierung des Buches (und somit dieses Kapitels) ist genau gleich wie die von **www.mathe-seite.de**, von welcher Sie diese Datei vermutlich bezogen haben.
Somit können Sie recht einfach zwischen Lernfilmen der MatheSeite und den schriftlichen Erklärungen des Buches hin- und her springen.
Auf diese Weise sollten Sie sich (hoffentlich) optimal vorbereiten können.

Nutzungsbedingung:

A.13 Ableitungen

- Es gibt die Ableitungen von einfachen Funktionen, die immer die Form haben:
  $\text{Zahl}\cdot x^{\text{Zahl}} + \text{Zahl}\cdot x^{\text{Zahl}} + \ldots$ [z.Aufg. $x^4+4x^3-7x^2+5x-2$]
- Es gibt die Ableitungen der verschiedenen Funktionstypen [e-Funktionen, sin- und cos-Funktion, Brüche, ...], die wir in Kap A.41 – Kap A.45 genauer behandeln.
- Kompliziertere Funktionen, die man mit der Produkt-, Quotienten- oder Kettenregel ableiten muss.

A.13.01 Ableitungen von einfachen Funktionen (∰)

Potenzen leitet man so ab: die Hochzahl vom x-Term kommt mit „mal"-verbunden vor den Term, die neue Hochzahl wird um 1 kleiner.
Aus x^4 wird also $4\cdot x^3$, aus $4x^3$ wird $4\cdot 3\cdot x^2=12x^2$
Bei Termen der Form „Zahl·x" fällt das „x" weg. Aus „5x" wird also „5".
Zahlen, die kein „x" haben, fallen weg.

$$f(x) = a\cdot x^n$$
$$f'(x) = a\cdot n\cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = \sin(x)$$
$$f'(x) = \cos(x)$$
$$f(x) = \cos(x)$$
$$f'(x) = -\sin(x)$$

Aufg.1
Leiten Sie die Funktion
$f(x)=x^4+4x^3-7x^2+5x-2$ zwei mal ab.

Aufg.2
Bestimmen Sie die f'(x) und f''(x) von:
$f(x) = x^5+4x^4-2x^3-5x^2+3x+3{,}2$

Aufg.3
Bestimmen Sie die Ableitung von: $f(x) = 2\cdot\sin(x)$

Aufg.4
Leiten Sie ab: $f(x) = -3\cdot\cos(x)+4x-5$

Aufg.5
Bestimmen Sie die Ableitung von: $f(x) = 5\cdot e^{2x}-1$

$$f(x) = a\cdot e^{k\cdot x}$$
$$f'(x) = a\cdot k\cdot e^{k\cdot x}$$

Lösung von Aufg.1:

$f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 5x - 2$ ableiten ...

$f'(x) = 4\cdot x^3 + 4\cdot 3x^2 - 7\cdot 2x + 5$ vereinfachen ...

$= 4x^3 + 12x^2 - 14x + 5$

[Will man f´(x) ein weiteres Mal ableiten, dann ist das die zweite Ableitung.]

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 14x + 5$

$f''(x) = 4\cdot 3x^2 + 12\cdot 2x - 14$

$= 12x^2 + 24x - 14$

Lösung von Aufg.2

$f'(x) = 5x^4 + 4\cdot 4x^3 - 2\cdot 3x^2 - 5\cdot 2x + 3$

$= 5x^4 + 16x^3 - 6x^2 - 10x + 3$

$f''(x) = 20x^3 + 48x^2 - 12x - 10$

Lösung von Aufg.3

$f(x) = 2\cdot\sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2\cdot\cos(x)$

Lösung von Aufg.4

$f(x) = -3\cdot\cos(x) + 4x - 5$

$f'(x) = -3\cdot(-\sin(x)) + 4 = 3\cdot\sin(x) + 4$

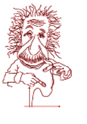
Lösung von Aufg.5

$f(x) = 5\cdot e^{2x} - 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5\cdot 2e^{2x} = 10\cdot e^{2x}$

A.13.02 einfache Wurzeln und Brüche (∰)

Wurzeln und Brüche kann man häufig umschreiben. Bei Brüchen der Form $\frac{\text{Zahl}}{x^{\text{Zahl}}}$ bringt man den Nenner von unten hoch, in den Zähler, in dem man das Vorzeichen der Hochzahl ändert.
Wurzeln schreibt man um, in dem man aus der Hochzahl von „x“ einen Bruch macht.

Wurzeln und Brüche sollte man zuerst besser umschreiben.



Aufg. 6

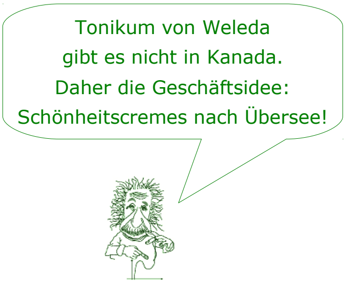
Schreiben Sie folgende Funktionen in die Form: $a\cdot x^n$ um

$f(x)=\frac{5}{x^3}$ $\quad g(x)=\frac{2}{3x^6}$ $\quad h(x)=\frac{4}{5x}$ $\quad i(x)=\frac{12}{5x^{-3}}$

Aufg. 7
Schreiben Sie folgende Funktionen in die Form: $a\cdot x^n$ um
$f(x)=\sqrt{x}$ $g(x)=4\sqrt{x}$ $h(x)=\sqrt[3]{x}$ $i(x)=\sqrt[5]{x^2}$

Aufg. 8
Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x)=3\sqrt{x}+4x$

Aufg. 9
Bestimmen Sie die Ableitung von $f(x)=\frac{3}{x^3}+\frac{6}{5x^2}$



Aufg. 10
$$g(x) = 3x^4 + 2x^{2,5} - \sqrt{x} + \frac{5}{x^3} + 4x^{-8} + 7$$
Bestimmen Sie die Ableitung von g(x).

Lösung von Aufg.6
$f(x)=5\cdot x^{-3}$ $g(x)=\frac{2}{3}\cdot x^{-6}$ $h(x)=\frac{4}{5}\cdot x^{-1}$ $i(x)=\frac{12}{5}\cdot x^3$

Lösung von Aufg.7
$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ $g(x) = 4x^{\frac{1}{2}}$ $h(x) = x^{\frac{1}{3}}$ $i(x) = x^{\frac{2}{5}}$

Lösung von Aufg.8:
f(x) umschreiben: $f(x) = 3x^{0,5} + 4x$
f(x) ableiten: $f'(x) = 3\cdot 0,5x^{0,5-1}+4 = 1,5x^{-0,5} + 4$

Falls man möchte, kann man f'(x) wieder umschreiben:
$f'(x)=1,5\cdot x^{-0,5}+4 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^{0,5}}+4 = \frac{3}{2\sqrt{x}}+4$

Lösung von Aufg.9:
f(x) umschreiben: $f(x) = 3\cdot x^{-3} + \frac{6}{5}x^{-2}$
f(x) ableiten: $f'(x) = 3\cdot(-3)\cdot x^{-4} + \frac{6}{5}\cdot(-2)\cdot x^{-3} = -9\cdot x^{-4} - \frac{12}{5}\cdot x^{-3}$

Falls man möchte, kann man f'(x) wieder umschreiben: $f'(x)=-\frac{9}{x^4}-\frac{12}{5x^3}$

Lösung von Aufg.10:
Zuerst schreibt man g(x) um zu:
$$g(x) = 3x^4 + 2x^{2,5} - x^{0,5} + 5x^{-3} + 4x^{-8} + 7$$

Jetzt kann man g(x) ableiten

$$g'(x) = 3\cdot 4x^3+2\cdot 2{,}5x^{1{,}5}-0{,}5x^{-0{,}5}+5\cdot(-3)\cdot x^{-4}+4\cdot(-8)\cdot x^{-9}$$
$$= 12x^3 + 5x^{1{,}5} - 0{,}5x^{-0{,}5} - 15x^{-4} - 32x^{-9}$$

$$g''(x) = 36x^2 + 7{,}5x^{0{,}5} +0{,}25x^{-1{,}5} + 60x^{-5} + 288x^{-10}$$

Man könnte die Ableitungen wieder umschreiben zu:

$$g'(x) = 12x^3 + 5\sqrt{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{15}{x^4} - \frac{32}{x^9} \quad \text{bzw}$$
$$g''(x) = 36x^2 + 7{,}5\sqrt{x} - \frac{1}{4\sqrt{x^3}} - \frac{60}{x^5} - \frac{288}{x^{10}}$$

A.13.03 Ableitungen von Verkettungen (Kettenregel) (∰)

Die Kettenregel wendet man an, wenn man verschachtelte Funktionen hat. [„Verschachtelte Funktionen" bedeutet nomalerweise: Funktionen mit Klammern drin.]

Die Formel für die Kettenregel finde ich etwas unschön. Die Kettenregel sagt im Prinzip aus, dass man die innere Ableitung beachten muss [falls eine vorhanden ist].

$$f(x)= u(v(x))$$
$$\Downarrow$$
$$f'(x)=u'(v(x))\cdot v'(x)$$

Aufg.11

Was ist die Ableitung von $f(x) = (2x+5)^{13}$?

Aufg.12

Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

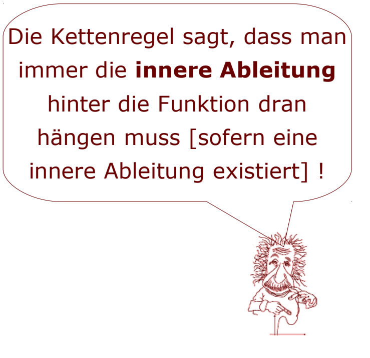
$f(x)=2\cdot(4x+5)^3$ $g(x)=3\cdot(1+0{,}5x)^8$ $h(x)=6\cdot(5-2x^2)^4$ $i(x)=0{,}5\cdot(8-x)^{-3}$

Aufg.13

Bestimmen Sie die Ableitung von: $j(x) = \sqrt{x^2-4}$

Lösung von Aufg.11:

Um f(x) abzuleiten, denkt man zuerst nur an $(...)^{13}$.
$(...)^{13}$ abgeleitet ergibt $13\cdot(...)^{12}$.
Erst anschließend betrachtet man das Innere der Klammer „(2x+5)", leitet dieses zu „2" ab und hängt diese „2" hinten an die Ableitung dran.
$f(x)=(2x+5)^{13}$ gibt abgeleitet: $f'(x) = 13\cdot(2x+5)^{12}\cdot 2$



Lösung von Aufg.12:

$f(x) = 2\cdot(4x+5)^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2\cdot3\cdot(4x+5)^2\cdot4 = 24\cdot(4x+5)^2$

$g(x) = 3\cdot(1+0{,}5x)^8 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 3\cdot8\cdot(1+0{,}5x)^7\cdot0{,}5 = 12\cdot(1+0{,}5x)^7$

$h(x) = 6\cdot(5-2x^2)^4 \quad \Rightarrow \quad h'(x) = 6\cdot4\cdot(5-2x^2)^3\cdot(-4x) = -96x\cdot(5-2x^2)^3$

$i(x) = 0{,}5\cdot(8-x)^{-3} \quad \Rightarrow \quad i'(x) = 0{,}5\cdot(-3)\cdot(8-x)^{-4}\cdot(-1) = +1{,}5\cdot(8-x)^{-4}$

Lösung von Aufg.13:

Um ableiten zu können, muss man die Wurzel als Klammer hoch 0,5 umschreiben: $\sqrt{x^2-4} = (x^2-4)^{0,5}$

$\Rightarrow \; j(x) = (x^2-4)^{0,5}$

$\Rightarrow \; j'(x) = 0{,}5\cdot(x^2-4)^{0,5-1}\cdot(2x) = x\cdot(x^2-4)^{-0,5}$

Man könnte j'(x) jetzt noch umschreiben zu:

$j'(x) = x\cdot(x^2-4)^{-0,5} = \dfrac{x}{(x^2-4)^{0,5}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

A.13.04 Ableitungen von Produkten (Produktregel) (∰)

Die Produktregel (sie heißt auch „Leibnizregel") verwendet man selbstverständlich dann, wenn man ein Produkt ableiten muss.
Z.Aufg. ist das zwingend notwendig bei:
$f(x) = x\cdot\sin(x)$ oder $g(x) = (x-2)\cdot e^{4-x}$
Bevor wir uns jedoch an Themen von Kap.A.41 und A.42 wagen (Sinus- und e-Funktionen), üben wir Leichteres.

$$f(x) = u\cdot v$$
$$\Downarrow$$
$$f'(x) = u'\cdot v + u\cdot v'$$

Aufg.14
Leiten Sie f(x) mit Hilfe der Produktregel einmal ab: $f(x) = x^2\cdot(x^3+2x+3)$

Aufg.15
Leiten Sie $f(x) = (x^2-4x)\cdot\sqrt{x}$ ab!

Aufg.16
Bilden Sie die Ableitung von: $f(x) = (2x^3+3x-1)\cdot(2-x^5)$

Lösung von Aufg.14:

$$f'(x) = \underbrace{2x}_{u'}\cdot\underbrace{(x^3+2x+3)}_{v} + \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{(3x^2+2)}_{v'}$$

[Zum Vereinfachen könnte man jetzt noch die Klammern auflösen.]

$u = x^2$
$u' = 2x$
$v = x^3+2x+3$
$v' = 3x^2+2$

Lösung von Aufg.15:

$$f'(x) = (2x-4)\cdot\sqrt{x} + (x^2-4x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \ldots$$

[könnte man jetzt ebenfalls noch vereinfachen...]

$u = x^2-4x$
$u' = 2x-4$
$v = \sqrt{x} = x^{0,5}$
$v' = 0,5x^{-0,5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Lösung von Aufg.16:

$f'(x) = u'\cdot v+u\cdot v' =$
$= (6x^2+3)\cdot(2-x^5)+(2x^3+3x-1)\cdot(-5x^4) =$
[vereinfachen]
$= 12x^2-6x^7+6-3x^5 - 10x^7-15x^5+5x^4 =$
$= -16x^7-18x^5+5x^4+12x^2+6$

[bräuchte man noch f''(x), ginge das jetzt auch ohne Produktregel]

$f''(x) = -112x^6-90x^4+20x^3+24x$

$u = 2x^3+3x-1$
$u' = 6x^2+3$
$v = 2-x^5$
$v' = -5x^4$

A.13.05 Ableitungen von Brüchen (Quotientenregel) [Kotz-Enten-Regel] (∰)

Bruch-Funktionen heißen eigentlich gebrochen-rationale Funktionen und in Kap.A.43 ausführlicher beschrieben [DownLoadCenter von www.mathe-seite.de]
Wir gehen daher hier nur kurz auf die Quotientenregel ein. Nennen wir also den Zähler [=das Obere] „u", und den Nenner [=das Untere] „v".
Den Bruch leitet man dann wie rechts beschrieben ab:

$$f(x) = \frac{u}{v}$$
⇩
$$f'(x) = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

Aufg.17

Bilden Sie die Ableitung von $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{x^2+1}$

Aufg.18

Bilden Sie die Ableitung von $f(x) = \frac{8x-20}{x+2}$

Lösung von Aufg.17:

$$f'(x) = \frac{(3x^2-4x)\cdot(x^2+1)-(x^3-2x^2)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{(3x^4+3x^2-4x^3-4x)-(2x^4-4x^3)}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{x^4+3x^2-4x}{(x^2+1)^2}$$

$u = x^3-2x^2$
$u' = 3x^2 - 4x$
$v = x^2+1$
$v' = 2x$

Lösung von Aufg.18:

$$f'(x) = \frac{8\cdot(x+2)-(8x-20)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{8x+16-8x+20}{(x+2)^2} = \frac{36}{(x+2)^2}$$

$u = 8x-20$
$u' = 8$
$v = x+2$
$v' = 1$

A.13.06 Kombination der Ableitungsregeln (∯)

Aufg.19
Leiten wir $f(x) = 3x^2\cdot(2x+1)^4$ ab.

Aufg.20
Wir wollen unbedingt drei Ableitungen der Funktion: $f(x)=\frac{2x^2+4x}{2x-5}$

Aufg.21
Bestimmen Sie die erste Ableitung von: $f(x) = 2x\cdot\cos(6x)$

Lösung von Aufg.19:
[Wenn man f(x) betrachtet, sieht man zwei Terme, die mit „mal" verbunden sind: nämlich „$3x^2$" und „$(2x+1)^4$".
Daher braucht man die Produktregel. Ein Teil des Produkts ist $v=(2x+1)^4$. Um dieses abzuleiten, braucht man die Kettenregel.]

$u = 3x^2$
$u' = 6x$
$v = (2x+1)^4$
$v' = 4\cdot(2x+1)^3\cdot 2$
$= 8\cdot(2x+1)^3$
[v': über Kettenregel]

$$f'(x) = 6x\cdot(2x+1)^4 + 3x^2\cdot 8(2x+1)^3$$

[hier kann man noch vereinfachen, wenn man $(2x+1)^3$ ausklammert]

$$= (2x+1)^3 \cdot [\, 6x\cdot(2x+1) + 3x^2\cdot 8 \,] =$$
$$= (2x+1)^3 \cdot [\, 12x^2+6x + 24x^2 \,] =$$
$$= (2x+1)^3 \cdot (\, 36x^2+6x \,)$$

Lösung von Aufg.20:
[Wir brauchen natürlich die Quotientenregel. Für f''(x) und f'''(x) werden wir nachher zusätzlich auch noch die Kettenregel brauchen.]

$$f'(x) = \frac{(4x+4)\cdot(2x-5)-(2x^2+4x)\cdot(2)}{(2x-5)^2} = \ldots = \frac{4x^2-20x-20}{(2x-5)^2}$$

$u = 2x^2+4x$
$u' = 4x+4$
$v = 2x-5$
$v' = 2$

nächste Ableitung:

$$f''(x) = \frac{(8x-20)\cdot(2x-5)^2-(4x^2-20x-20)\cdot 4(2x-5)}{(2x-5)^4} =$$

[die Klammer „(2x–5)" *einmal* ausklammern, dann kürzen]

$$= \frac{\cancel{(2x-5)}\cdot[(8x-20)\cdot(2x-5)-(4x^2-20x-20)\cdot 4]}{(2x-5)^{\cancel{4}}} =$$

$$= \frac{(8x-20)\cdot(2x-5)-(4x^2-20x-20)\cdot 4}{(2x-5)^3} = \ldots = \frac{180}{(2x-5)^3}$$

$u = 4x^2-20x+20$
$u' = 8x-20$
$v = (2x-5)^2$
$v' = 2\cdot(2x-5)^1\cdot 2$
$= 4\cdot(2x-5)$
[v': über Kettenregel]

nächste Ableitung:

$$f'''(x) = \frac{0\cdot(2x-5)^3-180\cdot 6(2x-5)^2}{(2x-5)^6} =$$

$$= \frac{-1080\cancel{(2x-5)^2}}{(2x-5)^{\cancel{6}}} = \frac{-1080}{(2x-5)^4}$$

$u = 180$
$u' = 0$
$v = (2x-5)^3$
$v' = 3\cdot(2x-5)^2\cdot 2$
$= 6\cdot(2x-5)^2$
[v': über Kettenregel]

Lösung von Aufg.21:
$f(x) = 2x\cdot\cos(6x)$

$f'(x) = u'\cdot v+u\cdot v' = 2\cdot\cos(2x)+2x\cdot(-\sin(6x)\cdot 6) =$
$= 2\cos(2x) - 12x\cdot\sin(6x)$

$u = 2x$
$u' = 2$
$v = \cos(6x)$
$v' = -\sin(6x)\cdot 6$